



การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตามแนวคิดของ GUTIERREZ และ JAIME

A STUDY OF MATTHAYOMSUKSA 3 STUDENTS' GEOMETRIC REASONING
BASED ON THE CONCEPTS OF GUTIERREZ & JAIME

อรัญญ์ เอกชัยรุ่งโรจน์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2568

การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ตามแนวคิดของ GUTIERREZ และ JAIME



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ปีการศึกษา 2568
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

A STUDY OF MATTHAYOMSUKSA 3 STUDENTS' GEOMETRIC REASONING
BASED ON THE CONCEPTS OF GUTIERREZ & JAIME



ARAN EKACHAIRUNGROJN

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of MASTER OF EDUCATION
(Mathematics)

Faculty of Science, Srinakharinwirot University

2025

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตามแนวคิดของ GUTIERREZ และ JAIME

ของ

อรัญย์ เอกชัยรุ่งโรจน์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

..... ที่ปรึกษาหลัก ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพ็ญชัย) (รองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์ศรีมี เพ็ญฟู)

..... ที่ปรึกษาร่วม กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสถาและ) (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณานิน กองทิพย์)

ชื่อเรื่อง	การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ GUTIERREZ และ JAIME
ผู้วิจัย	อรัญญ์ เอกชัยรุ่งโรจน์
ปริญญา	การศึกษามหาบัณฑิต
ปีการศึกษา	2568
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ขวัญ เพียชัย
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสระและ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ การวิจัยครั้งนี้เก็บรวบรวมข้อมูลจากการถอดโปรโตคอล บันทึกเสียงการสัมภาษณ์ และทำการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวิเคราะห์โปรโตคอลตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ซึ่งแบ่งเป็น 4 ด้าน ได้แก่ 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง 2) ด้านบทนิยาม 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ และ 4) ด้านการพิสูจน์ กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 9 คน ซึ่งแบ่งเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน และต่ำ 3 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ งานปฏิบัติ แบบสัมภาษณ์ และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ ผลการวิจัยพบว่า 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง มีนักเรียน 9 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 3 คน) แสดงการให้เหตุผลทั้งในระดับที่ 1 และ 2 กล่าวคือ ในระดับที่ 1 นักเรียนจำแนกประเภทรูปเรขาคณิตโดยการใช้อ้างอิงจากลักษณะภายนอกของรูป และในระดับที่ 2 นักเรียนจำแนกประเภทรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากบทนิยามหรือหลักการทางเรขาคณิตที่เคยเรียนมา เช่น การพิจารณาจำนวนด้าน จำนวนมุม หรือการเป็นรูปปิด เป็นต้น 2) ด้านบทนิยาม ในที่นี้แบ่งเป็น 2 ด้านย่อย ได้แก่ ด้านการใช้บทนิยาม และด้านกำหนดบทนิยาม โดยด้านการใช้บทนิยาม มีนักเรียน 2 คน (กลุ่มต่ำ) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่ขาดการสรุปผลที่สมเหตุสมผล และมีนักเรียน 8 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสรุปผลที่สมเหตุสมผล และมีนักเรียน 1 คน (กลุ่มสูง) ที่ไม่อยู่ในระดับเลย เพราะว่าตีความโจทย์ผิด ส่วนด้านกำหนดบทนิยาม มีนักเรียน 8 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 กล่าวคือ นักเรียนกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยาม ทฤษฎีบท การลากเส้น และการวัดความยาว มีนักเรียน 3 คน (กลุ่มสูง 2 คน ปานกลาง 1 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยาม ทฤษฎีบท การลากเส้น และการวัดความยาว และมีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว และมีนักเรียน 7 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 2 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสรุปผลอย่างสมเหตุสมผล 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ มีนักเรียน 1 คน (กลุ่มต่ำ) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 1 กล่าวคือ นักเรียนจัดหมวดหมู่โดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป มีนักเรียน 6 คน (กลุ่มปานกลาง 3 คน ต่ำ 3 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 กล่าวคือ นักเรียนอธิบายความเหมือนและความต่างของรูปโดยพิจารณาเส้นทแยงมุมที่ตนเองสร้างขึ้น จากนั้นพิจารณาความเป็นมุมฉากโดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และมีนักเรียน 4 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 1 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนอธิบายความเหมือนและความต่างของรูปโดยพิจารณาเส้นทแยงมุมที่ตนเองสร้างขึ้น และพิจารณาความเป็นมุมฉากโดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งแสดงการพิสูจน์เกี่ยวกับสมบัติทางเรขาคณิตแบบขั้นตอนเดียว 4) ด้านการพิสูจน์ มีนักเรียน 4 คน (กลุ่มปานกลาง 2 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ มีนักเรียน 8 คน (กลุ่มสูง 3 คน ปานกลาง 3 คน ต่ำ 2 คน) แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 กล่าวคือ นักเรียนพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยมีการอ้างอิงทฤษฎีบท บทนิยาม หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และได้ผลสรุปตามที่ต้องการ และมีนักเรียน 2 คน (กลุ่มต่ำ) ที่ไม่อยู่ในระดับเลย เพราะว่าแสดงการพิสูจน์ไม่สมเหตุสมผล

คำสำคัญ : การให้เหตุผลทางเรขาคณิต, แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime, รูปสามเหลี่ยม, รูปสี่เหลี่ยม

Title	A STUDY OF MATTHAYOMSUKSA 3 STUDENTS' GEOMETRIC REASONING BASED ON THE CONCEPTS OF GUTIERREZ & JAIME
Author	ARAN EKACHAIRUNGROJN
Degree	MASTER OF EDUCATION
Academic Year	2025
Thesis Advisor	Assistant Professor Dr. Khawn Piasai
Co Advisor	Assistant Professor Dr. Sukanya Hajisalah

This research aims to investigate the geometric reasoning of Grade 9 students with high, medium, and low academic achievement in mathematics, specifically focusing on the reasoning of triangles and quadrilaterals, based on Gutierrez and Jaime's framework. A qualitative research methodology was employed, with data collected through transcribed audio recordings of interviews. The data were analyzed using protocol analysis according to Gutierrez and Jaime's framework, which categorizes reasoning into 4 aspects: 1) recognition, 2) definitions, 3) classification, and 4) proof. The target group consisted of 9 Grade 9 students from the Demonstration School of Phranakhon Si Ayutthaya Rajabhat University (Secondary Section), divided into 3 groups: 3 high-achieving, 3 medium-achieving, and 3 low-achieving students. The research instruments included practical tasks, interview forms, and interview transcripts. The findings revealed the following: 1) Recognition: All 9 students (3 high, 3 medium, 3 low) demonstrated reasoning at Levels 1 and 2. At Level 1, students classified geometric shapes based on external characteristics. At Level 2, students classified shapes by considering definitions or geometric principles they had learned, such as the number of sides, angles, or whether the shape is closed. 2) Definitions: This aspect was divided into 2 sub-aspects: use of definitions and establishment of definitions. For the use of definitions, 2 students (low-achieving) exhibited Level 3 reasoning, proving with a single step by referring to theorems, definitions, or given conditions but lacking logical conclusions. 8 students (3 high, 3 medium, 2 low) demonstrated Level 4 reasoning, proving with multiple steps by referring to theorems, definitions, or given conditions and reaching logical conclusions. 1 student (high-achieving) did not meet any level due to misinterpreting the problem. For the establishment of definitions, 8 students (3 high, 3 medium, 2 low) showed Level 2 reasoning, defining shapes based on definitions, theorems, line construction, and measurement. 3 students (2 high, 1 medium) exhibited Level 3 reasoning, defining shapes based on definitions, theorems, line construction, and measurement with single-step proofs. 7 students (3 high, 2 medium, 2 low) demonstrated Level 4 reasoning, proving with multiple steps by referring to theorems, definitions, or given conditions and reaching logical conclusions. 3) Classification: 1 student (low-achieving) showed Level 1 reasoning, classifying shapes based on external characteristics. 6 students (3 medium, 3 low) exhibited Level 2 reasoning, explaining similarities and differences of shapes by considering self-constructed diagonals and right angles using relevant theorems. 4 students (3 high, 1 medium) demonstrated Level 3 reasoning, explaining similarities and differences of shapes by considering self-constructed diagonals and right angles using relevant theorems, along with single-step proofs of geometric properties. 4) Proof: 4 students (2 medium, 2 low) showed Level 3 reasoning, proving with a single step by referring to theorems, definitions, or given conditions. Eight students (3 high, 3 medium, 2 low) demonstrated Level 4 reasoning, proving with multiple steps by referring to theorems, definitions, or given conditions and achieving the desired conclusions. 2 students (low-achieving) did not meet any level due to illogical proofs.

Keyword : Geometric reasoning, The concepts of GUTIERREZ & JAIME, Triangle, Quadrilateral

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยดีเป็นเพราะผู้วิจัยได้รับความกรุณาอย่างยิ่งจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพ็ญชัย อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์หลัก และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสถาและ อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ร่วม ที่สละเวลาในการอ่านงานวิจัยอย่างละเอียดเพื่อให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะในการปรับปรุงงานวิจัยให้มีความสมบูรณ์และชัดเจนยิ่งขึ้นตลอดจนให้ความช่วยเหลือในการให้กำลังใจกับผู้วิจัย ในทุกครั้งที่รู้สึกท้อแท้หรือมีปัญหา อาจารย์ทั้ง 2 ท่านก็ยังคงให้กำลังใจ ให้ความเมตตา ทุ่มเทเอาใจใส่ต่อผู้วิจัยให้สามารถเรียนจบได้ ผู้วิจัยรู้สึกทราบบ้างในความเมตตาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์ศรีศรัศม์ เพื่อองฟู ที่ให้ความกรุณาเป็นประธานกรรมการสอบปากเปล่า ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณานิน กองทิพย์ ที่สละเวลาและให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบปากเปล่า ทั้ง 2 ท่านนี้ได้ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงงานวิจัยเล่มนี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอนก จันทร์จตุรญ และนางสาวพัชรภรณ์ ไวยเดช ที่สละเวลาและให้ความกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการพัฒนาเครื่องมือวิจัย พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา (ฝ่ายมัธยม) คณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ฝ่ายมัธยม ที่ได้ให้ความช่วยเหลือในการเก็บข้อมูลวิจัยครั้งนี้ รวมถึงนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา (ฝ่ายมัธยม) ทุกคนที่ได้ให้ความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัยเป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ ดร.ศิริรัตน์ ชาวนา ที่ให้คำแนะนำกับผู้วิจัยตั้งแต่การสมัครเรียนในระดับปริญญาโทที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒตลอดจนสำเร็จการศึกษา รวมถึงอาจารย์สุพินดา เพชรา ที่เป็นผู้ให้ความช่วยเหลือในการเก็บรวบรวมและวิเคราะห์ข้อมูลสำหรับการวิจัย ผู้วิจัยรู้สึกทราบบ้างในความเมตตาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณานิน กองทิพย์ อีกครั้งในการติดตามงานวิจัย ให้คำแนะนำและให้กำลังใจกับผู้วิจัยในทุกครั้งที่ผู้วิจัยเจอปัญหา เอาใจใส่กับผู้วิจัยจนทำให้เกิดเป็นปริญญานิพนธ์เล่มนี้ ผู้วิจัยรู้สึกทราบบ้างในความเมตตาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ พี่ ๆ นิสิตในระดับบัณฑิตศึกษาในการให้คำปรึกษาในด้านต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น ด้านการทำเอกสารประกอบการวิจัย และการทำเอกสารเพื่อเสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย

ขอขอบคุณอาจารย์ทุกท่านในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับผู้วิจัย และให้คำแนะนำตลอดการทำปริญญานิพนธ์เล่มนี้

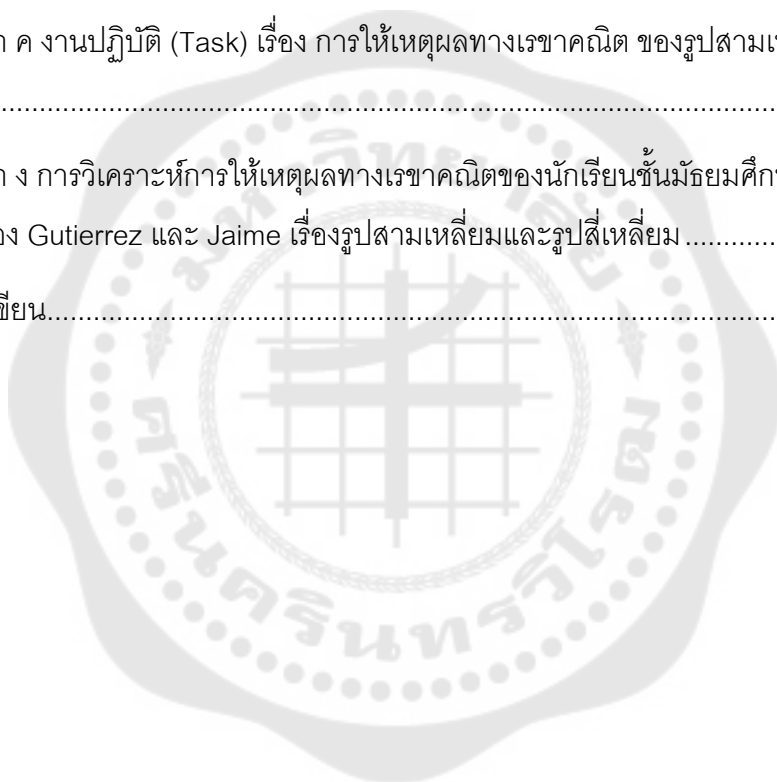
อรุณย์ เอกชัยรุ่งโรจน์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญรูปภาพ	ฐ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง	1
คำถามการวิจัย.....	5
ความมุ่งหมายของการวิจัย	5
ความสำคัญของการวิจัย	5
ขอบเขตของการวิจัย	5
นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย	5
นักเรียนเป้าหมาย.....	6
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	6
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	7
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	7
กรอบแนวคิดการวิจัย	10
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
1. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	12
1.1 การคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Van Hiele	12

1.2 ทักษะทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Alan Hoffer	16
1.3 การคิดอย่างมีลำดับขั้นตามทฤษฎีบท Van Hiele ของ De Villiers.....	19
1.4 การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	20
1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	33
2. ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ	35
2.1 การวิจัยเชิงคุณภาพ	35
2.2 งานวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษาที่เกี่ยวข้อง	47
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย.....	51
ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย	57
ระยะที่ 1 กำหนดกรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิด Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	58
ระยะที่ 2 สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	65
ระยะที่ 3 ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime.....	67
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	74
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	76
1. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มสูง	77
2. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มปานกลาง	138
3. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มต่ำ	201
บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	254

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย	255
ข้อเสนอแนะจากการวิจัย.....	272
บรรณานุกรม	274
ภาคผนวก.....	277
ภาคผนวก ก รายนามผู้เชี่ยวชาญ.....	278
ภาคผนวก ข การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย	280
ภาคผนวก ค งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	291
ภาคผนวก ง การวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	306
ประวัติผู้เขียน.....	418



สารบัญตาราง

หน้า

ตาราง 1 กรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	10
ตาราง 2 กรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime (1998)	24
ตาราง 3 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 1 การตระหนักรูปร่าง.....	25
ตาราง 4 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 2.1 การใช้บทนิยาม.....	27
ตาราง 5 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 2.2 การกำหนดบทนิยาม	29
ตาราง 6 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 3 การจัดหมวดหมู่.....	30
ตาราง 7 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 4 การพิสูจน์.....	32
ตาราง 8 วิธีการและขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย	52
ตาราง 9 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง	61
ตาราง 10 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม	62
ตาราง 11 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม	62
ตาราง 12 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่	63

ตาราง 13 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์.....	64
ตาราง 14 แสดงผลการวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ของการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	68
ตาราง 15 ผลการวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย	69
ตาราง 16 รายละเอียดของนักเรียนเป้าหมาย 9 คนเพื่อทำการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task-base interview).....	72
ตาราง 17 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของบันปัน	77
ตาราง 18 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของโฟกัส.....	96
ตาราง 19 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของเจเจ.....	117
ตาราง 20 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของวิวิโกะ.....	138
ตาราง 21 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของโต.....	159
ตาราง 22 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของอิงค์.....	179
ตาราง 23 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของกัปตัน.....	201
ตาราง 24 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของเกรซ	218
ตาราง 25 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของต้นข้าว.....	236

ตาราง 26 งานปฏิบัติ (Task) เรื่องการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	281
--	-----



สารบัญรูปรภาพ

หน้า

[illegible]

[illegible]

ภาพประกอบ 52 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 1 ของเกรซ	408
ภาพประกอบ 53 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 2 ของตันข้าว	410
ภาพประกอบ 54 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 2 ของกัปตัน	412
ภาพประกอบ 55 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 3 ของเกรท	414
ภาพประกอบ 56 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 3 ของกัปตัน	416



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

เรขาคณิตเกิดขึ้นในอียิปต์โบราณเมื่อประมาณ 700 ปี ก่อนคริสต์ศักราช ชาวอียิปต์และชาวบาบิโลนต่างสนใจเรขาคณิตในการนำไปใช้ประโยชน์ในการดำรงชีวิต เช่น การวัดพื้นที่ การสร้างที่อยู่อาศัย เป็นต้น ปัจจุบันความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กับสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวของมนุษย์ และมีความสำคัญต่อชีวิตมนุษย์เป็นอย่างมาก เราใช้เรขาคณิตเพื่อทำความเข้าใจหรืออธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว เช่น ใช้เรขาคณิตในการสำรวจพื้นที่ สร้างผังเมือง สร้างถนน สิ่งก่อสร้างต่าง ๆ การสำรวจโลก หรือใช้เรขาคณิตในทางการค้า เช่น บรรจุภัณฑ์ทรงต่าง ๆ ที่ใช้ บรรจุอาหาร นอกจากนี้เรขาคณิตยังช่วยพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ เช่น การคิด การให้เหตุผล การคิดสร้างสรรค์ ทักษะเชิงมิติสัมพันธ์ หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ เช่น จำนวน การวัด ตลอดจน เนื้อหาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป อีกทั้งเรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับความรู้แขนงอื่น ๆ อีกด้วย (Ferrini-Mundy, 2000; สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ, 2554; อัมพร ม้าคนอง, 2557)

การคิดทางเรขาคณิตเป็นทักษะและความสามารถทางสมองของมนุษย์ที่จะคิดใคร่ครวญหาเหตุผล และลงความเห็นด้วยการพิสูจน์ การคิดทางเรขาคณิตอาจเรียกตามลักษณะการคิดเฉพาะเรื่อง เฉพาะมโนทัศน์ เช่น การคิดเชิงปริภูมิ ซึ่งเป็นลักษณะการคิดว่าด้วยการใช้ปัญญาญาณ (intuition) เกี่ยวกับรูปเรขาคณิต และความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตเหล่านั้น นักเรียนตั้งแต่ระดับประถมศึกษาเป็นวัยเริ่มต้นที่ควรได้รับการฝึกฝนให้เป็นผู้มีการคิดทางเรขาคณิต ถึงกระนั้นสำหรับครูคณิตศาสตร์ก็ยังมีคำถามที่เกี่ยวข้องกับการคิดทางเรขาคณิตอยู่อีกหลายประเด็น ที่พบจากปัญหาของนักเรียนขณะเรียนเรขาคณิต เช่น นักเรียนรู้จักรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในเชิงบทนิยามแต่ไม่สามารถอธิบายสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ หรือนักเรียนบางคนไม่เข้าใจว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่างจากสี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างไร ในระดับที่สูงขึ้น นักเรียนส่วนใหญ่รู้และจำได้ว่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้เท่ากับหนึ่งร้อยแปดสิบองศา แต่ก็ไม่สามารถพิสูจน์และให้เหตุผลได้ว่า เพราะอะไรจึงเป็นเช่นนั้น จึงมีคำพูดตามมามีว่า “คิดไม่ออก” หรืออาจตอบว่า “พิสูจน์ไม่ได้” (วินัย คำสุวรรณ, 2558) ประเด็นที่อ้างถึงนี้ได้รับความสนใจจากนักการศึกษา โดยเฉพาะนักการศึกษาชาวดัตช์สองคน ได้แก่ Pierre van Hiele และ Dina Geldof-van Hiele ซึ่งทั้งสองเป็นคู่สามีและภรรยา มีอาชีพเป็นครูและศึกษาปริญญาเอกอยู่ที่มหาวิทยาลัย Utrecht

ประเทศเนเธอร์แลนด์ ทั้งสองได้สร้างโมเดลชื่อว่า “แวนฮีลีโมเดล” (Van Hiele model) เพื่อใช้แก้ปัญหาที่เกิดขึ้นดังกล่าวของนักเรียน ซึ่งโมเดลดังกล่าวเป็นแนวทางให้นักเรียนรู้จักการคิดแก้ปัญหา โดยการวิเคราะห์และการสื่อความหมายคำพูดของตนเอง Van Hiele ได้เผยแพร่งานวิจัยเป็นภาษาดัตช์ ในปี ค.ศ.1957 ในปีต่อมา Hans Freudenthal ได้นำผลงานของ Van Hiele ไปแปลเป็นภาษาอังกฤษ และในปี ค.ศ.1960 ประเทศรัสเซียได้นำแวนฮีลีโมเดล ไปใช้ในการปรับปรุงหลักสูตรวิชาเรขาคณิต และในปี ค.ศ.1976 Issaak Wirszup ได้เขียนบทความบรรยายเกี่ยวกับแวนฮีลีโมเดล โดยเขาเชื่อว่าแวนฮีลีโมเดลสามารถนำไปปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นได้ นอกจากนี้มีนักการศึกษาชาวอเมริกันได้ให้ความสนใจเกี่ยวกับแวนฮีลีโมเดลเพราะเชื่อว่าแวนฮีลีโมเดลจะช่วยแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตได้ แวนฮีลีโมเดลเป็นการศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตโดยแบ่งออกเป็น 5 ระดับ โดยเริ่มตั้งแต่ระดับกระบวนการคิดจากง่ายไปยาก ได้แก่ ระดับ 0 หรือขั้นพื้นฐาน: การมองเห็น (Visualization) ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกชื่อของรูปภาพที่มองเห็นแต่ไม่สามารถบอกลักษณะส่วนย่อยได้ ระดับ 1: การวิเคราะห์ (Analysis) ในระดับนี้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐาน และนักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ ระดับ 2: การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deductive) ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูป ทรงต่าง ๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องได้ โดยลักษณะที่พบได้บ่อยของนักเรียนในระดับนี้คือการใช้คำว่า “ผมเข้าใจ แต่ไม่สามารถอธิบายได้” ระดับ 3: การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deductive) ในระดับนี้นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์คุ้นเคยกับการพิสูจน์ โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ นักเรียนรู้จักการตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล ทราบว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นไปได้อย่างไร นักเรียนอาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้มากกว่า 1 วิธี และระดับ 4: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) ในระดับนี้นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่าง ๆ เช่น การเปรียบเทียบสัจพจน์ ทฤษฎี และเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด (Non-Euclidean Geometry) นักเรียนสามารถจัดทฤษฎีต่าง ๆ เข้าเป็นระบบระเบียบ และสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ ทางเรขาคณิตได้ โดยงานวิจัยของ Van Hiele ได้กล่าวถึงระดับ 4 ซึ่งเป็นระดับสุดท้ายเพียงเล็กน้อย และในหลักสูตรการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิตของระดับมัธยมศึกษาชั้นจะครอบคลุมถึงระดับ 3 เท่านั้น คือ การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (สิริพร ทิพย์คง, 2532)

ในปี ค.ศ. 1981 Alan Hoffer ได้นำแนวนีลโมเดลมาพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดจากผลการสำรวจของมหาวิทยาลัย Oregon เกี่ยวกับหัวข้อคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาที่นักศึกษาชั้นปีที่ 1 ในทุก ๆ ปีการศึกษาชอบมากที่สุดและไม่ชอบมากที่สุด พบว่า วิชาที่ทุกคนไม่ชอบมากที่สุดคือวิชาเรขาคณิตและมีนักศึกษาบางคน que เรียนได้ดีในด้านพีชคณิตแต่ไม่ชอบด้านเรขาคณิตเนื่องจากเนื้อหาเรขาคณิตเน้นการพิสูจน์ตลอดทั้งปี นักศึกษาบางส่วนขาดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์แต่อาศัยการท่องจำ Alan Hoffer ปรับปรุงและพัฒนาแนวนีลโมเดลโดยแบ่งแนวนีลโมเดลใหม่เป็น 5 ระดับ ได้แก่ ระดับ 1: การรู้จักรูปร่าง (Recognition) ระดับนี้นักเรียนรู้จักรูปเรขาคณิตจากรูปร่างหรือลักษณะภายนอกแต่ไม่รู้จักหรือไม่สามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตนั้นได้ (ตรงกับระดับ 0 ของแนวนีลโมเดล) ระดับ 2: การวิเคราะห์ (Analysis) ระดับนี้นักเรียนวิเคราะห์และบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ (ตรงกับระดับ 1 ของแนวนีลโมเดล) ระดับ 3: การเรียงลำดับ (Ordering) ระดับนี้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตกับบทนิยามหรือสมบัติของรูปเรขาคณิตนั้น (ตรงกับระดับ 2 ของแนวนีลโมเดล) ระดับ 4: การพิสูจน์ (Deduction) ระดับนี้นักเรียนเข้าใจการพิสูจน์ สัญลักษณ์ สัจพจน์ บทนิยาม ทฤษฎีบทและรูปแบบของการพิสูจน์ (ตรงกับระดับ 3 ของแนวนีลโมเดล) และระดับ 5: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) ระดับนี้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของระบบเรขาคณิต (ตรงกับระดับ 4 ของแนวนีลโมเดล) และในแต่ละระดับ Alan Hoffer ได้กำหนดทักษะ 5 ทักษะที่สอดคล้องกับระดับทั้ง 5 เพื่อใช้ในการประเมินทักษะทางเรขาคณิต ได้แก่ 1) ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) 2) ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) 3) ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) 4) ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) และ 5) ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) (Hoffer, 1981)

ต่อมาในปี ค.ศ. 1987 De Villiers ได้นำแนวนีลโมเดลที่ถูกพัฒนาโดย Alan Hoffer ดังที่กล่าวข้างต้นมาพัฒนาต่อ โดยเขาได้แบ่งแนวนีลโมเดลเป็น 5 ระดับเช่นเดียวกับ Alan Hoffer แต่ประเด็นที่แตกต่างจากของ Alan Hoffer คือ De Villiers ได้เพิ่มประเด็นเกี่ยวกับประเภทของการคิดทางเรขาคณิตซึ่งเขาได้แบ่งออกเป็น 6 ประเภท ได้แก่ 1) การรู้จักรูปร่างและสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงรูปเรขาคณิต (Recognition and represent of figure-types) 2) ความเข้าใจและการใช้คำจำกัดความได้อย่างถูกต้อง (Use and understanding of terminology) 3) การบรรยายลักษณะของรูปเรขาคณิต (Verbal description of properties of figure-types) 4) การจำแนกประเภทตามลำดับชั้น (Hierarchical classification) 5) การพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว (One step deduction) และ 6) การพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน (Longer deduction) (Villiers, 1987) หลังจากนั้นในปี ค.ศ.1998 Gutierrez และ Jaime ได้ทำการประเมินระดับ Van Hiele ที่เกี่ยวข้องกับการ

ให้เหตุผล กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ถึง 8 (อายุ 11 – 14 ปี) และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง 4 (อายุ 14 – 18 ปี) รวมทั้งหมด 309 คน โดยการวิจัยของ Gutierrez และ Jaime พิจารณาแวนฮีลีโมเดลเพียง 4 ระดับ คือ ระดับ 1 ถึง 4 (ตรงระดับ 0 ถึง 3 ตามแวนฮีลีโมเดลแบบดั้งเดิม) โดยทั้งสองคนไม่นำระดับสุดท้าย (ระดับ 5) มาใช้ในการพิจารณา เนื่องจากคำอธิบายของระดับนี้ยังขาดความชัดเจนและไม่ส่งผลต่อการเรียนรู้ของนักเรียนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา ซึ่งหัวข้อหรือประเด็นที่ Gutierrez และ Jaime นำมาใช้ในการพิจารณาเกี่ยวกับการประเมินระดับ Van Hiele ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผล ได้แก่ ประเภทของการคิดทางเรขาคณิต 6 ประเภทของ De Villiers ดังที่กล่าวข้างต้น และทักษะทางเรขาคณิตทั้ง 5 ของ Alan Hoffer ซึ่งประกอบด้วย ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) และทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) เมื่อนำแนวคิดทั้งสอง (ประเภทของการคิดทางเรขาคณิต และทักษะทางเรขาคณิต) มาบูรณาการกันทำให้ได้หัวข้อหรือประเด็นที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตใหม่ 4 ด้าน ได้แก่ 1) การตระหนักรูปร่าง 2) บทนิยาม 3) การจัดหมวดหมู่ และ 4) การพิสูจน์ (Gutiérrez & Jaime, 1998)

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าแวนฮีลีโมเดลเป็นเรื่องที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากทั้งในมิติที่เกี่ยวกับการช่วยการเรียนรู้และพัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน และจากข้างต้นจะเห็นถึงการพัฒนาของแวนฮีลีโมเดลของนักการศึกษาอย่างต่อเนื่องโดยเริ่มตั้งแต่ Pierre van Hiele และ Dina Geldof-van Hiele ซึ่งเป็นสามีภรรยาชาวดัชต์สองคนได้ดำเนินการสร้างและพัฒนาแวนฮีลีโมเดลในยุคแรก ๆ ต่อมา Alan Hoffer และ De Villiers ก็ได้พัฒนาและเพิ่มประเด็นต่าง ๆ ที่น่าสนใจเกี่ยวกับแวนฮีลีโมเดล จนถึงยุคของ Gutierrez และ Jaime ทั้งสองท่านได้ทำการประเมินระดับแวนฮีลีที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผล สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยใช้กรอบแนวคิดการวิจัยตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยจะใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ ซึ่งผลการวิจัยในครั้งนี้จะทำให้ทราบการให้ เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ข้างต้น นอกจากนี้ผลจากการวิจัยสามารถนำไปใช้เป็นข้อมูลให้แก่บุคลากรที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อจะได้กำหนดแนวทางและวางแผนการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตให้เหมาะสมและสอดคล้องกับความสามารถของนักเรียนต่อไป

คำถามการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มสูง ปานกลางและต่ำจะมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อย่างไร

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ
2. โรงเรียนสามารถใช้ผลการวิจัยในครั้งนี้เป็นข้อมูลเพื่อประกอบการพิจารณาปรับปรุงและพัฒนาหลักสูตรสถานศึกษาให้มีความเหมาะสมกับผู้เรียน
3. เป็นข้อมูลให้กับผู้สอนในการออกแบบการจัดการเรียนรู้เรื่องการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่สอดคล้องกับความสามารถของผู้เรียนเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ
4. เป็นแนวทางให้กับครูผู้สอนหรือผู้ที่สนใจที่ต้องการทำวิจัยเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ของนักเรียนในระดับชั้นอื่น ๆ หรือเนื้อเรขาคณิตอื่น ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา (ฝ่ายมัธยม) จังหวัดพระนครศรีอยุธยา จำนวน 40 คน คัดเลือกโดยการเลือกแบบเจาะจง โดยการนำผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม มาจัดเรียงคะแนนจากน้อยไปหามากและแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วย นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ โดยมีเกณฑ์ในการแบ่งนักเรียน ดังนี้ นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่สูงกว่า 66 นักเรียน

กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์สูงกว่า 33 แต่ไม่เกิน 66 และนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ไม่เกิน 33

นักเรียนเป้าหมาย คือ นักเรียนจำนวน 9 คน ซึ่งเป็นนักเรียนตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน ที่ถูกคัดเลือกมาจากนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย เพื่อศึกษาข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินการวิจัยออกเป็น 3 ระยะ ได้แก่

ระยะที่ 1 กำหนดกรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ศึกษา วิเคราะห์ หลักสูตรและเนื้อหาคณิตศาสตร์ของสถานศึกษา ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แล้วประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของกรอบแนวคิดที่ใช้ในการวิจัย

ระยะที่ 2 สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แบบสัมภาษณ์โดยใช้งานเป็นฐาน (Task – base interview form) และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ โดยนำเครื่องมือดังกล่าวเข้าการประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) เพื่อพิจารณาความเหมาะสม

ระยะที่ 3 ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ทั้ง 4 ด้าน โดยระยะนี้จะแบ่งนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 40 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วย นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ ซึ่งพิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของสถานศึกษา จากนั้นให้นักเรียนทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แล้วหานักเรียนเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน ซึ่งการหานักเรียนตัวแทนของแต่ละกลุ่มดังกล่าวนี้จะพิจารณาจากผลการทำงานปฏิบัติ (Task) ของนักเรียนและข้อมูลของนักเรียนจากครูผู้สอน รวมทั้งความยินยอมของนักเรียน แล้วจึงนำนักเรียนทั้ง 9 คนที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มไปดำเนินการสัมภาษณ์แบบใช้งานเป็นฐาน (Task – base interview)

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ ได้แก่ การให้เหตุผลทางเรขาคณิตเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามหลักสูตรของโรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา (ฝ่ายมัธยม)

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime หมายถึง การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารเพื่อใช้ประกอบการอธิบายหาข้อสรุปของคำถามที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งประกอบด้วย 4 ด้าน ได้แก่ 1) การตระหนักรูปร่าง 2) บทนิยาม 3) การจัดหมวดหมู่ และ 4) การพิสูจน์ ซึ่งแต่ละด้านมีรายละเอียดดังนี้

1.1) การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการตระหนักรูปร่าง (Recognition) หมายถึง การรู้จักประเภท องค์ประกอบและสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต โดยแบ่งออกเป็น 2 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกหรือองค์ประกอบภายนอก

ระดับที่ 2: การพิจารณาจากสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยม

1.2) การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านบทนิยาม (Definition) หมายถึง การกำหนดสมบัติและการนำสมบัติ ข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ไปใช้ในการให้เหตุผลและการสร้างข้อสรุป โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1.2.1) ประเภทการใช้บทนิยาม (Use of definitions) หมายถึง การพิจารณาเงื่อนไขหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วนำสมบัติ ข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท มาใช้ในการให้เหตุผล โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2: การใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการยกตัวอย่างประกอบ เพื่อแสดงสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระดับที่ 3: การใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว เพื่อแสดงสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระดับที่ 4: การแสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้ หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา โดยการแสดงความเท่ากันทุกประการหรือพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

1.2.2) ประเภหากำหนดบทนิยาม (Formulation of definitions) หมายถึง การนำลักษณะภายนอก สมบัติทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการกำหนดบทนิยาม โดยแบ่งออกเป็น 4 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การระบุลักษณะภายนอกที่เกี่ยวข้อง หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก

ระดับที่ 2: การระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ระดับที่ 3: การจัดกลุ่มของสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและเพียงพอ หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในการกำหนดสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอกับรูปที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนเกี่ยวกับสมบัติที่ได้

ระดับที่ 4: การพิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามได้ หมายถึง การนำบทนิยามและทฤษฎีบทมาใช้ในการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยการแสดงความเท่ากันทุกประการ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ถาม

1.3) การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการจัดหมวดหมู่ (Classification) หมายถึง การจำแนกหรือจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต โดยใช้ลักษณะภายนอกหรือสมบัติในการจัดหมวดหมู่ เพื่อแสดงความเหมือนและความแตกต่างกัน โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การจำแนกโดยลักษณะเฉพาะภายนอก หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างกันของรูปที่กำหนดให้แต่ละรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก

ระดับที่ 2: การจำแนกโดยสมบัติเฉพาะทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างกันของรูปที่กำหนดแต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง การวัดขนาดของด้านหรือมุมแล้วนำมาสรุป

ระดับที่ 3: การอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่ม หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างของรูปที่กำหนดให้แต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในการระบุสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอกับรูปที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนเกี่ยวกับสมบัติที่ได้

1.4) การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการพิสูจน์ (Proof) หมายถึง การใช้คุณสมบัติ สัจพจน์ ทฤษฎีบทและบทนิยาม เพื่ออธิบายหรือแสดงให้เห็นว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง โดย แบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2: การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ หมายถึง การให้เหตุผลโดยการแสดงตัวอย่างที่มีความใกล้เคียงกับสิ่งที่ต้องการพิสูจน์เพื่อให้เกิดความสมเหตุสมผล

ระดับที่ 3: การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบท และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว เพื่อให้สอดคล้องสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และเกิดความสมเหตุสมผล

ระดับที่ 4: การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน หมายถึง โดยการนำบทนิยาม ทฤษฎีบท และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการแสดงความเท่ากันทุกประการ หรือการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน เพื่อให้สอดคล้องสิ่งที่ต้องการพิสูจน์และเกิดความสมเหตุสมผล

2. งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม หมายถึง เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการวิจัยนี้ งานปฏิบัติ (Task) เป็นคำถามเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม จำนวน 15 ข้อ เพื่อใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึก งานปฏิบัติ (Task) แต่ละข้อสร้างตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime โดย แบ่งออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการตระหนักรูปร่าง จำนวน 3 ข้อ การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านบทนิยาม จำนวน 6 ข้อ การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการจัดหมวดหมู่ จำนวน 3 ข้อ และการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อ

กรอบแนวคิดการวิจัย

ตาราง 1 กรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 4
การตระหนักรูปร่าง	พิจารณาจาก ลักษณะ ภายนอก	พิจารณาจาก สมบัติทาง คณิตศาสตร์		
การใช้ บทนิยาม		ใช้บทนิยามที่มี โครงสร้างอย่าง ง่าย	ใช้บทนิยามที่มี ความซับซ้อน	แสดง ความสัมพันธ์ ของบทนิยามที่ ใช้
การกำหนด บทนิยาม	ระบุลักษณะ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	ระบุสมบัติทาง คณิตศาสตร์	จัดกลุ่มของสมบัติ ทางคณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้
การจัด หมวดหมู่	จำแนกโดย ลักษณะเฉพาะ ภายนอก	จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	
การพิสูจน์		พิสูจน์โดยการ ยกตัวอย่าง ประกอบ	พิสูจน์อย่างไม่เป็น แบบแผน	พิสูจน์อย่างมี แบบแผน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime
 - 1.1 การคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Van Hiele
 - 1.2 ทักษะทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Alan Hoffer
 - 1.3 การคิดอย่างมีลำดับขั้นตามทฤษฎีบท Van Hiele ของ De Villiers
 - 1.4 การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime
 - 1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime
2. ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษา
 - 2.1 การวิจัยเชิงคุณภาพ
 - 2.2 งานวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษาที่เกี่ยวข้อง

1. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime

เนื่องจากการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime มีความเกี่ยวข้องกับ 3 หัวข้อ ได้แก่

- 1) การคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Van Hiele
- 2) ทักษะทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Alan Hoffer
- 3) การคิดอย่างมีลำดับขั้นตามทฤษฎีบท Van Hiele ของ De Villiers

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะกล่าวถึง 3 หัวข้อข้างต้น ก่อนจะกล่าวถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของกลูเธอร์สและเจมี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1.1 การคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Van Hiele

Hiele (1988) กล่าวว่า ในช่วงปี ค.ศ.1930 ถึง 1950 นักคณิตศาสตร์ศึกษาและนักจิตวิทยาชาวไซเวียตหลายคนได้พยายามหาสาเหตุและแนวทางในการแก้ปัญหาของนักเรียนหลาย ๆ คนที่ประสบปัญหาในการเรียนวิชาเรขาคณิตของชั้นมัธยมศึกษาที่โดยเฉพาะเรื่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ต่อมาได้มีการนำแวนฮิลีโมเดลมาใช้ในการปรับปรุงการสอนเรขาคณิตของครูในโรงเรียนและขยายไปสู่การปรับปรุงหลักสูตรเรขาคณิตของสหภาพสาธารณรัฐสังคมนิยมไซเวียต โดยใช้ระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลีเนื่องจากงานวิจัยของแวนฮิลีมุ่งเน้นไปที่การศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนและการพัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน เนื่องจากแวนฮิลีโมเดลได้ถูกสร้างขึ้นตามลักษณะการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน ซึ่งมีลักษณะที่สำคัญ คือ การที่นักเรียนมีระดับการคิดที่สูงขึ้น จะต้องผ่านการคิดที่อยู่ในระดับที่ต่ำกว่ามาก่อน โดยแวนฮิลีโมเดลได้ถูกแบ่งออกเป็น 5 ระดับ ดังนี้

1) ระดับ 0 หรือขั้นพื้นฐาน: การมองเห็น (Visualization) พฤติกรรมของนักเรียนในระดับนี้ คือ นักเรียนสามารถจำแนก ระบุนชื่อ เปรียบเทียบและดำเนินการเกี่ยวกับรูปหรือรูปทรงเรขาคณิตได้โดยใช้ลักษณะภายนอกที่ปรากฏ

ตัวอย่างพฤติกรรมในระดับพื้นฐาน (level 0) ประกอบด้วย

- 1.1) ระบุนชื่อของรูปร่างที่ปรากฏ
- 1.2) สร้าง วาดหรือคัดลอกรูปหรือรูปร่าง
- 1.3) กำหนดชื่อของรูปร่างเพื่อใช้สื่อความหมายได้อย่างเหมาะสม
- 1.4) เปรียบเทียบและแบ่งชนิดของรูปร่างที่ปรากฏ
- 1.5) บรรยายเกี่ยวกับรูปร่างที่ปรากฏ
- 1.6) ใช้การแก้ปัญหาที่คุ้นเคยกับรูปร่างที่แตกต่างกันโดยใช้สมบัติทั่วไป

1.7) จำแนกส่วนของรูปแต่ไม่ได้วิเคราะห์โดยใช้องค์ประกอบ ไม่ได้คิดเกี่ยวกับสมบัติในการจัดกลุ่มตามลักษณะของรูปร่าง ไม่ได้สรุปเกี่ยวกับรูปร่างหรือใช้ภาษาในการเชื่อมโยง

2) ระดับ 1: การวิเคราะห์ (Analysis) พฤติกรรมของนักเรียนในระดับนี้ คือ นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปทรงเรขาคณิตได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐานสามารถบอกคุณสมบัติของรูปเรขาคณิตได้

ตัวอย่างพฤติกรรมในระดับที่หนึ่ง (level 1) ประกอบด้วย

- 2.1) จำแนกและตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบกับรูปร่าง
- 2.2) ระลึกและใช้คำศัพท์ได้เหมาะสมสำหรับองค์ประกอบและความสัมพันธ์
- 2.3) เปรียบเทียบรูปหรือรูปเรขาคณิต 2 รูปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ขององค์ประกอบแบ่งกลุ่มของรูปจากสมบัติที่แตกต่างกันและรวบรวมตัวอย่างต่าง ๆ ที่นอกเหนือจากในชั้นเรียน
- 2.4) ตีความและใช้คำพูดที่อธิบายรูปหรือรูปเรขาคณิตในด้านของสมบัติและใช้คำจำกัดความที่ได้เพื่อนำไปสู่การวาดหรือสร้างรูป
- 2.5) การค้นพบคุณสมบัติของรูปที่จากการสังเกตและลงข้อสรุปสำหรับกลุ่มของรูปหรือรูปเรขาคณิตที่พบ
- 2.6) อธิบายกลุ่มของรูปร่าง (ตัวอย่าง เช่น รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน) หรือการบอกชื่อและสมบัติของรูปร่างที่กำหนดให้
- 2.7) จำแนกสมบัติที่ถูกใช้เป็นลักษณะเฉพาะของรูปกลุ่มหนึ่งแล้วถูกประยุกต์ในกลุ่มอื่น ๆ และเปรียบเทียบกลุ่มของรูปเรขาคณิตจากสมบัติของกลุ่มนั้น ๆ
- 2.8) ค้นพบสมบัติของกลุ่มรูปเรขาคณิตที่ไม่คุ้นเคย
- 2.9) แก้ปัญหาเรขาคณิตโดยการใช้สมบัติหรือวิธีการที่เหมาะสม
- 2.10) สร้างและใช้ลักษณะทั่วไปเกี่ยวกับสมบัติของรูปและใช้ภาษาในการเชื่อมโยง แต่ไม่อธิบายสมบัติที่ของรูปที่มีความสัมพันธ์กันภายใน ไม่สามารถสร้างและใช้บทนิยามที่เป็นทางการ ไม่อธิบายความสัมพันธ์กลุ่มย่อย ๆ ที่นอกเหนือจากการตรวจสอบโดยเฉพาะตัวอย่างของสมบัติที่กำหนดให้ ไม่พบเห็นความต้องการเพื่อพิสูจน์หรือการอธิบายเชิงตรรกะและไม่ใช้การเชื่อมโยงทางภาษาอย่างถูกต้อง

3) ระดับ 2: การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deductive) พฤติกรรมของนักเรียนในระดับนี้ คือ นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูปทรงต่าง ๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องได้ โดยลักษณะที่พบได้บ่อยของนักเรียนในระดับขั้นนี้คือการใช้คำว่า “ผมเข้าใจ แต่ไม่สามารถอธิบายได้”

ตัวอย่างพฤติกรรมในระดับที่สอง (level 2) ประกอบด้วย

3.1) ระบุชุดสมบัติที่แตกต่างกันซึ่งลักษณะเฉพาะในกลุ่มของรูปร่างอย่างเหมาะสม ระบุชุดของสมบัติที่ง่ายที่สุดซึ่งมีลักษณะเฉพาะ สร้างและใช้บทนิยามสำหรับกลุ่มของรูปร่าง

3.2) ให้ข้อโต้แย้งอย่างไม่เป็นทางการ (การใช้แผนภาพ, แยกกลุ่มออกจากกลุ่มที่รวมกัน) เช่น การสรุปโดยใช้ความสัมพันธ์เชิงตรรกะจากข้อมูลที่กำหนดให้ การค้นพบข้อสรุปใหม่โดยกระบวนการแบบนิรนัย การจัดกลุ่มของรูปร่าง การรวมและแบ่งกลุ่มของสมบัติที่แตกต่างกัน

3.3) ให้ข้อโต้แย้งเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการ

3.4) ให้การอธิบายมากกว่าหนึ่งแบบเพื่อพิสูจน์บางสิ่งและสรุปการอธิบายนี้โดยการแสดงโครงสร้างของความสัมพันธ์

3.5) การยอมรับความแตกต่างอย่างไม่เป็นทางการระหว่างรายการและสิ่งที่ตรงกันข้าม

3.6) ระบุและใช้ยุทธวิธีหรือให้เหตุผลเพื่อให้เข้าใจวิธีการแก้ปัญหา

3.7) จำแนกข้อพิสูจน์เชิงนิรนัยและวิธีการเข้าถึงปัญหาในรูปแบบนิรนัย

4) ระดับ 3: การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deductive) พฤติกรรมของนักเรียนในระดับนี้ คือ นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ ค้นเคยกับการพิสูจน์ โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้ และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ นักเรียนรู้จักการตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล ทราบดีว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นไปได้ได้อย่างไร นักเรียนอาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้มากกว่า 1 วิธี

ตัวอย่างพฤติกรรมในระดับที่สาม (level 3) ประกอบด้วย

4.1) ระบุสิ่งที่จำเป็นสำหรับบทนิยาม บทนิยามและสมมติฐานพื้นฐาน (ตัวอย่างเช่น สัจพจน์)

4.2) ระบุลักษณะเฉพาะของบทนิยามที่เป็นทางการและแสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้

4.3) พิสูจน์ความสัมพันธ์ของสัจพจน์ซึ่งถูกอธิบายอย่างเป็นทางการในระดับที่ 2

4.4) พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีบทและข้อความที่สัมพันธ์กัน

4.5) แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ภายในของทฤษฎีบท

4.6) เปรียบเทียบความเหมือนและความแตกต่างในการพิสูจน์ที่แตกต่างกันของทฤษฎีบท

4.7) พิจารณาผลของการเปลี่ยนแปลงบทนิยามเบื้องต้นหรือสัจพจน์ในลำดับเชิงตรรกะ

4.8) สร้างทฤษฎีบททั่วไปจากการรวบรวมทฤษฎีบทที่มีความแตกต่างและหลากหลายให้เป็นหนึ่งเดียว

4.9) สร้างการพิสูจน์จากชุดของสัจพจน์อย่างง่าย โดยใช้การให้เหตุผลประกอบ

4.10) ให้เหตุผลแบบนิรนัยอย่างเป็นทางการ(การพิสูจน์)แต่ไม่ได้ตรวจสอบสัจพจน์ที่นำมาใช้ด้วยตัวเองหรือเปรียบเทียบระบบของสัจพจน์

5) ระดับ 4: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) พฤติกรรมของนักเรียนในระดับนี้ คือ นักเรียนสามารถคิดอย่างเป็นนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่าง ๆ จัดระบบระเบียบ หรือสร้างทฤษฎีใหม่ได้

ตัวอย่างพฤติกรรมในระดับที่สี่ (level 4) ประกอบด้วย

5.1) สร้างทฤษฎีบทอย่างถูกต้องในระบบสัจพจน์ที่แตกต่างกัน (ตัวอย่างทฤษฎีรากฐานของเรขาคณิตวิธีกรของ Hilbert)

5.2) เปรียบเทียบระบบสัจพจน์ สัมรวจเกี่ยวกับการเปลี่ยนระบบสัจพจน์มีผลกระทบกับเรขาคณิตอย่างไร

5.3) สร้างความสอดคล้องกับชุดของสัจพจน์ ความเป็นอิสระของสัจพจน์และความสมมูลของชุดของสัจพจน์ที่แตกต่างกัน สร้างระบบสัจพจน์ใหม่สำหรับเรขาคณิต

5.4) สร้างวิธีการแบบทั่วไปสำหรับการแก้ปัญหาในชั้นเรียน

5.5) ค้นหาสำหรับบริบทที่กว้างขวางมากที่สุดซึ่งทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์/หลักการ เพื่อการประยุกต์ใช้

5.6) ศึกษาเนื้อหาที่เป็นตรรกะในเชิงลึกเพื่อพัฒนาความเข้าใจใหม่ ๆ อย่างถ่องแท้และการเข้าถึงข้อสรุปเชิงตรรกะ

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าแวนฮิลได้สร้างกรอบแนวคิดที่ใช้ในการศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน โดยเริ่มตั้งแต่ระดับกระบวนการคิดจากง่ายไปยากแบ่งออกเป็น 5 ระดับ ได้แก่ ระดับ 0 หรือขั้นพื้นฐาน: การมองเห็น (Visualization) ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกชื่อของรูปภาพที่มองเห็นแต่ไม่สามารถบอกลักษณะส่วนย่อยได้ ระดับ 1: การวิเคราะห์ (Analysis) ในระดับนี้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐาน และนักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ ระดับ 2: การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deductive) ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับ

สมบัติของรูป ทรงต่าง ๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องได้ โดยลักษณะที่พบได้บ่อยของนักเรียนในระดับนี้คือการใช้คำว่า “ผมเข้าใจ แต่ไม่สามารถอธิบายได้” ระดับ 3: การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deductive) ในระดับนี้นักเรียนสามารถเข้าใจ การพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ ค้นเคยกับการพิสูจน์ โดยทราบว่าจะอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้และอะไรคือสิ่งที่ ต้องการพิสูจน์ และระดับ 4: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) ในระดับนี้นักเรียนสามารถคิดอย่าง นามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่าง ๆ เช่น การเปรียบเทียบสัจพจน์ ทฤษฎี และเรขาคณิต นอกระบบยูคลิด (Non-Euclidean Geometry) เป็นต้น

1.2 ทักษะทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Alan Hoffer

Hoffer (1981) ในแต่ละปีการศึกษาของมหาวิทยาลัย Oregon ได้ทำการสำรวจความ คิดเห็นของนักศึกษาปีที่ 1 เกี่ยวกับหัวข้อในวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาที่ชอบมากที่สุด และไม่ชอบมากที่สุด พบว่า วิชาที่พวกเขาไม่ชอบมากที่สุดคือวิชาเรขาคณิต แม้แต่นักเรียนที่เรียน ได้ดีในวิชาพีชคณิต เนื่องจากมีเนื้อหาที่เน้นการพิสูจน์มากเกินไป บางส่วนขาดความรู้และ ความเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์ เน้นการท่องจำและการพิสูจน์ทฤษฎีมากกว่าการทำโจทย์ เรขาคณิต จากปัญหาดังกล่าวนี้นี้จึงได้มีการนำแนวคิดของฮิลโมเดลมาพัฒนาและแบ่งระดับการคิด ออกเป็น 5 ระดับ ตามแนวคิดของฮิลโมเดลพร้อมกำหนดทักษะ 5 ทักษะที่สอดคล้องกับระดับขั้นทั้ง 5 เพื่อใช้ในการประเมินทักษะทางเรขาคณิต ประกอบด้วย

ระดับขั้นที่ 1: การรู้จักรูปร่าง (Recognition) คือ นักเรียนรู้จักรูปร่างเรขาคณิตจากรูปร่างหรือ ลักษณะภายนอกแต่ไม่รู้จักหรือไม่สามารถบอกสมบัติของรูปร่างเรขาคณิตนั้นได้ (ซึ่งตรงกับระดับขั้น ที่ 0 ของแนวคิดของฮิลโมเดล)

ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ จำแนกรูปร่างที่แตกต่างกันและจำแนกประเภทของรูปร่างจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้

ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ เชื่อมโยงชื่อกับรูปร่างได้อย่างถูกต้องและตีความประโยคที่อธิบายเกี่ยวกับรูปร่างได้

ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ วาด ภาพจากประโยคที่แสดงส่วนต่าง ๆ ของรูปได้อย่างถูกต้อง

ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ เข้าใจความ เหมือนและความแตกต่างระหว่างรูป และเข้าใจส่วนที่สำคัญของรูปในจุดที่แตกต่างกัน

ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ จำแนกรูปร่างเรขาคณิตจากลักษณะภายนอก

ระดับขั้นที่ 2: การวิเคราะห์ (Analysis) คือ นักเรียนวิเคราะห์และบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ (ซึ่งตรงกับระดับขั้นที่ 1 ของแวนฮิลโมเดล)

ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ สังเกตสมบัติของรูปร่างและจำแนกตามคุณสมบัติของรูปออกเป็นกลุ่ม

ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ อธิบายสมบัติที่แตกต่างกันของรูปร่างได้อย่างถูกต้อง

ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ สร้างรูปจากข้อมูลหรือสมบัติที่กำหนดให้

ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ จัดกลุ่มของรูปจากประเภทที่มีความแตกต่างกันหรือพิจารณาจากสมบัติที่แตกต่างกันของรูป

ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ รู้จักสมบัติของรูปเรขาคณิตจากลักษณะภายนอกและทำสัญลักษณ์หรือเครื่องหมายบนรูปที่กำหนดให้

ระดับขั้นที่ 3: การเรียงลำดับ (Ordering) คือ นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตกับทฤษฎีหรือสมบัติของรูปเรขาคณิตนั้น (ซึ่งตรงกับระดับขั้นที่ 2 ของแวนฮิลโมเดล)

ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ รู้จักความสัมพันธ์และสมบัติที่แตกต่างกันของรูปแต่ละประเภท

ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ นิยามคำพูดที่สั้นและได้ใจความ กำหนดประโยคที่แสดงถึงความสัมพันธ์ภายในระหว่างรูป

ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ สร้างรูปที่เกี่ยวข้องกับรูปที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ เข้าใจสมบัติของทฤษฎีที่เหมาะสมและใช้สมบัติเพื่อพิจารณาประเภทของรูปร่าง

ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ เข้าใจแนวคิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงความสัมพันธ์ภายในของรูป

ระดับขั้นที่ 4: การพิสูจน์ (Deduction) คือ นักเรียนเข้าใจการพิสูจน์ สัญลักษณ์ สัจพจน์ ทฤษฎีบทและรูปแบบของการพิสูจน์ (ซึ่งตรงกับระดับขั้นที่ 3 ของแวนฮิลโมเดล)

ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ ใช้ข้อมูลเกี่ยวกับรูปที่กำหนดให้ในการสร้างข้อมูลเพิ่มเติม

ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ เข้าใจความแตกต่างของบทนิยาม สัจพจน์และทฤษฎีบท รู้จักสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องหาหรือต้องทำ

ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ รู้จักวิธีการนำส่วนประกอบของรูปไปใช้ได้อย่างเหมาะสม ลงข้อสรุปวิธีการวาดรูปหรือโครงสร้างที่มีความเฉพาะเจาะจงของรูปจากข้อมูลที่กำหนดให้

ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ ใช้กฎของตรรกะในการพัฒนาการพิสูจน์และสามารถลงข้อสรุปของผลลัพธ์ได้

ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ สามารถลงข้อสรุปของสมบัติของรูปจากข้อมูลหรือสิ่งที่กำหนดให้ สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

ระดับขั้นที่ 5: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) คือ นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของระบบเรขาคณิต (ซึ่งตรงกับระดับขั้นที่ 4 ของแวนฮิลโมเดล)

ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ รู้จักสมมติฐานที่ไม่ได้ถูกกำหนดจากการใช้รูปภาพ เข้าใจรูปที่เกี่ยวข้องกันในรูปแบบนิรนัยที่แตกต่างกัน

ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ ขยายผลลัพธ์ที่กำหนดให้ อธิบายในรูปแบบนิรนัยที่แตกต่างกัน

ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ เข้าใจข้อจำกัดและการใช้อุปกรณ์ในการวาดที่แสดงถึงแนวคิดที่ไม่เป็นมาตรฐานในรูปแบบนิรนัยที่แตกต่างกัน

ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ เข้าใจข้อจำกัดของการใช้สมมติฐานและสัจพจน์ รับรู้ว่าเมื่อใดที่สัจพจน์ไม่มีความเชื่อมโยงหรือสอดคล้องกันและเป็นหมวดหมู่

ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) นักเรียนในทักษะนี้จะมีพฤติกรรม คือ ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงระบบที่เป็นนามธรรม พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายลักษณะทางกายภาพ สังคมและปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า Alan Hoffer ได้ปรับปรุงและพัฒนาแวนฮิลโมเดลโดยแบ่งแวนฮิลโมเดลใหม่เป็น 5 ระดับ โดยเปลี่ยนจากระดับที่ 0 ถึง 4 เป็นระดับที่ 1 ถึง 5 และมีรายละเอียดของแต่ละระดับเหมือนแวนฮิลโมเดล แต่สิ่งที่แตกต่างจากแวนฮิลโมเดล คือ ในแต่ละระดับของ Alan Hoffer ได้กำหนดทักษะ 5 ทักษะที่สอดคล้องกับระดับทั้ง 5 เพื่อใช้ในการประเมิน

ทักษะทางเรขาคณิต ได้แก่ 1) ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) 2) ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) 3) ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) 4) ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) และ 5) ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills)

1.3 การคิดอย่างมีลำดับขั้นตามทฤษฎีบท Van Hiele ของ De Villiers

Villiers (1987) ได้นำแนวคิดโมเดลและทักษะทางเรขาคณิตของ Alan Hoffer (1981) มาปรับใช้ในงานวิจัย ซึ่งได้ทำการวิจัยกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 – 6 ของประเทศแอฟริกาใต้ ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 4,015 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบที่เป็นคำถามปลายเปิด จำนวน 56 ข้อ โดยเริ่มจากคำถามง่ายไปจนถึงการให้เหตุผลแบบนิรนัย ซึ่งเป็นการวิจัยเกี่ยวกับการคิดอย่างมีลำดับขั้น วิธีการถ่ายทอด และทฤษฎีบทของ Van Hiele โดยแนวคิดโมเดลในงานวิจัยนี้ถูกแบ่งออกเป็น 5 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การรู้จักรูปร่าง (Recognition) คือ นักเรียนรู้จักรูปร่างเรขาคณิตที่ปรากฏ แต่ไม่สามารถจำแนกสมบัติของรูปร่างเรขาคณิตเหล่านั้นได้

ระดับที่ 2: การวิเคราะห์ (Analysis) คือ นักเรียนวิเคราะห์สมบัติและบอกคำจำกัดความของรูปร่างเรขาคณิตที่ปรากฏได้ แต่ไม่สามารถเชื่อมโยงสมบัติของรูปร่างเรขาคณิตเหล่านั้นได้

ระดับที่ 3: การเรียงลำดับ (Ordering) คือ นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตหรือลำดับสมบัติของรูปร่างอย่างสมเหตุสมผลด้วยการพิสูจน์แบบสืบหรือการแสดงลำดับแบบสืบและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของสมบัติรูปเรขาคณิตเหล่านั้นได้

ระดับที่ 4: การพิสูจน์ (Deduction) คือ นักเรียนเข้าใจการพิสูจน์ สัญลักษณ์ของการพิสูจน์ สัจพจน์ ทฤษฎีบท โดยมีการพัฒนารูปแบบการพิสูจน์ที่ยาวขึ้น

ระดับที่ 5: การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) คือ นักเรียนวิเคราะห์และเข้าใจระบบอื่น ๆ ที่สูงขึ้น รวมถึงคุณสมบัติของการพิสูจน์ในระบบนั้น ๆ และสัจพจน์ที่สำคัญ

นอกจากนี้ยังได้เพิ่มการแบ่งประเภทของการคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 6 ประเภท ประกอบด้วย

1) การรู้จักรูปร่างและสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงรูปร่างเรขาคณิต (Recognition and represent of figure-types) พบได้ในระดับที่ 1

2) ความเข้าใจและการใช้คำจำกัดความได้อย่างถูกต้อง (Use and understanding of terminology) พบได้ในระดับที่ 2

3) การบรรยายลักษณะของรูปร่างเรขาคณิต (Verbal description of properties of figure-types) พบได้ในระดับที่ 2

4) การจำแนกประเภทตามลำดับชั้น (Hierarchical classification) พบได้ในระดับที่ 3

5) การพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว (One step deduction) พบได้ในระดับที่ 3

6) การพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน (Longer deduction) พบได้ในระดับที่ 4

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า De Villiers ยังคงใช้ระดับการคิดทางเรขาคณิตทั้ง 5 ระดับของแวนฮิลโมเดล แต่ได้เพิ่มประเด็นเกี่ยวกับประเภทของการคิดทางเรขาคณิตซึ่งมีความแตกต่างจาก Hoffer (1981) โดยเขาได้แบ่งการคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 6 ประเภท ที่พบได้ในระดับที่ต่าง ๆ ได้แก่ 1) การรู้จักรูปร่างและสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงรูปเรขาคณิต (Recognition and represent of figure-types) พบได้ในระดับที่ 1 2) ความเข้าใจและการใช้คำจำกัดความได้อย่างถูกต้อง (Use and understanding of terminology) พบได้ในระดับที่ 2 3) การบรรยายลักษณะของรูปเรขาคณิต (Verbal description of properties of figure-types) พบได้ในระดับที่ 2 4) การจำแนกประเภทตามลำดับชั้น (Hierarchical classification) พบได้ในระดับที่ 3 5) การพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว (One step deduction) พบได้ในระดับที่ 3 และ 6) การพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน (Longer deduction) พบได้ในระดับที่ 4

1.4 การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime

Gutiérrez and Jaime (1998) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการประเมินระดับของ Van Hiele ที่เกี่ยวข้องกับ การให้เหตุผลของนักเรียนสเปนจำนวน 309 คน ประกอบด้วยนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 – 8 (อายุ 11 – 14 ปี) และระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง 4 (อายุ 14 – 18 ปี) โดยพิจารณาเพียง 4 ระดับขั้นเท่านั้น คือ ระดับขั้นที่ 1 ถึง 4 (ระดับขั้นที่ 0 ถึง 3 ตามแวนฮิลโมเดล) โดยไม่นำระดับขั้นสุดท้ายมาใช้ในการพิจารณา เนื่องจากการกำหนดคำอธิบายของระดับขั้นนี้ขาดความชัดเจนและไม่ส่งผลต่อการศึกษาในระดับชั้นประถมศึกษาและมัธยมศึกษาและนักเรียนในระดับขั้นนี้มีระดับขั้นการให้เหตุผลที่ห่างไกลจากระดับขั้นสุดท้าย (การคิดขั้นสุดท้าย) โดยหัวข้อในการพิจารณาทักษะการให้เหตุผลของ Gutierrez และ Jaime ประยุกต์แบบมาจากทักษะทางเรขาคณิตทั้ง 5 ของ Alan Hoffer (1981) ประกอบด้วย ทักษะด้านการมองภาพ (Visual skills) ทักษะด้านการใช้ภาษา (Verbal skills) ทักษะด้านการวาดภาพ (Drawing skills) ทักษะด้านตรรกะ (Logical skills) ทักษะด้านการประยุกต์ใช้ (Applied skills) และแนวคิดของ De Villiers (1987) ที่ได้ระบุประเภทของการคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 6 ประเภท ประกอบด้วย การรู้จักรูปร่างและสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงรูปเรขาคณิต (Recognition and represent of figure-types) ความเข้าใจและการใช้คำจำกัดความได้อย่างถูกต้อง (Use and understanding of

terminology) การบรรยายลักษณะของรูปเรขาคณิต (Verbal description of properties of figure-types) การจำแนกประเภทตามลำดับชั้น (Hierarchical classification) การพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว (One step deduction) และการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน (Longer deduction) เมื่อนำแนวคิดทั้งสองมาบูรณาการกันทำให้ได้หัวข้อหรือประเด็นที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตใหม่ 4 ด้าน ได้แก่

1) การตระหนักรูปร่าง (Recognition) หมายถึง การรู้จักประเภท องค์ประกอบและสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต โดยแบ่งออกเป็น 2 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกหรือองค์ประกอบภายนอก

ระดับที่ 2: การพิจารณาจากสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยม

2) บทนิยาม (Definition) หมายถึง การกำหนดสมบัติและการนำสมบัติ ข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ไปใช้ในการให้เหตุผลและการสร้างข้อสรุป โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

2.1) การใช้บทนิยาม (Use of definitions) หมายถึง หมายถึง หมายถึง การพิจารณาเงื่อนไขหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วนำสมบัติ ข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท มาใช้ในการให้เหตุผล โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2: การใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการยกตัวอย่างประกอบ เพื่อแสดงสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระดับที่ 3: การใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว เพื่อแสดงสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระดับที่ 4: การแสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้ หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา โดยการแสดงความเท่ากันทุกประการหรือพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

2.2) การกำหนดบทนิยาม (Formulation of definitions) หมายถึง การนำลักษณะภายนอก สมบัติทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการกำหนดบทนิยาม โดยแบ่งออกเป็น 4 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การระบุลักษณะภายนอกที่เกี่ยวข้อง หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก

ระดับที่ 2: การระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ระดับที่ 3: การจัดกลุ่มของสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและเพียงพอ หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในการกำหนดสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอกับรูปที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนเกี่ยวกับสมบัติที่ได้

ระดับที่ 4: การพิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามได้ หมายถึง การนำบทนิยามและทฤษฎีบทมาใช้ในการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยการแสดงความเท่ากันทุกประการ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ถาม

3) การจัดหมวดหมู่ (Classification) หมายถึง การจำแนกหรือจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต โดยใช้ลักษณะภายนอกหรือสมบัติในการจัดหมวดหมู่เพื่อแสดงความเหมือนและความแตกต่างกัน โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การจำแนกโดยลักษณะเฉพาะภายนอก หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างกันของรูปที่กำหนดให้แต่ละรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก

ระดับที่ 2: การจำแนกโดยสมบัติเฉพาะทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างกันของรูปที่กำหนดแต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง การวัดขนาดของด้านหรือมุมแล้วนำมาสรุป

ระดับที่ 3: การอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่ม หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างของรูปที่กำหนดให้แต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในการระบุสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอกับรูปที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนเกี่ยวกับสมบัติที่ได้

4) การพิสูจน์ (Proof) หมายถึง การใช้สมบัติ สัจพจน์ ทฤษฎีบทและบทนิยาม เพื่ออธิบายหรือแสดงให้เห็นว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2: การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ หมายถึง การให้เหตุผลโดยการแสดงตัวอย่างที่มีความใกล้เคียงกับสิ่งที่ต้องการพิสูจน์เพื่อให้เกิดความสมเหตุสมผล

ระดับที่ 3: การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบท และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว เพื่อให้สอดคล้องสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และเกิดความสมเหตุสมผล

ระดับที่ 4: การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน หมายถึง โดยการนำบทนิยาม ทฤษฎีบท และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการแสดงความเท่ากันทุกประการ หรือการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน เพื่อให้สอดคล้องสิ่งที่ต้องการพิสูจน์และเกิดความสมเหตุสมผล

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า Gutierrez และ Jaime (1998) ได้สร้างกรอบการวัด กระบวนการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งได้มีรากฐานของการแบ่งระดับตามแนวคิดของ Van Hiele แต่จะพิจารณาเพียงแค่ระดับที่ 1 ถึง 4 แต่ไม่พิจารณาระดับที่ 5 เนื่องจากไม่สอดคล้องกับ หลักสูตรมัธยมศึกษาและพบนักเรียนระดับชั้นมัธยมอยู่ในระดับที่ 5 น้อยมาก ๆ นอกจากนี้ได้นำ แนวคิดในการกำหนดทักษะ 5 ทักษะที่ใช้ในการประเมินทางเรขาคณิตของ Alan Hoffer (1981) และการแบ่งประเภทของการคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 6 ประเภทของ De Villiers (1987) มา พัฒนาและบูรณาการเป็นการให้เหตุผลทางเรขาคณิต 4 ด้าน ประกอบด้วย 1) การตระหนักรูปร่าง 2) บทนิยาม 3) การจัดหมวดหมู่ และ 4) การพิสูจน์ โดยมีรายละเอียดของกรอบแนวคิดและ ลักษณะที่บ่งชี้ถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของกลูเธอร์สและเจมี ดังตารางที่ 2

ตาราง 2 กรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime (1998)

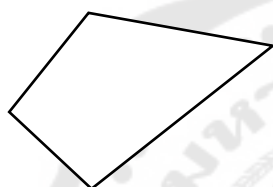
	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 4
การตระหนักรูปร่าง	พิจารณาจากลักษณะภายนอก	พิจารณาจากสมบัติทางคณิตศาสตร์		
การใช้บทนิยาม		ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้
การกำหนดบทนิยาม	ระบุลักษณะภายนอกที่เกี่ยวข้อง	ระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์	จัดกลุ่มของสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและเพียงพอ	พิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามได้
การจัดหมวดหมู่	จำแนกโดยลักษณะเฉพาะภายนอก	จำแนกโดยสมบัติเฉพาะทางคณิตศาสตร์	อธิบายความสัมพันธ์และความแตกต่างระหว่างกลุ่ม	
การพิสูจน์		พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	พิสูจน์อย่างมีแบบแผน

จากกรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime (1998) ผู้วิจัยจึงได้พัฒนาให้มีความสอดคล้องกับเนื้อหา เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับเรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยมีกรอบแนวคิดในการวิจัยแยกตามด้านดังนี้

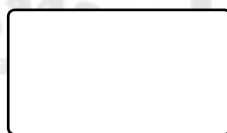
ด้านที่ 1 การตระหนักรูปร่าง

ตัวอย่างงานปฏิบัติ (Task) ด้านที่ 1 การตระหนักรูปร่าง

จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

ตาราง 3 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม
ด้านที่ 1 การตระหนักรูปร่าง

ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
ระดับที่ 1	จากรูปที่กำหนดให้ นักเรียนพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ โดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก	นักเรียนใช้ลักษณะภายนอกในการพิจารณาได้ดังนี้ หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะคล้ายหรือเหมือนกับรูปสี่เหลี่ยมที่เคยเห็น หมายเลข 2 และ 3 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะไม่เหมือนหรือคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมที่เคยเห็น

ตาราง 3 (ต่อ)

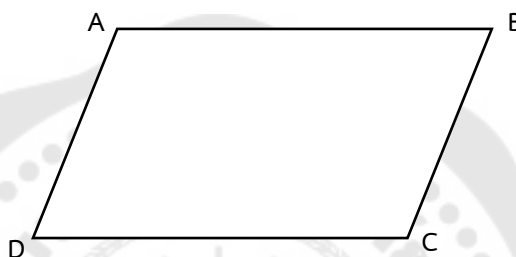
ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
ระดับที่ 2	จากรูปที่กำหนดให้ นักเรียน พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูป สี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ โดยพิจารณาจากสมบัติทาง คณิตศาสตร์หรือบทนิยาม	นักเรียนใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ หรือบทนิยามในการพิจารณาได้ดังนี้ หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม โดย พิจารณาจากจำนวนด้าน จำนวนมุม และการเป็นรูปปิด หรือการพิจารณา จากบทนิยาม หมายเลข 2 และ 3 ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยม โดยพิจารณาจากจำนวนด้าน จำนวนมุมและการเป็นรูปปิด หรือ การพิจารณาจากบทนิยาม

ด้านที่ 2.1 การใช้บทนิยาม

ตัวอย่างงานปฏิบัติ (Task) ด้านที่ 2.1 การใช้บทนิยาม

บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



ตาราง 4 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 2.1 การใช้บทนิยาม

ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
ระดับที่ 2	จากบทนิยามที่กำหนดให้ นักเรียน นำนิยาม ทฤษฎี และสิ่งที่กำหนดให้ มาใช้ในการยกตัวอย่างประกอบ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้และบทนิยามที่กำหนดให้	นักเรียนให้เหตุผลว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เนื่องจากเคยเรียนมาว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน เหมือนที่โจทย์กำหนดให้ และรูปมีความเอียงเหมือนรูปที่กำหนด
ระดับที่ 3	จากบทนิยามที่กำหนดให้ นักเรียน นำนิยาม ทฤษฎี และสิ่งที่กำหนดให้ มาใช้ในการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้และบทนิยามที่กำหนดให้	นักเรียนให้เหตุผลว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยแสดงการพิสูจน์อย่างง่ายหรือแสดงการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว นำนิยาม ทฤษฎี และสิ่งที่กำหนดให้ มาใช้ในการให้เหตุผล

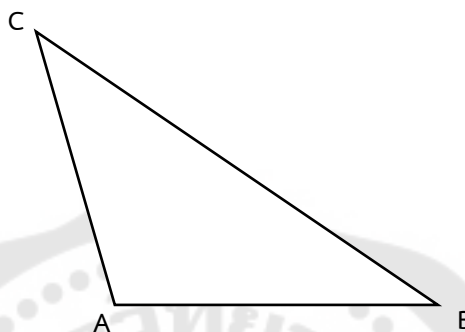
ตาราง 4 (ต่อ)

ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
ระดับที่ 4	จากบทนิยามที่กำหนดให้ นักเรียน นำนิยาม ทฤษฎี และสิ่งที่กำหนดให้ มาใช้ในการพิสูจน์แบบหลาย ขั้นตอนหรือแสดงความเท่ากันทุก ประการ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ ระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และบท นิยามที่กำหนดให้	นักเรียนให้เหตุผลว่ารูปสี่เหลี่ยมที่ กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยแสดงการพิสูจน์แบบหลาย ขั้นตอน หรือแสดงความเท่ากันทุก ประการโดยนำนิยาม ทฤษฎี และสิ่ง ที่กำหนดให้มาใช้ในการให้เหตุผล

ด้านที่ 2.2 การกำหนดบทนิยาม

ตัวอย่างงานปฏิบัติ (Task) ด้านที่ 2.2 การกำหนดบทนิยาม

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว



ตาราง 5 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม
ด้านที่ 2.2 การกำหนดบทนิยาม

ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
ระดับที่ 1	นักเรียนพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูปเพื่อประกอบการกำหนดสมบัติของรูป	นักเรียนกำหนดสมบัติของรูปที่กำหนดให้โดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก เช่น เป็นรูปสามเหลี่ยม
ระดับที่ 2	นักเรียนพิจารณาจากบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับรูปเพื่อประกอบการกำหนดบทนิยาม	นักเรียนกำหนดสมบัติของรูปที่กำหนดให้โดยพิจารณาบทนิยามและทฤษฎีบท เช่น มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน มีมุมป้าน 1 มุม มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 2 มุม เป็นต้น
ระดับที่ 3	นักเรียนกำหนดบทนิยามจากสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอหรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนประกอบสมบัติที่ได้	นักเรียนกำหนดสมบัติที่มีความจำเป็นและเพียงพอของรูปที่กำหนดให้โดยพิจารณาบทนิยามและทฤษฎีบท เช่น มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน มีมุมป้าน 1 มุม มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 2 มุม เป็นต้น หรือมีการพิสูจน์ประกอบสมบัติที่ได้

ด้านที่ 3 การจัดหมวดหมู่

ตัวอย่างงานปฏิบัติ (Task) ด้านที่ 3 การจัดหมวดหมู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ตาราง 6 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 3 การจัดหมวดหมู่

ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
ระดับที่ 1	นักเรียนจำแนกความเหมือนหรือความแตกต่างกันระหว่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป	นักเรียนจำแนกความเหมือนหรือความแตกต่างกันระหว่างรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก เช่น ความตรง ความเอียง การเป็นรูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น
ระดับที่ 2	นักเรียนจำแนกความเหมือนหรือความแตกต่างกันรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนโดยพิจารณาจากสมบัติเฉพาะทางคณิตศาสตร์	นักเรียนจำแนกความเหมือนหรือความแตกต่างกันระหว่างรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามหรือทฤษฎีบท เช่น มีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

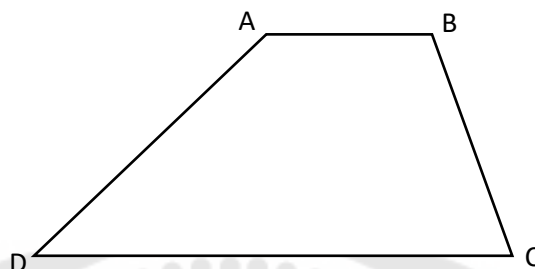
ตาราง 6 (ต่อ)

ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
		เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก มุม ทุกมุมเป็นมุมฉาก เป็นต้น
ระดับที่ 3	นักเรียนจำแนกและเชื่อมโยงความ เหมือนหรือความแตกต่างกันรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนม เปียกปูน และจัดกลุ่มของสมบัติโดย การพิจารณาจากลักษณะภายนอก และสมบัติทางคณิตศาสตร์ได้	นักเรียนจำแนกความเหมือนหรือ ความแตกต่างกันระหว่างรูปโดย พิจารณาจากบทนิยามหรือทฤษฎี บท ทำให้ได้สมบัติระหว่างกลุ่มที่มี ความจำเป็นและเพียงพอใน หรือมี การพิสูจน์อย่างง่ายประกอบสมบัติที่ ได้

ด้านที่ 4 การพิสูจน์

ตัวอย่างงานปฏิบัติ (Task) ด้านที่ 4 การพิสูจน์

กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



ตาราง 7 ตัวอย่างกรอบการวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านที่ 4 การพิสูจน์

ระดับการคิด	การให้เหตุผล	แนวคำตอบ
ระดับที่ 2	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้มีผลรวมมุมภายใน 360 องศา โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนยกตัวอย่างว่ารูปสี่เหลี่ยมคางหมูหรือรูปสี่เหลี่ยมอื่น ๆ ที่เคยเรียนมีผลรวมมุมภายในได้ 360 องศา
ระดับที่ 3	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้มีผลรวมมุมภายใน 360 องศา โดยการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียวหรือการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	นักเรียนลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วกล่าวว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีผลรวมมุมภายในได้ 180 องศา รูปสี่เหลี่ยมนี้จึงมีผลรวมมุมภายในได้ 360 องศา
ระดับที่ 4	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้มีผลรวมมุมภายใน 360 องศา โดยการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน	นักเรียนลากเส้นทแยงมุมแล้วแสดงการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนหรือแสดงความเท่ากันทุกประการโดยนำทฤษฎีบท บทนิยามมาใช้ในการให้เหตุผลว่ารูปสี่เหลี่ยมนี้จึงมีผลรวมมุมภายใน 360 องศา

1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime

งานวิจัยในประเทศ

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime พบว่าในประเทศไทยมีเพียง 2 งานวิจัยเท่านั้น ที่ได้นำกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ไปใช้ในการศึกษา ประกอบด้วย

อรรถกร ใจเดช (2555) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิต เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้แนวการสอนของ Van Hiele โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการสอนของ Van Hiele เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนการสอนตามแนวการสอนของ Van Hiele เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 6 แผนและแบบทดสอบวัดการคิดทางเรขาคณิต ทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ความถี่และค่าร้อยละ ของจำนวนนักเรียนที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตในแต่ละด้านตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime โดยการวิเคราะห์เนื้อหา ผลการวิจัยพบว่าเมื่อนักเรียนผ่านกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการสอนของ Van Hiele ระดับการคิดของนักเรียนด้านการตระหนักเกี่ยวกับรูปร่าง การใช้บทนิยาม การจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิตและการพิสูจน์เป็นไปในทิศทางเดียวกัน กล่าวคือ จำนวนนักเรียนที่มีแนวโน้มแสดงระดับการคิดในระดับที่ 2 และ 3 มีจำนวนนักเรียนเพิ่มขึ้นในทุก ๆ ด้าน

ณัชฎาภา นิमितติ (2560) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ตามแนวปฏิบัติสู่ผลสัมฤทธิ์ขั้นสูงเพื่อส่งเสริมการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวปฏิบัติสู่ผลสัมฤทธิ์ขั้นสูงเพื่อส่งเสริมการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และศึกษาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผ่านการจัดการเรียนรู้ตามแนวปฏิบัติสู่ผลสัมฤทธิ์ขั้นสูง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวปฏิบัติสู่ผลสัมฤทธิ์ขั้นสูงเรื่อง วงกลม จำนวน 10 แผน แบบทดสอบวัดการคิดเชิงเรขาคณิตก่อนและหลังเรียนและแบบสังเกตการคิดเชิงเรขาคณิต ทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ร้อยละและสรุปในลักษณะพรรณนาวิเคราะห์ โดยผลการวิจัยพบว่า 1) แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวปฏิบัติสู่ผลสัมฤทธิ์ขั้นสูงประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ ขั้นเตรียมความพร้อม ขั้นนำ ขั้นสอน ขั้นสรุป โดยประกอบด้วย 7 แนวปฏิบัติ ได้แก่ การออกแบบบทเรียนให้เอื้อต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ การมอบหมายงานที่สอดคล้องกับระดับการรู้คิด การให้ทำงานกลุ่ม งานคู่และงานเดี่ยวตามความเหมาะสม การประเมินระหว่างเรียน การเอื้อให้มีการสนทนาและอภิปรายความรู้โดยนักเรียน การเขียนอย่างเป็นกิจวัตรและการสืบเสาะหา

ความรู้ 2) การคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนได้ถูกแบ่งออกเป็น 3 ด้าน ได้แก่ ด้านการตระหนักรู้เกี่ยวกับรูปร่าง ด้านการใช้นิยามและด้านการพิสูจน์ พบว่านักเรียนร้อยละ 50 มีระดับการตระหนักรู้เกี่ยวกับรูปร่างอยู่ในระดับ 2 นักเรียนร้อยละ 38.89 และ 33.33 มีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตด้านการใช้นิยามและด้านการพิสูจน์อยู่ในระดับ 3 ตามลำดับ

งานวิจัยต่างประเทศ

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime พบว่าในต่างประเทศมีเพียง 1 งานวิจัยเท่านั้น ได้แก่

Gutiérrez and Jaime (1998) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการประเมินระดับของ Van Hiele ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผล โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย 2 ข้อ ประกอบด้วย 1) เพื่อกำหนดขั้นตอนในการออกแบบทดสอบที่ตรงกับกรอบแนวคิดที่ต้องการจะประเมินและมีความน่าเชื่อถือ 2) เพื่อให้ได้มาซึ่งเครื่องมือที่ใช้ในการประเมินของแต่ละกระบวนการ โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบประเมินการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามระดับขั้นของ Van Hiele เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 8 ข้อ ผลการประเมินพบว่า นักเรียนส่วนมากมีการให้เหตุผลอยู่ในระดับที่ 1 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ไม่สามารถให้เหตุผลถึงระดับที่ 3 และมีเพียงนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 4 เท่านั้นที่มีการให้เหตุผลถึงระดับที่ 4 โดยในระดับชั้นมัธยมศึกษาการเรียนรู้ในระดับที่สูงกว่าระดับของนักเรียนส่งผลให้เกิดคิดในระดับที่สูงขึ้นได้ แต่อาจส่งผลให้ขาดความสมบูรณ์ของการเรียนรู้ในระดับที่ต่ำกว่าได้

2. ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ

2.1 การวิจัยเชิงคุณภาพ

การวิจัยเชิงคุณภาพ เป็นการศึกษาที่ดำเนินการภายใต้กระบวนทัศน์เชิงธรรมชาติ (naturalistic paradigm) ดังนั้นจึงเรียกการวิจัยแบบนี้ว่า การแสวงหาความรู้แบบเป็นธรรมชาติ (naturalistic inquiry) หรือการวิจัยแบบธรรมชาติ ซึ่งเป็นการวิจัยที่นักวิจัยเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการเก็บข้อมูล ซึ่งการเก็บข้อมูลโดยใช้มนุษย์เป็นเครื่องมือนั้นสามารถปรับให้เข้ากับสถานการณ์การวิจัย ซึ่งส่วนใหญ่ผู้วิจัยไม่สามารถคาดเดาล่วงหน้าได้ อีกทั้งยังใช้ความรู้แบบสามัญสำนึกในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เท่า ๆ กับการใช้ความรู้ที่ได้จากทฤษฎี นอกจากนี้วิธีการวิจัยแบบธรรมชาติยังสามารถใช้วิธีการเก็บข้อมูลที่ออกแบบมาเพื่อดำเนินการในคนได้ทุกอย่าง ไม่ว่าจะเป็นการสัมภาษณ์ การสังเกต การเก็บข้อมูลเอกสาร หรือวิธีการอื่น ๆ การวิจัยแบบธรรมชาติใช้หลักสำคัญ 4 ประการในการดำเนินการคือ 1) เลือกตัวอย่างอย่างง่ายสำหรับการศึกษารูปแบบเจาะจง 2) วิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีการแบบอุปนัย (inductive analysis) 3) หาข้อสรุปเชิงทฤษฎีที่มีพื้นฐานมาจากข้อมูล (grounded theory) และ 4) มีการออกแบบที่ยืดหยุ่นได้ตามความจำเป็นกับสถานการณ์เฉพาะหน้า (emergent design) หลักการทั้ง 4 นี้จะถูกใช้ตลอดเวลาในการทำวิจัย โดยไม่จำเป็นต้องจัดลำดับก่อนหลัง จนกระทั่งข้อมูลหรือข้อสรุปที่ได้มาใหม่ไม่แตกต่างจากที่ได้มาก่อนหน้านั้น (Teppo, 1997; ชาย โพธิ์สิตา, 2564; สุภางศ์ จันทวานิช, 2545)

ลักษณะสำคัญของงานวิจัยเชิงคุณภาพ

ลักษณะสำคัญของงานวิจัยเชิงคุณภาพแบ่งออกเป็น 8 แบบ (Parker, 2003; ชาย โพธิ์สิตา, 2564) ดังนี้

1) เป็นการศึกษาปรากฏการณ์ที่เป็นธรรมชาติ หมายถึง การที่นักวิจัยเข้าไปสังเกตการณ์อย่างใกล้ชิดในชุมชนหรือปรากฏการณ์ที่ศึกษา โดยเฉพาะการวิจัยแบบชาติพันธุ์วรรณา สถานการณ์ที่เป็นธรรมชาติ หมายถึงสถานการณ์ที่ไม่มีการควบคุม ดัดแปลง หรือจัดการโดยนักวิจัย เช่น การมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างเจ้าหน้าที่บริการทางสุขภาพกับประชาชนผู้รับบริการในสถานบริการระดับต่าง ๆ เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีลักษณะสำคัญในทางปฏิบัติ 3 ประการประกอบด้วย

1.1) การศึกษาพฤติกรรมหรือปรากฏการณ์ ในขณะที่สิ่งเหล่านี้ดำเนินอยู่อย่างเป็นไปตามสภาพธรรมชาติ นักวิจัยสังเกตและบันทึกสิ่งที่เกิดขึ้นและดำเนินไปเหล่านั้นแบบสด ๆ ไม่ใช่การศึกษาจากคำบอกเล่าของผู้ให้ข้อมูล

1.2) สถานการณ์ที่เกิดขึ้นไม่มีการถูกควบคุมหรือดัดแปลงให้ผิดไปจากธรรมชาติ เนื่องจากในการวิจัยทางสังคมศาสตร์ที่ท่าเกี่ยวกับคน การควบคุม ดัดแปลง ไม่ใช่แนวทางที่

ยอมรับได้ เพราะเป็นการชี้แนะหรือจัดการให้พฤติกรรมของคนหรือปรากฏการณ์ที่ศึกษาเพื่อเป็นประโยชน์ในการวิจัย

1.3) วิธีการได้มาซึ่งข้อมูลที่เป็นธรรมชาติ จะไม่มีการกำหนดไว้ล่วงหน้าว่าข้อมูลหรือคำตอบที่ต้องการควรจะเป็นอย่างไร แต่เป็นการเปิดกว้างให้สิ่งเหล่านั้นปรากฏเองตามธรรมชาติและลักษณะเฉพาะของผู้ตอบในแต่ละคน

2) เน้นการดำเนินการแบบอุปนัยแต่จะทำแบบนิรนัยก็ได้ หมายถึง การดำเนินการวิจัยในทางสังคมศาสตร์มีแนวทางดำเนินการ 2 แบบ คือ แบบนิรนัย (deductive approach) เป็นแนวทางในการดำเนินการวิจัยเชิงปริมาณ กล่าวคือ นักวิจัยเริ่มต้นจากกรอบแนวคิด ทฤษฎี และสมมติฐานที่ตั้งไว้ก่อนว่าคำตอบสำหรับคำถามในการวิจัยจะเป็นอย่างไร จากนั้นรวบรวมข้อมูลเชิงประจักษ์เพื่อนำมาพิสูจน์ในกระบวนการวิเคราะห์หรืออย่างรอบคอบว่า สมมติฐานที่ตั้งไว้ได้รับการยืนยันจากข้อมูลเชิงประจักษ์หรือไม่ กับอุปนัย (inductive approach) เป็นแนวทางในการดำเนินการวิจัยเชิงคุณภาพ กล่าวคือ นักวิจัยจะไม่กำหนดกรอบแนวคิดทฤษฎีและสมมติฐานไว้ล่วงหน้า แต่เริ่มต้นจากการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้คำถามการวิจัยเป็นแนวทางเพื่อให้ได้มาซึ่งข้อมูลที่ต้องการเพื่อตอบคำถามการวิจัยที่ตั้งไว้เมื่อทราบว่าข้อมูลคืออะไรแล้วจะบอกได้ว่าใคร คือแหล่งข้อมูลที่ดีที่สุดสำหรับข้อมูลนั้น และรวบรวมข้อมูลจากแหล่งนั้นด้วยวิธีการใด หลังจากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาข้อสรุปเป็นแนวคิดหรือคำอธิบายเชิงนามธรรมสำหรับปรากฏการณ์ที่ศึกษา โดยในบางงานวิจัยเชิงคุณภาพจะมีการดำเนินการแบบอุปนัยและนิรนัย เช่น การสร้างกรอบแนวคิดทฤษฎีและสมมติฐานไว้ก่อนเริ่มเก็บข้อมูล จะทำให้การวิจัยมีทิศทางที่ชัดเจน แต่อาจขาดความยืดหยุ่นในการดำเนินการ

3) เน้นการทำความเข้าใจแบบองค์รวม หมายถึง การวิจัยเชิงคุณภาพมีความเชื่อว่าพฤติกรรมของมนุษย์เป็นผลรวมของปัจจัยหลายด้าน ทั้งทางกายภาพและทางสังคมประกอบกัน นอกจากนี้ยังได้รับอิทธิพลจากระบบความหมายในสังคมที่เขาดำรงอยู่ด้วย เนื่องจากแนวคิดองค์รวมคือแนวคิดที่เชื่อว่าทั้งหมดของสิ่งใดสิ่งหนึ่งเป็นมากกว่าผลรวมของส่วนประกอบย่อย ๆ ของสิ่งนั้น แต่เป็นผลของการที่ส่วนประกอบย่อย ๆ ทุกส่วนเชื่อมโยงสัมพันธ์กันอย่างมีความหมายภายใต้บริบทของสิ่งนั้น ซึ่งมีผลการออกแบบการวิจัยเชิงคุณภาพ เพราะการวิจัยเชิงคุณภาพเป็นการออกแบบที่ต้องตระหนักว่าแต่ละส่วน แต่ละกรณี หรือแต่ละเหตุการณ์ ภายในระบบของสิ่งที่ศึกษา ไม่เพียงแต่มีความหมายในตัวเองแต่ยังมีความสัมพันธ์กับส่วนอื่น ๆ อย่างไม่อาจแยกได้

4) ใช้ข้อมูลเชิงคุณภาพเป็นหลัก หมายถึง ข้อมูลที่เป็นข้อความส่วนใหญ่อยู่ในรูปของคำพูดหรือการพรรณนาที่ไม่เป็นตัวเลข ซึ่งตรงกันข้ามกับข้อมูลเชิงปริมาณที่เป็นตัวเลขหรือ

แปลงเป็นตัวเลขได้เมื่อจะใช้ในการวิเคราะห์ โดยข้อมูลเชิงคุณภาพยังรวมถึงข้อมูลข่าวสารในรูปแบบอื่น ๆ ด้วย เช่น เพลง ดนตรี ภาพยนตร์ รูปภาพฯ นักวิจัยสามารถนำมาใช้ประโยชน์ในการศึกษาได้ โดยข้อมูลเชิงคุณภาพอาจจะอยู่ในรูปของบันทึกการสังเกตของนักวิจัย ที่ทำการสัมภาษณ์ เอกสารหรือบันทึกในรูปแบบต่าง ๆ

5) นักวิจัยติดต่อโดยตรงกับผู้ร่วมในการวิจัย หมายถึง การเข้าไปอยู่ในสถานที่ ๆ ต้องการศึกษาศึกษาและเรียนรู้เกี่ยวกับสิ่งที่ต้องการศึกษาโดยตรงจากแหล่งข้อมูล จะทำให้นักวิจัยได้สัมผัสปรากฏการณ์ที่ศึกษาด้วยตนเองภายใต้บริบทเหล่านั้น เรียกว่า การสังเกตแบบมีส่วนร่วม (participant observation) และนักวิจัยที่ใช้วิธีการนี้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเรียกว่า ผู้สังเกตแบบมีส่วนร่วม จะทำให้ได้รับความไว้วางใจ ความคุ้นเคย ความสัมพันธ์ที่ดีและความไว้วางใจจะมีผลโดยตรงต่อการเข้าถึงข้อมูลและคุณภาพของข้อมูล

6) ให้ความสำคัญกับบริบทของสิ่งที่ศึกษา หมายถึง นักวิจัยต้องทำความเข้าใจ ความหมายและความสำคัญของสิ่งที่ตนศึกษาภายในบริบทของสิ่งนั้นในแง่ของวิธีการเก็บข้อมูล ภาคสนาม นักวิจัยไม่ควรจำกัดขอบเขตในการเก็บข้อมูลให้แคบเกินไป โดยมุ่งแต่เจาะหา รายละเอียดเฉพาะของสิ่งที่ตนจะต้องศึกษาจนละเลยความเป็นบริบทที่ดำรงอยู่ของสิ่งที่ต้องการศึกษา แต่ควรตระหนักเสมอว่าบริบทเหล่านั้นจะช่วยให้ความหมายและความสำคัญของสิ่งที่ศึกษามีความชัดเจนมากขึ้น

7) การออกแบบการวิจัยที่ยืดหยุ่นได้ หมายถึง การออกแบบการวิจัยแบบเปิดกว้าง สำหรับการเปลี่ยนแปลงที่อาจจะเกิดขึ้นได้ เพื่อให้สามารถลงลึกในการเก็บข้อมูลได้มากที่สุด โดยการหลีกเลี่ยงการออกแบบการวิจัยที่มีโครงสร้างอย่างเข้มงวด ซึ่งไม่เอื้อต่อการติดตามข้อมูลแบบเจาะลึกหรือการค้นหาลักษณะใหม่ ๆ โดยนักวิจัยต้องพิถีพิถันในการออกแบบและวางแผนในการเก็บข้อมูล กำหนดประชากรตัวอย่าง และวิธีในการเลือกประชากรตัวอย่าง ตลอดจนวางแผนการวิเคราะห์ข้อมูลอย่างรอบครอบไว้ล่วงหน้า และคิดถึงประเด็นที่อาจจะเป็นปัญหาและหาแนวทางในการแก้ปัญหาไว้ล่วงหน้า

8) นักวิจัยเป็นเครื่องมือสำคัญ หมายถึง นักวิจัยคือผู้ใช้เครื่องมือในการวิจัยซึ่งเครื่องมือสำหรับการรวบรวมข้อมูลเชิงคุณภาพที่ไม่มีโครงสร้างอย่างเคร่งครัด สามารถยืดหยุ่นได้ตามความเหมาะสมกับแหล่งข้อมูลและสถานการณ์ นักวิจัยจึงต้องแม่นยำในหลักการของเครื่องมือแต่ละตัวและต้องมีทักษะในการใช้เครื่องมืออย่างเพียงพอจึงจะทำให้เกิดผลที่ประสบความสำเร็จ เนื่องจากการวิจัยเชิงคุณภาพเป็นการมองโลกตามความเป็นจริง ภายใต้อาณัติการที่

ธรรมชาติ ดำเนินการโดยใช้หลักอุปนัย เน้นความสำคัญของการทำความเข้าใจอย่างเป็นองค์รวมภายในบริบทของสิ่งที่ศึกษา

การออกแบบการวิจัยเชิงคุณภาพ

การออกแบบการวิจัยเชิงคุณภาพ สามารถยืดหยุ่นได้ตามความจำเป็นที่เอื้อต่อการได้มาซึ่งข้อมูลที่ตีขึ้น โดยไม่ยึดตามความสะดวกของผู้วิจัย มีส่วนประกอบสำคัญ 5 ส่วน (ชาย โพธิ์สิตา, 2564; นิธิพานิช & ชมภูษ หนูนาค, 2565) ดังนี้

1) คำถามการวิจัย (research question) หมายถึง สิ่งที่นักวิจัยต้องรู้หรือต้องการหาคำตอบ อันเป็นที่มาของการวิจัยเรื่องนั้น ในการออกแบบส่วนนี้นักวิจัยต้องตอบคำถามเหล่านี้ คือ ในการทำวิจัยเรื่องนี้เราต้องรู้หรือต้องการทำความเข้าใจเรื่องอะไร? มีสิ่งใดที่ยังไม่มีความรู้มาก่อนแต่ควรรู้? มีคำถามอะไรบ้างในเรื่องนั้นที่ควรหาคำตอบให้ชัดเจนขึ้นกว่าที่มีอยู่ และคำถามทั้งหมดเกี่ยวข้องกันอย่างไร? เพราะคำถามคือจุดตั้งต้นของการทำวิจัยและเป็นสิ่งที่ต้องคำนึงถึงก่อนเสมอในการออกแบบส่วนอื่น ๆ โดยการตั้งคำถามแบ่งออกเป็น 3 แบบ ประกอบด้วย

1.1) คำถามที่ระบุกลุ่มเป้าหมายการวิจัย หมายถึง คำถามที่มุ่งหาคำตอบเกี่ยวกับกลุ่มเป้าหมาย ซึ่งอาจเป็นกลุ่มคำทั่วไป หรือกลุ่มที่เจาะจง เหมาะสำหรับการศึกษาที่มีตัวอย่างจำนวนมาก ซึ่งต้องเลือกโดยวิธีการสุ่มตัวอย่าง เนื่องจากต้องการให้ผลการวิจัยสามารถนำไปใช้ได้กว้าง และคำถามที่มุ่งหาคำตอบสำหรับกลุ่มเป้าหมายที่เจาะจง เหมาะกับการศึกษากลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก เช่น การศึกษาเฉพาะกรณี และการศึกษาด้วยวิธีการเชิงคุณภาพ

1.2) คำถามที่บอกไปถึงข้อมูลที่ต้องการ หมายถึง คำถามที่บอกไปถึงประเภทของข้อมูลสำหรับการวิจัยว่าจะเป็นอะไร เป็นข้อมูลเจาะจงสำหรับเรื่องใดเรื่องหนึ่งหรือการเปิดกว้างสำหรับเรื่องทั่ว ๆ ไป โดยคำถามแบบเจาะจงข้อมูล มีข้อดีในการกำหนดว่าข้อมูลอะไรบ้างที่จะต้องรวบรวมมาเพื่อการวิจัยแต่ข้อเสียคือ อาจมีข้อมูลอื่นที่ไม่ได้ระบุในคำถามซึ่งอาจมีความน่าสนใจแต่ถูกมองข้าม และคำถามแบบไม่เจาะจงข้อมูล มีข้อดีคือเป็นการเปิดรับข้อมูลทุกอย่างที่เป็นไปได้ แต่ข้อเสียคือการขาดจุดเน้นที่สำคัญในการวิจัย

1.3) คำถามที่มุ่งหาสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร หมายถึง การวิจัยที่ศึกษาความสัมพันธ์ในปัจจัยตัวหนึ่งจะก่อให้เกิดความแตกต่างในปัจจัยอีกตัวหนึ่ง โดยมุ่งไปที่การหาสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรหนึ่งกับอีกตัวแปรหนึ่ง

2) เป้าหมายและวัตถุประสงค์ของการวิจัย เป็นการกำหนดจุดมุ่งหมายที่ชัดเจนเพื่อเป็นแนวทางสำหรับการทำวิจัยให้บรรลุจุดหมายปลายทางได้

2.1) เป้าหมาย (purpose) หมายถึง การได้ความรู้เพื่อตอบคำถามการวิจัยที่ตั้งไว้ โดยต้องมีความสอดคล้องกับคำถามการวิจัย โดยเป้าหมายมีหน้าที่ 2 อย่าง คือ การบอกให้ทราบว่าการวิจัยต้องไปให้ถึงจุดไหนหรือต้องบรรลุอะไรจึงจะถือว่าประสบความสำเร็จ และเป็น การกำหนดพื้นที่สำหรับการดำเนินการวิจัยว่ามีขอบเขตอยู่ภายใต้เรื่องอะไรและประเด็นอะไรบ้าง ซึ่งเป้าหมายการวิจัยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

2.1.1) เป้าหมายระยะสั้น หมายถึง ผลลัพธ์ (outcome) ในรูปของความรู้ที่ตอบคำถามการวิจัยได้ ซึ่งมีความสำคัญมาก เนื่องจากความสำเร็จของการวิจัยขึ้นอยู่กับความรู้ที่ได้มา ว่าสามารถตอบคำถามการวิจัยที่ตั้งไว้ได้หรือไม่ โดยเป้าหมายระยะสั้นที่ดีควรมีลักษณะเฉพาะเจาะจง ชัดเจน และเป็นไปได้ในทางปฏิบัติ

2.1.2) เป้าหมายระยะยาว หมายถึง ผลกระทบ (impact) ที่นักวิจัยอยากให้เกิดตามาจากความรู้ที่ได้ในการวิจัย เป้าหมายระยะยาวไม่เกี่ยวข้องกับกระบวนการวิจัยโดยตรง แต่เป้าหมายระยะยาวเป็นการนำความรู้ที่ได้ไปสู่ภาคปฏิบัติเพื่อให้เกิดผลดีต่อวงการใดวงการหนึ่ง หรือต่อส่วนรวม

2.2) วัตถุประสงค์ (objectives) หมายถึง สิ่งที่นักวิจัยทำเพื่อให้บรรลุเป้าหมายของการวิจัยที่ตั้งไว้ โดยต้องตั้งให้สอดคล้องกันเป้าหมายการวิจัย โดยปกติเป้าหมายระยะสั้นคือ สิ่งที่สำคัญที่ต้องคำนึงถึงและแปลออกมาเป็นวัตถุประสงค์ของการวิจัย ซึ่งจะช่วยบอกว่าควรทำอะไร อย่างไร จึงจะได้ความรู้สำหรับการตอบคำถามการวิจัยที่ต้องการ

3) กรอบแนวคิดทฤษฎีการวิจัย หมายถึง ความคิดหรือมุมมองที่มีรากฐานมาจากทฤษฎี ซึ่งนักวิจัยจะใช้เป็นมุมมองในการทำความเข้าใจปรากฏการณ์ที่ศึกษา โดยกรอบแนวคิดจะบอกให้ทราบเกี่ยวกับ ปรากฏการณ์ที่ศึกษาเป็นอย่างไร นักวิจัยต้องรู้อะไรบ้างจึงจะเข้าใจปรากฏการณ์ที่ศึกษาได้อย่างถูกต้องและจะหาความรู้ด้วยวิธีการใด ซึ่งกรอบแนวคิดการวิจัยสามารถสร้างได้หลากหลายวิธีดังนี้

3.1) การสังเคราะห์จากทฤษฎีที่มีอยู่แล้ว เป็นวิธีการที่สะดวกเนื่องจากทฤษฎีที่มีอยู่ในการศึกษาที่ผ่านมามีจำนวนมาก สิ่งนี้นักวิจัยต้องทำคือการทบทวนวรรณกรรม โดยการเลือกส่วนที่เข้าข่ายและตรงประเด็นมากที่สุดจากแหล่งที่เชื่อถือได้ เช่น วารสารทางวิชาการที่มีระบบการกลั่นกรองคุณภาพและเป็นงานที่ถูกต้องพิมพ์ เผยแพร่ไม่นานนัก โดยการใช้การพินิจพิจารณาในการเลือก และต้องตระหนักว่าการทบทวนวรรณกรรมเพื่อสร้างกรอบแนวคิดไม่ใช่การเลือกหยิบเอาแนวคิดหรือทฤษฎีที่คนอื่นทำแล้วเอามาใช้ เพื่อใหม่เหมาะสมกับบริบทของประชากรและปรากฏการณ์ที่ศึกษา

3.2) การสังเคราะห์มาจากประสบการณ์ของนักวิจัย เป็นการนำเอาประสบการณ์ที่มีมาใช้ในการ แต่ควรอยู่ในรูปแบบของการสังเกตที่สามารถเชื่อมโยงกับหลักฐานจากการศึกษาหรือจากทฤษฎีที่มีอยู่ได้ โดยนักวิจัยควรมีการจดบันทึกข้อสังเกตของตนเองเกี่ยวกับสิ่งที่ได้ยินหรือได้ฟัง ได้อ่าน ได้สังเกตเห็น และความคิดที่เกิดขึ้นมาในใจไว้อย่างเป็นระบบ แล้วนำไปจัดหมวดหมู่ ซึ่งอาจเป็นประโยชน์ต่อการทำวิจัยในภายหลัง

3.3) การศึกษานำร่อง (ในกรณีที่เป็นไปได้) เพื่อหากรอบแนวคิดสำหรับการศึกษาจริงที่จะทำในภายหลัง การศึกษานำร่องเป็นการมุ่งค้นหาในทัศนและประเด็นที่น่าสนใจ หรือเพื่อทดสอบแนวคิดจากข้อสังเกตและประสบการณ์ส่วนตัวของนักวิจัยว่าสามารถเชื่อมโยงกับโลกความเป็นจริงของประชากรที่คาดว่าจะเป็กลุ่มเป้าหมายได้มากน้อยเพียงใด โดยอาจใช้วิธีการวิจัยแบบสร้างทฤษฎีจากข้อมูล (grounded theory method)

3.4) ความคิดสร้างสรรค์ หรือ การทดลองทางความคิด (thought experiments) เป็นแนวความคิดที่เกิดจากการทดลองทำสิ่งใหม่ที่แตกต่างกันไปจากเดิม โดยมีการคิดอย่างเป็นระบบ จะช่วยให้เกิดความรู้เชิงทฤษฎีที่สามารถนำมาใช้ในการวิจัยได้ โดยความคิดสร้างสรรค์จะแน่นขึ้น ถ้าหากผู้วิจัยเชื่อมโยงความคิดกับประสบการณ์ส่วนตัวและทฤษฎีที่มีอยู่แล้ว หรือความรู้ที่ได้จากการศึกษานำร่อง

4) ระเบียบวิธีวิจัย หมายถึง ปรัชญาและแนวคิดพื้นฐานที่ให้แนวทางในการทำวิจัย ว่าควรดำเนินการอย่างไร ระเบียบวิธีการวิจัยจะให้มุมมองเกี่ยวกับข้อมูล วิธีการรวบรวมข้อมูล และการวิเคราะห์ข้อมูล สิ่งที่อยู่ภายใต้ระเบียบวิธีวิจัยมี 2 เรื่อง คือ

4.1) แนวทางการวิจัย (research approach) คือ เทคนิคหรือเครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูลและวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งสอดคล้องแนวทางการวิจัยที่เลือก เช่น แนวทางเชิงปริมาณ วิธี/เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูล ได้แก่ การสัมภาษณ์โดยใช้แบบสอบถามแบบมีโครงสร้าง (structured questionnaire) และใช้สถิติเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ข้อมูล แนวทางเชิงคุณภาพจะมีวิธีการ/เครื่องมือมาตรฐานที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูล ได้แก่ การสังเกตแบบมีส่วนร่วม การสัมภาษณ์เชิงลึก หรือการอภิปรายกลุ่ม เป็นต้น เพื่อใช้เป็นแนวทางหลักในการวิเคราะห์ข้อมูล

4.2) วิธีการวิจัย (research method) ถูกกำหนดโดยแนวทางการวิจัย โดยแบ่งออกเป็น 3 อย่าง ประกอบด้วย

4.2.1) การออกแบบและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง คือ การกำหนดว่าใครคือกลุ่มประชากรเป้าหมายของการวิจัย รวมถึงการกำหนดว่าจะทำการวิจัยที่ไหน หรือปรากฏการณ์

อย่างไร เมื่อกำหนดได้แล้วจึงเลือกกลุ่มตัวอย่างซึ่งจะเป็นผู้ให้ข้อมูลต่อไป โดยการวิจัยเชิงคุณภาพใช้หลักการเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (purposive sampling) เพื่อให้ได้ตัวอย่างที่เหมาะสมที่ให้นักวิจัยได้เรียนรู้และตอบคำถามการวิจัยได้ การเลือกตัวอย่างแบบเจาะจงจะไม่เคร่งครัดในโครงสร้างและวิธีดำเนินการแต่ต้องสามารถสะท้อนความหลากหลายของกลุ่มประชากรเป้าหมายได้ในระดับหนึ่งเพื่อการนำข้อมูลไปเปรียบเทียบและวิเคราะห์ได้ ซึ่งมีความแตกต่างกับการวิจัยเชิงปริมาณที่ใช้หลักการสุ่ม (random sampling) โดยอาศัยหลักความน่าจะเป็นทางสถิติ

4.2.2) วิธีการเก็บข้อมูล มีความหลากหลายตามความเหมาะสมของข้อมูลที่ต้องการ และตามลักษณะของประชากรที่เป็นตัวอย่างของการวิจัย โดยวิธีการที่ใช้ในการเก็บข้อมูลที่เป็นมาตรฐานของการวิจัยเชิงคุณภาพ ได้แก่

4.2.2.1) การสังเกตแบบมีส่วนร่วม คือ การที่นักวิจัยทำการสังเกตขณะที่เหตุการณ์ดำเนินไปตามปกติ โดยที่ตนร่วมเป็นส่วนหนึ่งอยู่ในเหตุการณ์นั้นและมีความสัมพันธ์ที่เหมาะสมกับกลุ่มหรือชุมชนที่เกี่ยวข้อง นักวิจัยที่ทำการสังเกตแบบมีส่วนร่วมจะมี 2 บทบาทที่ต้องดำเนินการประกอบด้วย บทบาทคนใน และ บทบาทคนนอก และต้องรักษาสมดุลของบทบาทเหล่านี้ให้มีความเหมาะสมโดยพิจารณาตามสถานการณ์เป็นกรณีไป

4.2.2.2) การสัมภาษณ์เชิงลึก สามารถเรียกได้หลายแบบ เช่น การสัมภาษณ์แบบเจาะลึก การสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้างหรือการสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง โดยรวมจะเรียกว่า การสัมภาษณ์เชิงคุณภาพ หมายถึง การสร้างข้อมูลให้ผู้สัมภาษณ์และผู้ให้สัมภาษณ์ร่วมกันผลิตข้อมูล โดยผู้สัมภาษณ์กำหนดหัวข้อหรือประเด็นในการสนทนาและตอบสนองต่อผู้ให้สัมภาษณ์ด้วยความตั้งใจพร้อมกระตุ้นผู้ให้สัมภาษณ์สร้างความคิดหรือเรียบเรียงประสบการณ์ขึ้นมาเพื่อตอบ ซึ่งการเน้นความสัมพันธ์และการมีส่วนร่วมกับผู้ให้สัมภาษณ์จะเป็นการสร้างความรู้สึกร่วมให้กับผู้ให้สัมภาษณ์มีความสบายใจ มั่นใจและวางใจในการให้ข้อมูล กล่าวเปิดเผยข้อมูลหรือเรื่องราวตลอดจนความคิด จนทำให้บรรลุวัตถุประสงค์ของการวิจัย โดยผู้สัมภาษณ์ไม่ควรชี้นำคำตอบแก่ผู้ให้สัมภาษณ์ ควรสร้างบรรยากาศให้มีความเป็นธรรมชาติเหมือนกับการสนทนาในชีวิตประจำวันที่ทั้งสองฝ่ายมีการแลกเปลี่ยนซึ่งกันและกัน จะเรียกว่า เป็นการกระทำทางสังคมอย่างหนึ่ง อีกนัยหนึ่งเป็นเหมือนการเดินทาง ที่ผู้สัมภาษณ์เป็นนักเดินทางท่องเที่ยวไปในดินแดนที่ตนเองไม่คุ้นเคยและมีผู้ให้สัมภาษณ์เป็นผู้นำทาง เหล่านี้ถือเป็นรูปแบบหนึ่งของการสนทนา ที่ประกอบด้วย 3 ประเภท คือ 1) การสนทนาในชีวิตประจำวัน เป็นการพูดคุยแบบไม่มีโครงสร้าง 2) การสนทนาเชิงวิชาชีพ เป็นการกำหนดจุดมุ่งหมายที่ชัดเจน มีโครงสร้างที่ยืดหยุ่น 3) การสนทนาเชิงปรัชญา เป็นการสนทนาที่ต่างฝ่ายต่างมีประเด็น มีเหตุและผลเชิง

ตรรกะของตนเอง มีการชักใช้ไล่เลียงและตอบโต้กัน โดยมีจุดมุ่งหมายอยู่ที่การเข้าใจความหมาย และตรรกะของอีกฝ่าย

4.2.2.3) หลักการและแนวทางในการปฏิบัติในการสัมภาษณ์เชิงลึก ประกอบด้วย 1) มุ่งทำความเข้าใจโลกในชีวิตจริงของผู้ตอบ 2) เน้นความหมายของผู้ตอบ 3) ให้ความสำคัญกับข้อมูลเชิงคุณภาพ 4) เน้นข้อมูลเชิงพรรณนา 5) เจาะจง 6) เปิดกว้าง 7) ดำเนินอย่างมีจุดเน้น 8) ทำสิ่งที่ไม่ขัดให้กระจายโดยเร็ว 9) จับตาต่อการเปลี่ยนแปลงที่อาจเกิดขึ้นระหว่างการสัมภาษณ์ 10) ทำการบ้านให้ดี 11) ใส่ใจในความสัมพันธ์กับผู้ให้สัมภาษณ์ และ 12) ทำการสัมภาษณ์ให้เป็นที่น่าประทับใจ

4.2.2.4) ผู้ให้สัมภาษณ์ ต้องมีลักษณะสำคัญ 5 ประการ ประกอบด้วย 1) มีความรู้ที่ดีในเรื่องที่ให้สัมภาษณ์ 2) ยังอยู่ในวงการ 3) ไม่ควรเป็นคนเดียวกับผู้สัมภาษณ์ 4) มีเวลาสำหรับการสัมภาษณ์ และ 5) เป็นนักเล่าเรื่องที่ดี

4.2.2.5) แนวคำถาม (interview guide) คือหัวข้อที่จะใช้ในการเก็บข้อมูล พร้อมด้วยคำถามปลายเปิดที่นักวิจัยสร้างขึ้น ต้องมีลักษณะยืดหยุ่นได้ มีโครงสร้างที่ไม่เคร่งครัด ไม่มีคำตอบเตรียมไว้ล่วงหน้าเพื่อให้ผู้ตอบเลือก โดยนักวิจัยควรนำแนวคำถามที่สร้างขึ้นไปทดลองสัมภาษณ์บุคคลที่มีลักษณะคล้ายกับกลุ่มตัวอย่างที่จะเลือกมาสัมภาษณ์จริงแล้วนำผลไปปรับปรุงก่อนนำไปใช้จริง

4.2.2.6) ประเภทของถาม ได้ให้ความสำคัญกับคำถาม 3 ชนิด คือ 1) คำถามหลัก เพื่อใช้ในการเปิดประเด็น 2) คำถามเพื่อเก็บรายละเอียด/ความชัดเจน เมื่อผู้ให้สัมภาษณ์ตอบคำถามแล้วแต่ยังขาดความชัดเจน และ 3) คำถามเพื่อตามประเด็น เพื่อให้ได้ข้อมูลเพิ่มเติม

4.2.2.7) ผู้สัมภาษณ์ ถือเป็นเครื่องมือที่ดีที่สุดในการเก็บข้อมูล ควรมีคุณสมบัติในเรื่องหลัก ๆ 3 ประการ คือ 1) มีความรู้ 2) ฉลาดถาม - ฉลาดฟัง 3) มีมนุษยสัมพันธ์ที่ดี

4.2.2.8) การบันทึกการสัมภาษณ์ ควรทำการบันทึก 2 แบบไปพร้อมกัน คือ บันทึกเสียงและการบันทึกคำสำคัญหรือประเด็นสำคัญลงในกระดาษ

4.2.2.9) การอภิปรายกลุ่ม คือ กระบวนการในการเก็บข้อมูลอย่างหนึ่ง โดยใช้กระบวนการกลุ่มเป็นเครื่องมือโดยแบ่งออกเป็น 3 แบบคือ 1) การสัมภาษณ์กลุ่ม (Group Interview) เป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยการสัมภาษณ์ผู้ให้ข้อมูลหลายคนในเวลาเดียวกัน ซึ่งเป็นกลุ่มผู้ที่มีความรู้ดี ในเรื่องที่นักวิจัยต้องการศึกษา 2) กลุ่มเดลฟาย (Delphi Technique) เป็น

กลุ่มแต่เพียงในนาม (nominal group) เพราะในระหว่างการเก็บข้อมูล สมาชิกไม่ได้มาอยู่พร้อมหน้ากันเพื่ออภิปราย นักวิจัยเพียงแต่ขอให้ผู้เชี่ยวชาญที่เลือกมาจำนวนหนึ่ง ตอบคำถามและแสดงความคิดเห็นต่อข้อมูลเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่ตนได้เตรียมไว้ 3) กลุ่มเสมือนจริง (Virtual Group) เป็นกระบวนการกลุ่มที่อาศัยความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีในการสื่อสารเป็น “พื้นที่” (platform) สำหรับการอภิปรายของกลุ่มคนที่นักวิจัยเลือกมาเพื่อการรวบรวมข้อมูลโดยเฉพาะ โดยสมาชิกอาจไม่ต้องอยู่พร้อมกันทุกคนในสถานที่เดียวกัน แต่อาจมีการพูดคุยผ่านโลกออนไลน์ เพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องและความน่าเชื่อถือของข้อมูล

4.2.3) การวิเคราะห์ข้อมูล เป็นการจัดการข้อมูลที่ได้มาเพื่อคัดแยกเอาข้อมูลที่มีความน่าสนใจหรือเป็นประโยชน์ในการทำความเข้าใจเรื่องที่ศึกษา แล้วให้รหัสไว้เพื่อให้สามารถเข้าถึงได้สะดวกในการวิเคราะห์

5) ความถูกต้องและความน่าเชื่อถือของผลการวิจัย แบ่งออกเป็น 2 ระดับ ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกันเป็นอย่างมาก คือ

5.1) ในระดับข้อมูล หมายถึง ความถูกต้องตามความเป็นจริงของปรากฏการณ์หรือประเด็นที่ศึกษา ความถูกต้องในระดับนี้ถือเป็นความถูกต้องภายใน (internal validity) ซึ่งขึ้นอยู่กับการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยการออกแบบการวิจัยต้องมีความรัดกุม เลือกแหล่งข้อมูล เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลและผู้ที่ทำหน้าที่ในการเก็บข้อมูลให้มีความเหมาะสม ควรมีวิธีในการตรวจสอบความถูกต้องของข้อมูลโดยใช้หลักการสามเส้า (triangulation) เช่น ใช้ข้อมูลหลายประเภท (data triangulation) ใช้วิธีในการเก็บข้อมูลหลายแบบ (methodological triangulation) ใช้ผู้เก็บข้อมูลหลายคน (investigator triangulation) หรือใช้หลายมุมมองในการศึกษา (theoretical triangulation) เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของข้อมูลที่ใช้

5.2) ในระดับผลการศึกษา หมายถึง ความน่าเชื่อถือหรือวางใจได้ (credibility/trustworthiness) ว่าผลที่ได้จากการศึกษาต้องมีความถูกต้อง สมเหตุสมผล และสามารถตรวจสอบได้ ไม่ว่าผลนั้นจะอยู่ในรูปแบบของคำอธิบาย ข้อสรุป การตีความ หรือแนวคิดทฤษฎี แต่ความถูกต้องในระดับผลการศึกษา เป็นความถูกต้องภายนอก (external validity) ซึ่งเกี่ยวกับกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูล ว่าทำได้ดีและมีความเหมาะสมเพียงใด

การประชุมกลุ่มย่อย (Focus group)

การประชุมกลุ่มย่อย (Focus group) หมายถึง วิธีในการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงคุณภาพที่กระตุ้นให้สมาชิกในกลุ่มขนาดเล็กได้แสดงความคิดเห็นและอภิปรายความเห็นอย่างกว้างขวาง ในประเด็นที่มีความเฉพาะเจาะจง ตามจุดมุ่งหมายที่ได้กำหนดไว้ โดยมีผู้ดำเนินการประชุม (Moderator) เป็นผู้ที่คอยจุดประเด็นในการสนทนาเพื่อชักจูงให้กลุ่มแสดงความคิดเห็นอย่างลึกซึ้ง และตรงประเด็น โดยปราศจากผู้ชี้นำทางความคิดหรือการตัดสินใจใด ๆ (ปัญญา ธีระวิทย์เลิศ, 2559; รัตนะ บัวสนธ์, 2558)

ความสำคัญของการประชุมกลุ่มย่อย

การประชุมกลุ่มย่อยเป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ทำงานและสามารถใช้ได้กับประเด็นปัญหาที่มีความขัดแย้ง (Controversial) และมีความเปราะบาง ไวต่อความรู้สึก (Sensitive) เพราะมีความยืดหยุ่นและสามารถสืบค้นข้อมูลเชิงลึกได้ และผู้สนทนาสามารถแสดงความคิดเห็นได้อย่างอิสระ

วิธีการประชุมกลุ่มย่อย

1) การกำหนดผู้จัดการประชุมกลุ่มย่อย ควรประกอบด้วย 3 คน ดังนี้

1.1) ผู้ดำเนินการประชุม (Moderator) เป็นผู้ทำหน้าที่ในการดำเนินการประชุม สร้างบรรยากาศในการสนทนาให้มีความเป็นกันเอง ปราศจากความเครียด ควบคุมการสนทนา และการดำเนินการสนทนาให้ตรงประเด็นที่ต้องการ รวมถึงป้องกันความขัดแย้งระหว่างผู้เข้าร่วมประชุม โดยผู้ดำเนินการประชุมอาจเป็นหัวหน้าโครงการวิจัยหรือผู้ร่วมวิจัยที่มีศักยภาพในการเป็นพิธีกร

1.2) ผู้จดบันทึก (Note Taker) เป็นบุคคลที่ช่วยดำเนินการประชุมโดยมีหน้าที่ในการจดบันทึกอย่างสรุปให้ครบทุกประเด็นและอยู่ในการประชุมตลอดเวลาโดยทำการบันทึกเสียง จดหัวข้อสำคัญของการสนทนาและไม่ควรแสดงความคิดเห็นใด ๆ ในการประชุม

1.3) ผู้ช่วยเหลือทั่วไป (Assistance) เป็นผู้ช่วยทำหน้าที่ในการอำนวยความสะดวกในการสนทนาทุกเรื่อง โดยไม่ประจำอยู่ที่ใดที่หนึ่ง เริ่มต้นจากการต้อนรับผู้เข้าร่วมประชุม จัดหาที่นั่งในการประชุม ดูแลเรื่องเครื่องดื่ม อาหารว่าง บันทึกภาพและช่วยเหลือในเรื่องอื่น ๆ เพื่ออำนวยความสะดวกให้การประชุมเป็นไปด้วยความเรียบร้อย

2) ในระหว่างการประชุม ควรมีการสร้างบรรยากาศและสถานการณ์ให้เป็นไปตามธรรมชาติ ให้ทุกคนได้แสดงความคิดเห็นอย่างเสรี ปราศจากการชี้นำ ผู้ดำเนินการควรกระตุ้นให้สมาชิกที่มีสถานภาพด้อยที่สุดได้แสดงความคิดเห็นและควบคุมสมาชิกที่มีอำนาจสูงสุดไม่ให้

แสดงความคิดเห็นมากจนเกินของเขต ป้องกันการสนทนานอกประเด็น ถ้าหากมีการสนทนานอกประเด็นควรมีการดึงกลับมาโดยไม่ทำให้ผู้สนทนาเกิดความรู้สึกเสียหน้า

วิธีการประชุมกลุ่มย่อยอย่างมีประสิทธิภาพ

1) การเลือกผู้เข้าร่วมประชุม ควรเลือกกลุ่มบุคคลที่มีลักษณะคล้ายกัน (Homogeneous) เนื่องจากการใช้ผู้เข้าร่วมประชุมที่มีลักษณะแตกต่างกันอย่างมากจะทำให้ไม่สามารถสรุปหรือจับประเด็นได้ เนื่องจากข้อมูลจะมีความขัดแย้งกัน เช่น เยาวชนเสนอว่าร้านเกมในชุมชนมีจำนวนน้อยไปไม่เพียงพอต่อความต้องการ แต่ผู้ปกครองอาจคิดว่าร้านเกมมีมากเกินไปทำให้เยาวชนไปมั่วสุมที่ร้านเกม ทำให้ข้อมูลนั้นมีความขัดแย้งกันและไม่สามารถลงข้อสรุปได้

2) ไม่ควรเลือกบุคคลที่มีอิทธิพลต่อบุคคลอื่น ๆ เข้ามาประชุมด้วย เพราะอาจจะส่งผลให้การแสดงออกของบุคคลอื่น ๆ ถูกจำกัด

3) ไม่ควรเลือกบุคคลที่มีความสนิทสนมหรือเครือญาติมาประชุมร่วมกัน เพราะอาจจะส่งผลให้ขาดการแสดงความคิดเห็นอย่างตรงไปตรงมา

4) การจัดพื้นที่นั่ง ไม่ควรจัดที่นั่งประชุมให้สมาชิกหันหน้าเข้าหาผู้ดำเนินการคนเดียวหรือผู้ดำเนินการประชุมอยู่บนเวทีที่สูงกว่าสมาชิกกลุ่ม ในลักษณะการนั่งฟังบรรยาย

5) การประชุมกลุ่มย่อย ควรจัดให้สมาชิกทุกคนนั่งอยู่ในระดับเดียวกัน โดยผู้ดำเนินการประชุมอยู่หัวโต๊ะ และผู้บันทึกการประชุมนั่งอยู่ข้าง ๆ ติดกัน ควรจัดโต๊ะประชุมเป็นรูปวงรี ให้สมาชิกหันหน้าเข้าหากันและหันหน้าตรงกับผู้ดำเนินการประชุมเพื่อให้เกิดการพูดคุยและแลกเปลี่ยนกันได้ดี ทุกคนสามารถมองเห็นกัน และมีผู้ช่วยดำเนินการประชุมนั่งใกล้ ๆ เพื่อบันทึกข้อมูลต่าง ๆ

6) ผู้ดำเนินการประชุมจะต้องเตรียมประเด็นในการประชุมที่เป็นคำถามหลักและคำถามรอง รายชื่อพร้อมประวัติส่วนตัวสมาชิกที่จะเข้าร่วมประชุม ที่ควรกำหนดไว้ประมาณ 4 – 6 กลุ่ม โดยเลือกบุคคลภายในกลุ่มเดียวกันที่มีคุณลักษณะคล้ายกัน แต่บุคคลระหว่างกลุ่มจะมีลักษณะที่แตกต่างกันมาก

7) ในการใช้เทคนิคในการประชุมกลุ่มย่อย ผู้วิจัยที่เป็นหัวหน้าโครงการวิจัยหรือผู้ร่วมวิจัยที่มีความสามารถเป็นผู้ดำเนินการประชุมเอง หรือให้บุคคลอื่นเป็นผู้ดำเนินการประชุมให้ ถ้าผู้วิจัยมีส่วนได้ส่วนเสียกับกลุ่มบุคคลหรือประเด็นการประชุม จะทำให้เกิดอคติต่อการประชุมได้ อาจใช้บุคคลภายนอกเป็นผู้ดำเนินการประชุม

8) สิ่งที่สำคัญ ผู้ดำเนินการประชุมควรจําชื่อผู้เข้าร่วมประชุมให้ได้ทุกคน โดยศึกษามาก่อนว่าใครบ้างที่จําเข้าร่วมประชุม เพื่อเป็นการให้เกียรติผู้เข้าร่วมประชุม

9) ผู้ดำเนินการประชุมต้องพยายามเชิญสมาชิกที่ไม่ค่อยได้แสดงความคิดเห็น ให้แสดงความคิดเห็นในทุก ๆ ประเด็นของการสนทนา เพราะความคิดเห็นในประเด็นที่เหมือนหรือแตกต่างกันจากผู้อื่นไม่มีถูกหรือผิดเพราะเป็นความคิดเห็นส่วนบุคคล

10) เมื่อการอภิปรายสิ้นสุดลง ผู้ดำเนินการประชุมควรสรุปโดยไม่ใช้ความคิดเห็นส่วนตัวในการสรุป ควรสอบถามความเห็นชอบของสมาชิกอีกครั้งเพื่อไม่ให้เกิดข้อกังขาในการประชุม

การให้รหัสข้อมูล

การให้รหัสข้อมูล หมายถึง การคัดสรรข้อมูลที่ได้จัดระเบียบแล้ว เพื่อเลือกเอาเฉพาะข้อมูลส่วนที่มีความน่าสนใจและน่าจะเป็นประโยชน์สำหรับการวิเคราะห์ ในขั้นนี้ผู้วิจัยจะอ่านข้อมูลอย่างพิถีพิถัน และกำหนดคำหรือวลีที่สั้น กระชับ เพื่อเป็นเครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ให้กับข้อความในข้อมูลที่เห็นว่าน่าสนใจ หรือเป็นประโยชน์สำหรับการทำความเข้าใจประเด็นที่ศึกษา โดยหน้าที่ของรหัสมีหน้าที่ดังนี้ (Ferrini-Mundy, 2000; ชาย โพธิ์สิตา, 2564)

1) เป็นหน่วยของข้อมูลพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ (analytical building blocks) เนื่องจากรหัสถูกกำหนดขึ้นเพื่อแทนข้อความที่ผู้วิจัยเห็นว่าน่าสนใจสำหรับการวิเคราะห์ ดังนั้นทุกอย่างที่เกิดขึ้นต่อไปในกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูลจึงขึ้นอยู่กับข้อมูลพื้นฐานเหล่านี้

2) เชื่อมโยงกับข้อความในข้อมูล (connecting with data) รหัสที่กำหนดให้กับข้อความในข้อมูลส่วนใดก็จะเชื่อมโยงกับข้อความส่วนนั้นในข้อมูล เปรียบเสมือนป้ายชื่อของสินค้าที่เชื่อมโยงไปสู่สินค้าชนิดนั้น

3) ย่อหรือทอนข้อมูลให้มีขนาดเล็กลง (data reduction) ในการวิเคราะห์ข้อมูล เราไม่ได้ใช้ข้อมูลทั้งหมดที่รวบรวมมา แต่เราเลือกเฉพาะส่วนที่เห็นว่าน่าสนใจ หรือน่าจะเป็นประโยชน์ในการทำความเข้าใจปรากฏการณ์ที่ศึกษาเท่านั้น โดยนัยของข้อมูลจำนวนมากที่เรามีอยู่ก็จะมีขนาดเล็กลง นอกจากนี้ ข้อความในข้อมูลที่ถูกเลือกมาจะถูกแทนที่ด้วยรหัสที่เป็นเพียงคำหรือวลีสั้น ๆ ที่ถูกกำหนด

2.2 งานวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษาที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษางานวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษาที่เกี่ยวข้อง พบว่าในประเทศไทยและต่างประเทศยังไม่มีงานวิจัยที่นำกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ไปใช้ในการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในรูปแบบงานวิจัยเชิงคุณภาพ มีเพียงการนำกรอบแนวคิดของ Van Hiele ซึ่งเป็นต้นแบบของการแบ่งระดับในกรอบแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime มาใช้ในการวิจัย ผู้วิจัยจึงได้ศึกษางานวิจัยเชิงคุณภาพที่เกี่ยวข้องกับกรอบแนวคิดของ Van Hiele ได้แก่

งานวิจัยในประเทศ

พินดา กองเกตุใหญ่ (2542) ได้ศึกษาเกี่ยวกับระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบ Van Hiele ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย คือ การศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบ Van Hiele ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น 2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและแบบสอบถามข้อมูลพื้นฐาน สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าสหสัมพันธ์ของเพียร์สันและค่าไคสแควร์ ผลการวิจัยพบว่า ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบ Van Hiele ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 2 และ 3 กระจายอยู่ในระดับที่ 1 2 และ 3 แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีแนวโน้มที่จะมีระดับความคิดในระดับ 3 สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2

สมควร สีชมพู (2549) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนตามโมเดลของ Van Hiele โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนตามโมเดลของ Van Hiele เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ สถานการณ์ปลายเปิดจำนวน 3 ปัญหา ผลการวิจัยพบว่าการใช้สถานการณ์ปลายเปิดในเนื้อหาด้านเรขาคณิต ทำให้นักเรียนแสดงความสามารถในการคิดทางเรขาคณิตของตนเองออกมาได้ เมื่อจำแนกแล้วได้เป็นระดับพื้นฐาน (level 0) จำนวน 9 โปรโตคอล และระดับที่ 1 (level 1) จำนวน 9 โปรโตคอลโดยที่ลักษณะการคิดในแต่ละระดับเป็นดังนี้ ระดับพื้นฐาน (level 0) การคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนพบว่ายังถูกจำกัดด้วยชื่อของรูปเรขาคณิตที่นักเรียนเคยเรียนในชั้นเรียน ระดับที่ 1 (level 1) การคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนพบว่าเป็นการวิเคราะห์องค์ประกอบ คุณสมบัติหรือกฎ และพิจารณาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของรูปเรขาคณิตโดยการทดลองด้วยวิธีต่าง ๆ

ปองกมล พันธุ์อาทิตย์ (2555) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดทางเรขาคณิตกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย 2 ข้อ ประกอบด้วย 1) ศึกษาการระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามแบบของ Van Hiele 2) ศึกษาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ

นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตและแบบวัดความสามารถทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า 1) ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบ Van Hiele ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มากที่สุดในระดับ 3 (การอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน) คิดเป็นร้อยละ 42.98 ระดับที่ 2 (การวิเคราะห์) คิดเป็นร้อยละ 21.19 ระดับที่ 4 (การอนุมานที่เป็นแบบแผน) คิดเป็นร้อยละ 15.20 ระดับที่ 1 (การมองเห็นรูปธรรมภายนอก) คิดเป็นร้อยละ 13.89 และระดับที่ 5 (การคิดขั้นสุดยอด) คิดเป็นร้อยละ 5.97 2) ระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มากที่สุดอยู่ที่ระดับปานกลาง คิดเป็นร้อยละ 51.16 รองลงมาในระดับสูง คิดเป็นร้อยละ 30.52 และในระดับต่ำ คิดเป็นร้อยละ 18.32

วัชรिता ภิรมย์ไกรภักดิ์ (2561) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการศึกษามโนทัศน์ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นตามระดับการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย 2 ข้อ ประกอบด้วย 1) ศึกษาโนทัศน์รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ห้องเรียนพิเศษ ตามระดับการคิดทางเรขาคณิตแบบแวนฮีลีโมเดล 2) ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ห้องเรียนพิเศษตามระดับการคิดทางเรขาคณิตแบบแวนฮีลีโมเดล เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบมโนทัศน์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและแบบสัมภาษณ์มโนทัศน์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นมีระดับการคิดทางเรขาคณิตแวนฮีลีโมเดลอยู่ในระดับ 0 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 34.69 รองลงมาคือ ระดับที่ 2 คิดเป็นร้อยละ 29.59 ระดับที่ 1 คิดเป็นร้อยละ 23.47 และระดับที่ 3 คิดเป็นร้อยละ 12.25 2) นักเรียนมีแนวคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยนักเรียนใช้กฎ นิยามและมีนักเรียนบางส่วนใช้การวาดรูปประกอบเพื่อทำความเข้าใจโจทย์และตัวเลือก และนักเรียนใช้การวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพื่ออธิบายแนวคิดในการหาคำตอบ

งานวิจัยต่างประเทศ

Gutiérrez et al. (1991) ได้ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการทัศนในการประเมินให้ได้มาซึ่งระดับของ Van Hiele โดยแบ่งกลุ่มตัวอย่างออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วย กลุ่ม A เป็นนักศึกษาครุสาขาประถมศึกษาที่มีความเชี่ยวชาญด้านวิทยาศาสตร์ กลุ่ม B เป็นนักศึกษาครุสาขาประถมศึกษาที่มีความเชี่ยวชาญด้านวิทยาศาสตร์สำหรับปฐมวัย และกลุ่ม C เป็นนักเรียน ระดับชั้นที่ (Grade) 8 โดยใช้แบบทดสอบ จำนวน 9 ข้อ ที่ถูกจัดอยู่ในกิจกรรม 5 กิจกรรม ผลการวิจัยพบว่าส่วนมากในกลุ่ม A และ B จะมีการคิดอยู่ในระดับที่ 1 โดยกลุ่ม A มีแนวโน้มที่จะมีระดับการคิดจากระดับที่ 2 ไปสู่ระดับที่ 3 กลุ่ม B มีแนวโน้มที่จะมีการพัฒนาจากระดับที่ 1 ไปสู่ระดับที่ 2 แต่กลุ่ม C มีแนวโน้มที่จะเริ่มมีระดับการคิดอยู่ในระดับที่ 1

Mei (2018) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชายและหญิงในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายโดยใช้ทฤษฎีการเรียนรู้เรขาคณิตของ Van Hiele จากทักษะทางคณิตศาสตร์โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย คือ การศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยพิจารณาตามเพศ ผลการวิจัยพบว่านักเรียน 5 คนอยู่ในระดับที่ 1 และมีนักเรียน 1 คนอยู่ในระดับ 0 นักเรียนที่เหลือทั้งหมดมีข้อบกพร่องหลายประการ เช่น การใช้คุณสมบัติไม่เหมาะสมในการแยกแยะ ระนาบ และเรียงลำดับโครงสร้างเรขาคณิต นักเรียนสามารถระบุรูปเรขาคณิตตามคุณสมบัติของส่วนประกอบของสี่เหลี่ยมได้ จากการวิเคราะห์ระดับการคิดของนักเรียน การสร้างตัวอย่างการเรียนรู้โดยใช้ 5 ระดับขั้นการเรียนรู้ของแวน ฮีลี คือ: (1) ระยะเวลาของข้อมูล, (2) ระยะเวลาช่วยเหลือ, (3) ระยะเวลาอธิบาย, (4) ระยะเวลาเรียนรู้ด้วยตนเอง, และ (5) ระยะเวลาผสมผสาน ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่าไม่มีความแตกต่างระหว่างนักเรียนชายและนักเรียนหญิงในระดับการคิด เนื่องจากทั้งนักเรียนชายและนักเรียนหญิงอยู่ในระดับที่ 1 แต่มีความแตกต่างในระดับการคิดของนักเรียนจากทักษะทางคณิตศาสตร์ของพวกเขา นักเรียนทุกคนในกลุ่มคะแนนสูงและกลุ่มคะแนนกลางอยู่ในระดับ 1 ในขณะที่นักเรียนเพียงคนเดียวอยู่ในระดับที่ 1 และคนอื่น ๆ อยู่ในระดับ 0 ในกลุ่มคะแนนต่ำ

Sulistiowati et al. (2019) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอุปสรรคของนักเรียนในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตโดยใช้ระดับการคิดของ Van Hiele โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย คือ การวิเคราะห์อุปสรรคของนักเรียนในการแก้ปัญหาเรขาคณิตโดยใช้ระดับความคิดของ Van Hiele เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตตามระดับของ Van Hiele ผลการวิจัยพบว่าอุปสรรคหลักของนักเรียนในระดับที่ 1 คือ การตีความปัญหาเป็นแบบจำลองทาง

คณิตศาสตร์ ในขณะที่อุปสรรคหลักของนักเรียนในระดับที่ 2 และระดับที่ 3 อยู่ในกระบวนการแก้ปัญหา

Lutfi and Jupri (2020) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความสามารถเชิงปริภูมิของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยใช้ระดับการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele เป็นพื้นฐานสำหรับความคิดเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย คือ การระบุความสามารถเชิงปริภูมิของนักเรียนโดยใช้ระดับการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มที่ผลสัมฤทธิ์สูงและต่ำ กลุ่มละ 3 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบอัตนัยเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมคล้ายและแบบสัมภาษณ์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนทั้ง 2 กลุ่มมีความแตกต่างในทุก ๆ ตัวชี้วัดของความสามารถเชิงปริภูมิ โดยอ้างอิงจากระดับการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ในด้านการมองเห็นพื้นที่ การหมุนและการวางทิศทางของปริภูมิ ซึ่งระดับสูงสุดที่นักเรียนได้ คือ ระดับ 2 มีจำนวน 11, 5 และ 3 คนตามลำดับ ในขณะที่ตัวชี้วัดของการแสดงภาพและความสัมพันธ์ทางพื้นที่ นักเรียนที่อยู่ในระดับสูงสุดได้ คือ ระดับ 1 มีจำนวน 16 และ 15 คนตามลำดับ

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยเรื่องการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime มีความมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ (Qualitative Research) เนื่องจากการวิจัยเชิงคุณภาพมีการออกแบบการวิจัยที่ยืดหยุ่น เป็นการใช้ข้อมูลที่เป็นข้อความในวิเคราะห์ มีการเก็บรวบรวมข้อมูลจากกลุ่มเป้าหมายจำนวนน้อยแล้วนำไปวิเคราะห์ โดยใช้ผลจากงานปฏิบัติ (Task) การสัมภาษณ์แบบใช้งานปฏิบัติเป็นฐาน (Task-base interview) การให้รหัส การวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) เพื่อให้การวิจัยเป็นไปตามวัตถุประสงค์ ผู้วิจัยได้แบ่งการวิจัยออกเป็น 3 ระยะ ประกอบด้วย ระยะที่ 1 กรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ศึกษา วิเคราะห์ หลักสูตรและเนื้อหาคณิตศาสตร์ของสถานศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แล้วประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของกรอบแนวคิดที่ใช้ในการวิจัย ระยะที่ 2 สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แบบสัมภาษณ์โดยใช้งานเป็นฐาน (Task – base interview form) และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ โดยนำเครื่องมือดังกล่าวเข้าการประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) เพื่อพิจารณาความเหมาะสม ระยะที่ 3 ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ทั้ง 4 ด้าน โดยระยะนี้จะแบ่งนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 40 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วย นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ ซึ่งพิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของสถานศึกษา จากนั้นให้นักเรียนทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แล้วหานักเรียนเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน ซึ่งการหานักเรียนตัวแทนของแต่ละกลุ่มดังกล่าวนี้จะพิจารณาจากผลการทำงานปฏิบัติ (Task) ของนักเรียนและข้อมูลของนักเรียนจากครูผู้สอน รวมทั้งความยินยอมของนักเรียน แล้วจึงนำนักเรียนทั้ง 9 คนที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มไปดำเนินการสัมภาษณ์แบบใช้

งานเป็นฐาน (Task – base interview) เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปใช้ในการวิเคราะห์ รายละเอียดแต่ละ
ระยะเป็นไปตามขั้นตอนดังนี้

ตาราง 8 วิธีการและขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

คำถามการ วิจัย	การดำเนินงาน	ระยะที่/ ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน เรื่อง การให้ เหตุผลของรูป สามเหลี่ยมและ รูปสี่เหลี่ยม อยู่ ในกลุ่มสูง ปาน กลางและต่ำจะ มีการให้เหตุผล ทางเรขาคณิต ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูป สามเหลี่ยมและ รูปสี่เหลี่ยม อย่างไร	ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่ เกี่ยวข้องกับกรอบแนวคิดการให้ เหตุผลทางเรขาคณิต ตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	ระยะที่ 1	ทำให้ทราบถึงกรอบ แนวคิดการให้เหตุผล ทางเรขาคณิต ตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ที่ใช้ในการ วิจัย
	ศึกษา วิเคราะห์หลักสูตรและ เนื้อหาของสถานศึกษาใน รายวิชาคณิตศาสตร์ ในชั้น มัธยมศึกษาตอนต้น ที่เกี่ยวข้อง กับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยม	ระยะที่ 1	ทำให้ทราบถึง ขอบเขตของหลักสูตร และเนื้อหาที่ เกี่ยวข้องกับการให้ เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยม

ตาราง 8 (ต่อ)

คำถามการวิจัย	การดำเนินงาน	ระยะที่/ ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
	กำหนดกรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม (ฉบับร่าง) ที่ใช้ในการวิจัย	ระยะที่ 1	ได้กรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม (ฉบับร่าง)
	นำกรอบแนวคิดที่ใช้ในการวิจัย (ฉบับร่าง) ซึ่งได้จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิด Gutierrez และ Jaime เพื่อนำไปประชุมกลุ่มย่อย (Focus group)	ระยะที่ 1	กรอบแนวคิดที่ใช้ในการวิจัย

ตาราง 8 (ต่อ)

คำถามการวิจัย	การดำเนินงาน	ระยะที่/ ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
	สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย 1) งานปฏิบัติ (Task) จำนวน 30 ข้อ 2) แบบสัมภาษณ์ 3) แบบบันทึกการสัมภาษณ์ ที่ใช้ในการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	ระยะที่ 2	ได้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย (ฉบับร่าง) ประกอบด้วย งานปฏิบัติ (Task) จำนวน 30 ข้อ แบบสัมภาษณ์ แบบบันทึกการสัมภาษณ์
	นำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย 1) งานปฏิบัติ (Task) 2) แบบสัมภาษณ์ 3) แบบบันทึกการสัมภาษณ์ ไปประชุมกลุ่มย่อย (Focus group)	ระยะที่ 2	ได้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย งานปฏิบัติ (Task) จำนวน 15 ข้อ แบบสัมภาษณ์ แบบบันทึกการสัมภาษณ์

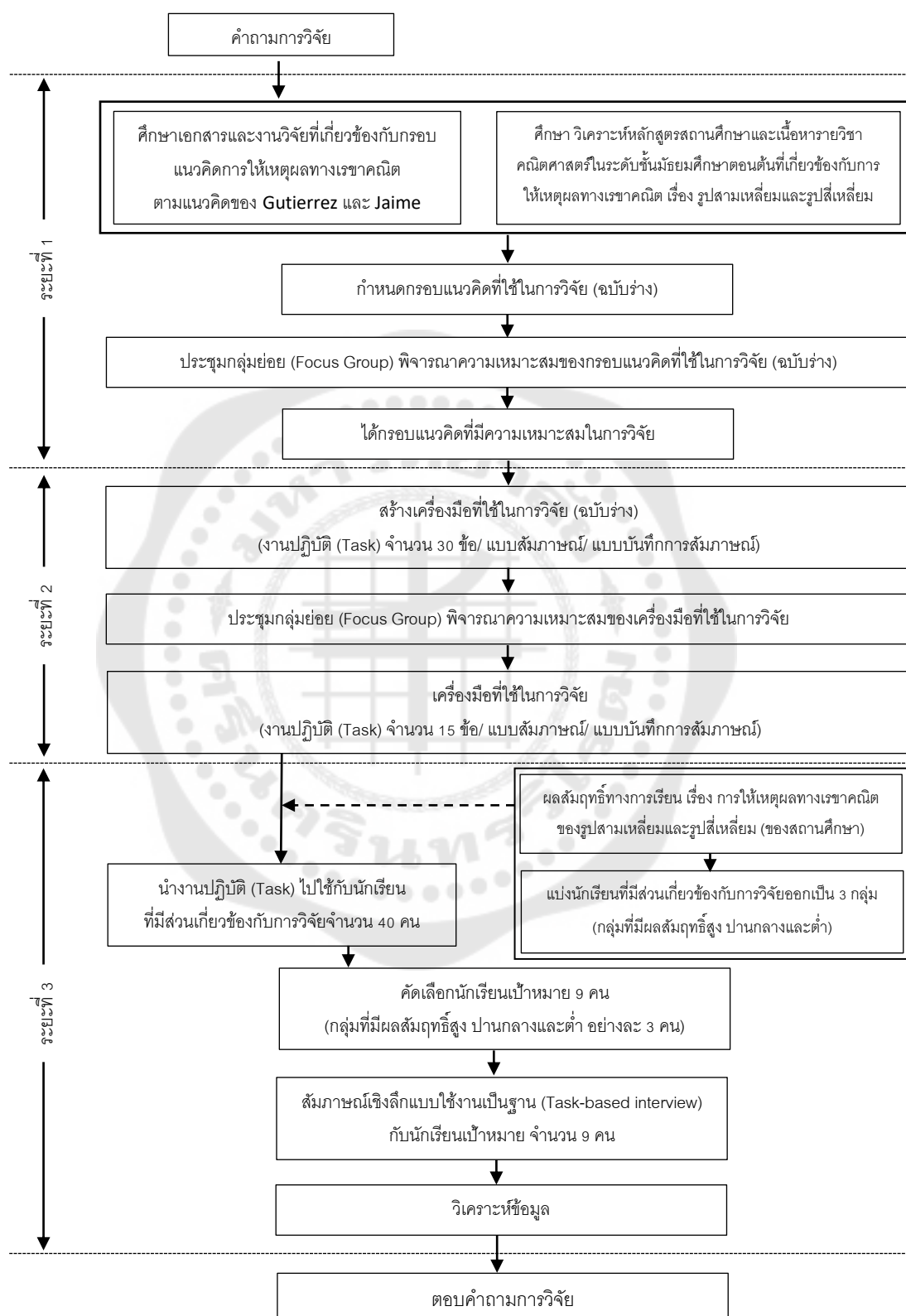
ตาราง 8 (ต่อ)

คำถามการ วิจัย	การดำเนินงาน	ระยะที่/ ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
	แบ่งนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับ การวิจัย จำนวน 40 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วย นักเรียน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลาง และต่ำ ซึ่งพิจารณาจาก ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยมของสถานศึกษา จากนั้นให้นักเรียนทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทาง เรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและ รูปสี่เหลี่ยม แล้วหานักเรียนเพื่อ เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน	ระยะที่ 3	นักเรียนเป้าหมาย จำนวน 9 คน ประกอบด้วย นักเรียนตัวแทนกลุ่ม ที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน

ตาราง 8 (ต่อ)

คำถามการวิจัย	การดำเนินงาน	ระยะที่/ ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
	สัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task-based interview) กับนักเรียนเป้าหมาย จำนวน 9 คน	ระยะที่ 3	ได้ข้อมูลจากการสัมภาษณ์เชิงลึกของนักเรียนเป้าหมาย
	ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลาง และต่ำ ที่ได้จากการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task-based interview) โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ	ระยะที่ 3	ได้การให้เหตุผลทางเรขาคณิตเรื่งรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตามแนวคิดของกลูเฮอเรสและเจมี ของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ

ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย



ภาพประกอบ 1 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

ระยะที่ 1 กำหนดกรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิด Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

1. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกรอบแนวคิดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม โดยศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลโมเดล การแบ่งทักษะทางเรขาคณิตตามระดับขั้นของ Alan Hoffer การแบ่งประเภทของการคิดทางเรขาคณิตของ De Viller และการประเมินระดับของ Van Hiele ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลของ Gutierrez และ Jaime เพื่อนำมากำหนดเป็นกรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามองค์ประกอบที่กำหนดไว้ 4 ด้าน

2. ศึกษา วิเคราะห์หลักสูตรสถานศึกษาและเนื้อหาเรขาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาจากแหล่งข้อมูลดังต่อไปนี้ เล่มหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียน คำอธิบายรายวิชากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ฉบับปรับปรุง 2560 ของสถานศึกษา แล้วนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อให้ทราบขอบเขตของเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

3. กรอบแนวคิดการวิจัยการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิด Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

แบ่งออกเป็น 4 ด้าน ประกอบด้วย การตระหนักรูปร่าง บทนิยาม การจัดหมวดหมู่ และการพิสูจน์ และในแต่ละด้านจะถูกแบ่งออกเป็นระดับ ดังนี้

3.1) การให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการตระหนักรูปร่าง (Recognition) หมายถึง การรู้จักประเภท องค์ประกอบและสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต โดยแบ่งออกเป็น 2 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูป หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกหรือองค์ประกอบภายนอก

ระดับที่ 2: การพิจารณาจากสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การจำแนกประเภทของรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยม 3.2) การให้

เหตุผลทางเรขาคณิตด้านบทนิยาม (Definition) หมายถึง การกำหนดสมบัติและการนำสมบัติข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท ไปใช้ในการให้เหตุผลและการสร้างข้อสรุป โดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

3.2.1) ประเภทการใช้บทนิยาม (Use of definitions) หมายถึง หมายถึง หมายถึง หมายถึง หมายถึง การพิจารณาเงื่อนไขหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วนำสมบัติ ข้อสรุป บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท มาใช้ในการให้เหตุผล โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2: การใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการยกตัวอย่างประกอบ เพื่อแสดงสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระดับที่ 3: การใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว เพื่อแสดงสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ระดับที่ 4: การแสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้ หมายถึง การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา โดยการแสดงความเท่ากันทุกประการหรือพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

3.2.2) ประเภทการกำหนดบทนิยาม (Formulation of definitions) หมายถึง การนำลักษณะภายนอก สมบัติทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการกำหนดบทนิยาม โดยแบ่งออกเป็น 4 ระดับ ประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การระบุลักษณะภายนอกที่เกี่ยวข้อง หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก

ระดับที่ 2: การระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ระดับที่ 3: การจัดกลุ่มของสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและเพียงพอ หมายถึง การกำหนดสมบัติของรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในการกำหนดสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอกับรูปที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนเกี่ยวกับสมบัติที่ได้

ระดับที่ 4: การพิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามได้ หมายถึง การนำบทนิยามและทฤษฎีบทมาใช้ในการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยการแสดงความเท่ากันทุกประการ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ถาม

3.3) กระบวนการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการจัดหมวดหมู่ (Classification) หมายถึง หมายถึง การจำแนกหรือจัดกลุ่มของรูปเรขาคณิต โดยใช้ลักษณะภายนอกหรือสมบัติในการจัดหมวดหมู่เพื่อแสดงความเหมือนและความแตกต่างกัน โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับประกอบด้วย

ระดับที่ 1: การจำแนกโดยลักษณะเฉพาะภายนอก หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างกันของรูปที่กำหนดให้แต่ละรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก

ระดับที่ 2: การจำแนกโดยสมบัติเฉพาะทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างกันของรูปที่กำหนดแต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง การวัดขนาดของด้านหรือมุมแล้วนำมาสรุป

ระดับที่ 3: การอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่ม หมายถึง การระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างของรูปที่กำหนดให้แต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในการระบุสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอกับรูปที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนเกี่ยวกับสมบัติที่ได้

3.4) กระบวนการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการพิสูจน์ (Proof) หมายถึง การใช้คุณสมบัติ สัจพจน์ ทฤษฎีบทและบทนิยาม เพื่ออธิบายหรือแสดงให้เห็นว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง โดยแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (ซึ่งเริ่มตั้งแต่ระดับที่ 2) ประกอบด้วย

ระดับที่ 2: การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ หมายถึง การให้เหตุผลประกอบข้อความที่กำหนดให้โดยโดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้หรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์แล้วยกตัวอย่างประกอบหรือการใช้สมบัติในการพิสูจน์

ระดับที่ 3: การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน หมายถึง การให้เหตุผลประกอบข้อความที่กำหนดให้โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์และทราบว่าเป็นจริงหรือเท็จ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้เพราะไม่เคยพิสูจน์หรือการพิสูจน์อย่างไม่มีลำดับขั้นตอน

ระดับที่ 4: การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน หมายถึง การให้เหตุผลประกอบข้อความที่กำหนดให้อย่างมีลำดับขั้นตอน ทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

4. ประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) พิจารณาความเหมาะสมของกรอบแนวคิดในการวิจัย

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้นำกรอบแนวคิดในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime (ฉบับร่าง) ที่แสดงพฤติกรรมทั้ง 4 ด้าน ประกอบด้วย ด้านการตระหนักรูปร่าง ด้านบทนิยาม ด้านการจัดหมวดหมู่และด้านการพิสูจน์เสนอต่อ อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมและผู้ทรงคุณวุฒิที่มีความเชี่ยวชาญทางด้านเรขาคณิต จำนวน 2 ท่าน และพิจารณาร่วมกับผู้วิจัย รวมทั้งหมด 5 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสม และปรับปรุงแก้ไข โดยการประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) จนได้เป็นกรอบแนวคิดในการวิจัย ดังตารางที่ 9 ถึง 13

ตาราง 9 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง

ระดับที่ 1	ระดับที่ 2
(RL1) จำแนกรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอกหรือองค์ประกอบภายนอก เช่น ลักษณะของเส้นลักษณะของมุม และลักษณะของรูปที่มีความคล้ายหรือแตกต่างกับรูปที่เคยเห็น	RL2) จำแนกรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยม เช่น บทนิยามของรูปสามเหลี่ยม คือ มีด้าน 3 ด้าน มีมุม 3 มุมและเป็นรูปปิด บทนิยามของรูปสี่เหลี่ยม คือ มีด้าน 4 ด้าน มีมุม 4 มุมและเป็นรูปปิด
หมายเหตุ RL แทน Recognition Level หมายถึง ระดับขั้นการตระหนักรูปร่าง	

ด้านบทนิยาม แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ประกอบด้วย การใช้บทนิยามและ การกำหนดบทนิยาม

ตาราง 10 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม

ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 4
(UL2) เมื่อกำหนดบทนิยามมา ให้ นักเรียนสามารถนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้มาใช้ในการ ยกตัวอย่างประกอบ เพื่อแสดง สัมพันธะระหว่างบทนิยามที่ กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้	(UL3) เมื่อกำหนดบทนิยามมา ให้ นักเรียนสามารถนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์ แบบขั้นตอนเดียว เพื่อแสดง สัมพันธะระหว่างบทนิยามที่ กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้	(UL4) เมื่อกำหนดบทนิยามมา ให้ นักเรียนสามารถนำบทนิยาม ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้มา โดยการแสดง ความเท่ากันทุกประการหรือ พิสูจน์แบบหลายขั้นตอน เพื่อ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างบท นิยามที่กำหนดให้และสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้

หมายเหตุ UL แทน Use of definition Level หมายถึง ระดับขั้นการใช้บทนิยาม

ตาราง 11 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม

ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 4
(FL1) เมื่อกำหนดรูป สามเหลี่ยมหรือรูป สี่เหลี่ยมมาให้ นักเรียนกำหนดสมบัติ ของรูปโดยพิจารณา จากลักษณะภายนอก เช่น เป็นรูป สามเหลี่ยม เป็นรูป สี่เหลี่ยม เป็นต้น	(FL2) เมื่อกำหนดรูป สามเหลี่ยมหรือรูป สี่เหลี่ยมมาให้ นักเรียนกำหนดสมบัติ ของรูปโดยพิจารณา จากบทนิยามของรูป และทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้อง เช่น จำนวน ด้าน จำนวนมุม จำนวนแกนสมมาตร	(FL3) เมื่อกำหนดรูป สามเหลี่ยมหรือรูป สี่เหลี่ยมมาให้ นักเรียนกำหนดสมบัติ ของรูปโดยพิจารณา จากบทนิยามของรูป และทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้อง ในการ กำหนดสมบัติที่จำเป็น และเพียงพอกับรูป	(FL4) เมื่อกำหนดบท นิยามมาให้ นักเรียน สามารถนำบทนิยาม และทฤษฎีบทมาใช้ การพิสูจน์แบบหลาย ขั้นตอน โดยการแสดง ความเท่ากันทุก ประการ เพื่อแสดง ความสัมพันธ์ระหว่าง บทนิยามที่กำหนดให้

ตาราง 11 (ต่อ)

ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 4
	ผลรวมมุมภายในของรูป ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นทแยงมุม ความขนาน ความยาวของด้านและลักษณะของมุมแต่ละมุม เป็นต้น	ที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนเกี่ยวกับสมบัติที่ได้	และสิ่งที่โจทย์ถาม
หมายเหตุ FL แทน Formulation of definition Level หมายถึง ระดับขั้นการกำหนดบทนิยาม			

ตาราง 12 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่

ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3
(CL1) เมื่อกำหนดรูปมาให้ 2 รูป นักเรียนระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างของรูปแต่ละรูปโดยพิจารณาจากลักษณะภายนอก เช่น เป็นรูปสามเหลี่ยมเหมือนกัน เป็นรูปสี่เหลี่ยมเหมือนกัน ความเอียงและความตรงของรูปเหมือนกัน เป็นต้น	(CL2) เมื่อกำหนดรูปมาให้ 2 รูป นักเรียนระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างของรูปแต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง การวัดขนาดของด้านหรือมุมแล้วนำมาสรุป เช่น จำนวนด้าน จำนวนมุม แกนสมมาตร ผลรวมมุมภายในของรูป ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นทแยงมุม ความขนาน ความยาวของด้านและลักษณะของมุมแต่ละมุม เป็นต้น	(CL3) เมื่อกำหนดรูปมาให้ 2 รูป นักเรียนระบุสมบัติที่มีความเหมือนและความแตกต่างของรูปแต่ละรูปโดยพิจารณาจากบทนิยามของรูปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ในการระบุสมบัติที่จำเป็นและเพียงพอกับรูปที่กำหนดให้ หรือมีการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนประกอบสมบัติที่ได้
หมายเหตุ CL แทน Classification Level หมายถึง ระดับขั้นการจัดหมวดหมู่		

ตาราง 13 ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์

ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 4
(PL2) นักเรียนแสดงการพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้สอดคล้องสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เช่น การพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขนาด 180 องศา นักเรียนใช้วิธีการยกตัวอย่างประกอบว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีผลรวมมุมภายในรวมกันได้ 180 องศา เท่ากับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมเหมือนกัน	(PL3) นักเรียนแสดงการพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ โดยการนำทฤษฎีบทพีทาโกรัสและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว เพื่อให้สอดคล้องสิ่งที่ต้องการพิสูจน์	(PL4) นักเรียนแสดงการพิสูจน์อย่างเป็นทางการ โดยการนำทฤษฎีบทพีทาโกรัสและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการแสดงความเท่ากันทุกประการ หรือการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน เพื่อให้สอดคล้องสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
หมายเหตุ	PL แทน Proof Level หมายถึง ระดับขั้นการพิสูจน์	

ระยะที่ 2 สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้เครื่องมือในการวิจัยได้แก่ งานปฏิบัติ (Task) แบบสัมภาษณ์ และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ ใช้ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ภายใต้บริบทหลักสูตรคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.1) งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม เป็นการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime โดยการแบ่งออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ 1) การตระหนักรูปร่าง 2) บทนิยาม 3) การจัดหมวดหมู่ และ 4) การพิสูจน์

1.2) แบบสัมภาษณ์ ประกอบด้วยคำถาม 3 ลักษณะ ได้แก่ คำถามหลัก (Main Question) เป็นคำถามหลักที่ถูกจัดลำดับไว้เพื่อนำไปสู่จุดมุ่งหมายของงานวิจัยและเป็นคำถามที่ใช้ในการเปิดประเด็น เช่น คำตอบนี้นักเรียนได้มาอย่างไร สามารถอธิบายได้หรือไม่ คำถามเพื่อขอยละเอียดและความชัดเจน (Probes) ใช้หลังจากผู้สัมภาษณ์ตอบคำถามหลักแล้ว แต่คำตอบยังขาดความชัดเจน หรืออาจมีประเด็นที่น่าสนใจและน่าติดตาม หรือเป็นการแสดงว่าคำตอบนั้นกำลังได้รับความสนใจ เช่น คำตอบนี้นักเรียนได้มาอย่างไร หรือ นอกจากที่ตอบมานั้น นักเรียนมีแนวคิดอื่น ๆ เพิ่มเติมหรือไม่ ทำให้นักเรียนถึงเลือกให้เหตุผลนี้ในการตอบคำถาม และคำถามเพื่อตามประเด็น (Follow-up Question) เป็นคำถามที่มุ่งเพิ่มเติมขอบเขตของเรื่องที่ศึกษาให้มีความลุ่มลึกมากขึ้น โดยการเลือกใช้สิ่งที่พบเจอขณะสัมภาษณ์มาใช้เป็นประเด็นในการถามต่อ ซึ่งเป็นคำถามที่อยู่นอกเหนือจากความคิดของผู้วิจัย เพื่อใช้เป็นข้อมูลที่มีความลุ่มลึกในการเก็บรวบรวม เช่น ทำให้นักเรียนถึงเลือกให้ทฤษฎีบทนี้ในการให้เหตุผล ทฤษฎีบทนี้มีความสัมพันธ์กับการให้เหตุผลในข้อนี้อย่างไร นอกจากทฤษฎีบทที่นักเรียนกล่าวมา มีทฤษฎีบทไหนที่มีความสัมพันธ์กันอีกหรือไม่ เป็นต้น โดยแนวคำถามแต่ละประเภทมีความยืดหยุ่นแตกต่างกันตามสถานการณ์ของผู้ให้สัมภาษณ์แต่ละคน

1.3) แบบบันทึกการสัมภาษณ์ เป็นการจดบันทึกประเด็นที่สำคัญที่สังเกตเห็นในขณะสัมภาษณ์ เช่น ลักษณะการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในด้านการตระหนักรูปร่าง การใช้บทนิยาม การจัดหมวดหมู่และการพิสูจน์ นอกจากนี้ผู้ให้สัมภาษณ์แต่ละคนอาจจะให้แนวคิดที่แตกต่างจากกรอบแนวคิดในการวิจัย เพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลและประกอบการจัดสรุปต่อไป

2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1) งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม มีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาคุณภาพของเครื่องมือดังนี้

- ศึกษารูปแบบและลักษณะของโจทย์ปัญหาที่ใช้ในงานปฏิบัติ (Task) จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ตามแนวคิดของกลูเธอร์สและเจมี

- ศึกษา วิเคราะห์หลักสูตรสถานศึกษาและเนื้อหารายวิชาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อความรู้พื้นฐานของนักเรียนเกี่ยวกับ เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

- สร้างงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime โดยการแบ่งออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ การตระหนักรูปร่าง จำนวน 6 ข้อ บทนิยาม จำนวน 12 ข้อ การจัดหมวดหมู่ จำนวน 6 ข้อ และการพิสูจน์ จำนวน 6 ข้อ รวมทั้งหมด 30 ข้อ

- นำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม จำนวน 30 ข้อ ที่สร้างขึ้นเสนอต่อ อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมและผู้ทรงคุณวุฒิที่มีความเชี่ยวชาญทางด้านเรขาคณิต จำนวน 2 ท่าน และพิจารณาร่วมกับผู้วิจัยรวมทั้งหมด 5 ท่าน เพื่อประชุมกลุ่มย่อย (Focus group) ตรวจสอบความถูกต้อง ปรับปรุงแก้ไข และคัดเลือกงานปฏิบัติ (Task) จำนวน 15 ข้อ โดยแบ่งออกเป็น 4 ด้าน ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ได้แก่ การตระหนักรูปร่าง จำนวน 3 ข้อ บทนิยาม จำนวน 6 ข้อ การจัดหมวดหมู่ จำนวน 3 ข้อ และการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อ โดยผลการพัฒนาเครื่องมือจะอยู่ในภาคผนวก ข หน้า 281 – 291

2.2) แบบสัมภาษณ์และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

- ศึกษางานปฏิบัติ (Task) เรื่อง เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ที่ผ่านการประชุมกลุ่มย่อย (Focus group) แล้ว

- สร้างข้อคำถามของแบบสัมภาษณ์ที่สอดคล้องกับงานปฏิบัติ (Task) โดยมีคำถาม 2 ลักษณะ คือ คำถามหลัก (Main Question) เพื่อเป็นคำถามที่ใช้ในการเปิดประเด็น และคำถามเพื่อขอรายละเอียดและความชัดเจน (Probes) ใช้หลังจากผู้สัมภาษณ์ตอบคำถามหลักแล้ว แต่คำตอบยังขาดความชัดเจน เพื่อให้ทราบถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้ง 4 กระบวนการ

ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime จากการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

- สร้างแบบบันทึกการสัมภาษณ์โดยพิจารณาจากข้อคำถามของแบบสัมภาษณ์ที่สอดคล้องกับงานปฏิบัติ (Task) โดยแบ่งคำตอบของคำถามออกเป็น 3 ลักษณะ คือ คำตอบของคำถามหลัก (Main Question) คำตอบของคำถามเพื่อขอรายละเอียดและความชัดเจน (Probes) และคำตอบของคำถามเพื่อตามประเด็น (Follow-up Question)

ระยะที่ 3 ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime

ในระยะนี้ผู้วิจัยได้แบ่งนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยออกเป็น 3 กลุ่ม จากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแล้วนำงานปฏิบัติ (Task) ไปใช้กับนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยเพื่อคัดเลือกนักเรียนเป้าหมายแล้วนำไปสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task-based interview) และศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. แบ่งนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยออกเป็น 3 กลุ่ม

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้นำผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน ซึ่งผู้วิจัยได้พิจารณาจากคะแนนสอบของสถานศึกษา มาจัดเรียงคะแนนจากน้อยไปหามากและแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วยนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ โดยมีเกณฑ์ในการแบ่งนักเรียนดังนี้ นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่สูงกว่า 66 นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์สูงกว่า 33 แต่ไม่เกิน 66 และนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ไม่เกิน 33 ดังตารางต่อไปนี้

จากตาราง 14 พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน มาจัดเรียงคะแนนจากน้อยไปหามากและแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วยนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง อยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่สูงกว่า 66 ได้แก่ นักเรียนคนที่ 29 ถึง 40 นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง อยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่สูงกว่า 33 แต่ไม่เกิน 66 ได้แก่ นักเรียนคนที่ 16 ถึง 28 และนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ อยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ไม่เกิน 33 ได้แก่ นักเรียนคนที่ 1 ถึง 15

2. นำงานปฏิบัติ (Task) ไปใช้กับนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้นำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่ผ่านการประชุมกลุ่มย่อย (Focus group) แล้ว ไปใช้กับนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 40 คน ที่ถูกแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วย นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ และสอบถามความยินยอมในการให้สัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task – based interview) โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตาราง 15 ผลการวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย

ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม						
นักเรียน คนที่	คะแนน ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน/ กลุ่ม	ด้านที่ 1	ด้านที่ 2	ด้านที่ 3	ด้านที่ 4	
		R	D	C	P	
		RL	UL	FL	CL	RL
		(1 – 2)	(2 – 4)	(1 – 4)	(1 – 3)	(1 – 2)
1	15 (ต่ำ)	1	-	2 ขั้นต้น	-	-
2	16 (ต่ำ)	1	-	2 ขั้นต้น	-	-
3	17 (ต่ำ)	2	-	1	-	2
4	17 (ต่ำ)	2	-	1	2	2
5	19 (ต่ำ)	2	2 ขั้นต้น	2	2	2
6	19 (ต่ำ)	2	2	2	2	3
7	20 (ต่ำ)	2	2	1	2	-
8	21 (ต่ำ)	2	2 ขั้นต้น	2	2 ขั้นต้น	3

ตาราง 15 (ต่อ)

นักเรียน คนที่	คะแนน ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน/ กลุ่ม	ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม				
		ด้านที่ 1	ด้านที่ 2	ด้านที่ 3	ด้านที่ 4	
		R	D	C	P	
		RL	UL	FL	CL	PL
		(1 – 2)	(2 – 4)	(1 – 4)	(1 – 3)	(2 – 4)
9	21 (ต่ำ)	2 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น	2	2	4
10	21 (ต่ำ)	2 ขั้นต้น	-	2	2	3
11	22 (ต่ำ)	2	-	2	2	-
12	22 (ต่ำ)	2 ขั้นต้น	3	2	2	3
13	22 (ต่ำ)	2	2	2	2 ขั้นต้น	3
14	22 (ต่ำ)	2	-	2	2 ขั้นต้น	4
15	22 (ต่ำ)	2	4 ขั้นต้น	2	2 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น
16	24 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	2	2	4 ขั้นต้น
17	24 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	2	2	4 ขั้นต้น
18	24 (ปานกลาง)	2	3	2	2	4
19	25 (ปานกลาง)	2	3	2	2	4
20	25 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	2	2	4 ขั้นต้น
21	25 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	2	2	4
22	26 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	2	2	4
23	26 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	2	2	4
24	26 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	2	2	4 ขั้นต้น
25	26 (ปานกลาง)	2	4	3	2	4 ขั้นต้น
26	26 (ปานกลาง)	2	4 ขั้นต้น	3	2	4
27	26 (ปานกลาง)	2	4	3	3 ขั้นต้น	4
28	26 (ปานกลาง)	2	4	3	3 ขั้นต้น	4
29	27 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	3	3 ขั้นต้น	4
30	27 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	3	3 ขั้นต้น	4

ตาราง 15 (ต่อ)

ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม						
นักเรียน คนที่	คะแนน ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน/ กลุ่ม	ด้านที่ 1	ด้านที่ 2	ด้านที่ 3	ด้านที่ 4	
		R	D	C	P	
		RL	UL	FL	CL	RL
		(1 – 2)	(2 – 4)	(1 – 4)	(1 – 3)	(1 – 2)
31	27 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	3	3 ขั้นต้น	4
32	27 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	3 ขั้นต้น	3 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น
33	27 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	3	3 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น
34	28 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	3	3 ขั้นต้น	4
35	28 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	3	3 ขั้นต้น	4
36	28 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	2	3 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น
37	28 (สูง)	2	4 ขั้นต้น	2	3 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น
38	29 (สูง)	2	4	3	3 ขั้นต้น	4
39	29 (สูง)	2	4	3	3 ขั้นต้น	4
40	30 (สูง)	2	4	3	3 ขั้นต้น	4

หมายเหตุ

R แทน Recognition หมายถึง การตระหนักรูปร่าง

RL แทน Recognition Level หมายถึง ระดับขั้นการตระหนักรูปร่าง

D แทน Definition หมายถึง บทนิยาม

UL แทน Use of definition Level หมายถึง ระดับขั้นการใช้บทนิยาม

FL แทน Formulation of definition Level หมายถึง ระดับขั้นการกำหนด

บทนิยาม

C แทน Classification หมายถึง การจัดหมวดหมู่

CL แทน Classification Level หมายถึง ระดับขั้นการจัดหมวดหมู่

P แทน Proof หมายถึง การพิสูจน์

PL แทน Proof Level หมายถึง ระดับขั้นการพิสูจน์

ขั้นต้น แทน การให้เหตุผลตามองค์ประกอบของระดับที่ใช้ในการพิจารณานั้นยัง

ไม่สมบูรณ์แต่มีความสมเหตุสมผลบางส่วน

จากตาราง 15 ผู้วิจัยได้นำเสนอคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และผลของการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 40 คน

3. การคัดเลือกนักเรียนเป้าหมายจำนวน 9 คน

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้คัดเลือกนักเรียนเป้าหมายเพื่อเป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน โดยพิจารณาจากผลการทำงานปฏิบัติ (Task) ของนักเรียนในแต่ละกลุ่มที่เขียนคำตอบได้อย่างครบถ้วนทุกข้อหรือตอบคำถามได้มากที่สุด เป็นนักเรียนที่สามารถสื่อสารได้เพื่อทำการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็น (Task base interview) และความยินยอมของนักเรียน จึงได้นักเรียนเป้าหมายที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ได้แก่ นักเรียนคนที่ 29, 34 และ 39 จำนวน 3 คน นักเรียนเป้าหมายที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง ได้แก่ นักเรียนคนที่ 16, 21 และ 28 จำนวน 3 คน และนักเรียนเป้าหมายที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ ได้แก่ นักเรียนคนที่ 6, 9 และ 15 จำนวน 3 คน รายละเอียดดังตาราง 16

ตาราง 16 รายละเอียดของนักเรียนเป้าหมาย 9 คนเพื่อทำการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task-base interview)

นักเรียน คนที่	ชื่อสมมติ	ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน แบบแบ่งกลุ่ม	ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยม				
			ด้านที่ 1	ด้านที่ 2	ด้านที่ 3	ด้านที่ 4	
			R	D	C	P	
			RL	UL	FL	CL	RL
			(1 – 2)	(2 – 4)	(1 – 4)	(1 – 3)	(1 – 2)
1	กัปตัน	ต่ำ	2	2	2	2	3
2	เกรซ	ต่ำ	2 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น	2	2	4
3	ต้นข้าว	ต่ำ	2	4 ขั้นต้น	2	2 ขั้นต้น	4 ขั้นต้น

ตาราง 16 (ต่อ)

นักเรียน คนที่	ชื่อสมมติ	ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน แบบแบ่งกลุ่ม	ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยม				
			ด้านที่ 1	ด้านที่ 2	ด้านที่ 3	ด้านที่ 4	
			R	D	C	P	
			RL	UL	FL	CL	RL
			(1 – 2)	(2 – 4)	(1 – 4)	(1 – 3)	(1 – 2)
4	ริวโกะ	ปานกลาง	2	4 ขั้นต้น	2	2	4 ขั้นต้น
5	โต	ปานกลาง	2	4	3	3 ขั้นต้น	4
6	อิงค์	ปานกลาง	2	4 ขั้นต้น	2	2	4
7	บันบัน	สูง	2	4 ขั้นต้น	2	3 ขั้นต้น	4
8	ไฟกัส	สูง	2	4 ขั้นต้น	3	3 ขั้นต้น	4
9	เจเจ	สูง	2	4	3	3 ขั้นต้น	4

จากตาราง 16 พบว่านักเรียนเป้าหมายทั้ง 9 คน ประกอบด้วยนักเรียนตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน ได้แก่ บันบัน ไฟกัสและเจเจ นักเรียนตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 3 คน ได้แก่ ริวโกะ โตและอิงค์ และนักเรียนตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 3 คน ได้แก่ กัปตัน เกรซ ต้นข้าว โดยผู้วิจัยได้พิจารณาจากจากผลการทำงานปฏิบัติ (Task) ทั้ง 4 ด้าน จำนวน 15 ข้อ และข้อมูลของนักเรียนที่สามารถสื่อสารได้เพื่อทำการสัมภาษณ์เชิงลึกจากครูผู้สอน รวมทั้งความยินยอมของนักเรียนเป้าหมายทั้ง 9 คน

4. สัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task-based interview) กับนักเรียนเป้าหมาย จำนวน 9 คน

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยนำนักเรียนเป้าหมายทั้งหมดที่ผ่านการคัดเลือกแล้วมาเก็บข้อมูลเชิงลึกจากการสัมภาษณ์โดยใช้งานเป็นฐาน (Task-based interview) ซึ่งผู้วิจัยบันทึกข้อมูลทั้งหมดที่ได้จากการสัมภาษณ์ไว้ในแบบบันทึกการสัมภาษณ์ เทปบันทึกเสียงและกล้องวิดีโอ เพื่อนำไปประกอบการวิเคราะห์โปรโตคอลของข้อมูล

5. ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ของนักเรียนเป้าหมาย จำนวน 9 คน โดยการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task-based interview) โดยใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้นำผลที่ได้จากการทำงานปฏิบัติ (Task) เทปบันทึกการสัมภาษณ์นักเรียนเป้าหมาย จำนวน 9 คน และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ของผู้ช่วยวิจัย จำนวน 2 คน มาถอดเป็นโปรโตคอลเพื่อทำการวิเคราะห์ข้อมูล โดยใช้ผู้วิเคราะห์ข้อมูล จำนวน 3 คน ได้แก่ ผู้วิจัยและผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษา จำนวน 2 คน ผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้งสามคนนำโปรโตคอลที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละข้อ เพื่อช่วยในการกำหนดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ทั้ง 4 ด้านของนักเรียนเป้าหมาย หลังจากที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนได้ทำการวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนเป้าหมายทั้ง 9 คน เสร็จเรียบร้อยแล้วผู้วิจัยจึงได้นำผลที่ได้จากการวิเคราะห์มาหาความเชื่อมั่นระหว่างผู้วิเคราะห์แต่ละคน โดยใช้สูตรการหาค่าความเชื่อมั่นของไมล์สและฮูเบอร์แมนและบอยาตซีส (Boyatzis, 1998; Miles & Huberman, 1994)

$$r = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

เมื่อ r คือ ค่าความเชื่อมั่น

n_1 คือ จำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้งสามคนมีความเห็นเหมือนกัน

n_2 คือ จำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้งสามคนมีความเห็นแตกต่างกัน

โดยบอยาตซีส (Boyatzis, 1998) กล่าวว่า ระดับความเชื่อมั่นที่สามารถยอมรับได้ต้องมีค่ามากกว่าร้อยละ 70

ในกรณีที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความเห็นแตกต่างกัน จะใช้การอภิปรายแสดงเหตุผลการวิเคราะห์ของแต่ละคน โดยดูเทปวิดีโอบันทึกการสัมภาษณ์ประกอบแล้วร่วมกันหาข้อสรุป ทั้งนี้

อาจมีการเปลี่ยนแปลงได้ถ้าหากมีผู้วิเคราะห์ข้อมูลท่านนั้นเห็นด้วยกับผู้วิเคราะห์ข้อมูลท่านอื่นที่
นำเสนอเหตุผล



บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

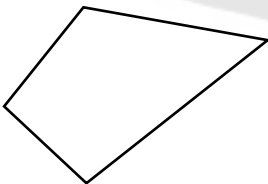
ในการวิจัยเรื่อง การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime มีความมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ของการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ โดยมุ่งตอบคำถามการวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำจะมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อย่างไร ผู้วิจัยได้รวบรวมข้อมูลต่าง ๆ และทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อตอบคำถามการวิจัย ดังนี้

1. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มสูง
2. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มปานกลาง
3. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มต่ำ

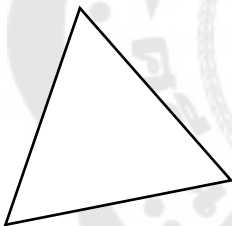
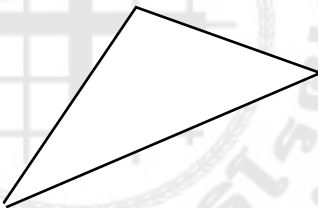
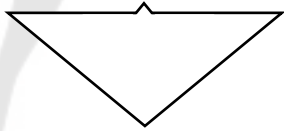
1. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มสูง

การนำเสนอผลการวิจัยในส่วนนี้ จะเป็นการนำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับผลของการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ทั้ง 4 ด้าน ประกอบด้วย ด้านการตระหนักรูปร่าง จำนวน 3 ข้อ ด้านบทนิยาม จำนวน 6 ข้อ แบ่งออกเป็น การใช้บทนิยาม จำนวน 3 ข้อ และการกำหนดบทนิยาม จำนวน 3 ข้อ ด้านการจัดหมวดหมู่ จำนวน 3 ข้อ และด้านการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อ และผลของการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task base interview) ของนักเรียนเป้าหมายที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงทั้ง 3 คน ได้แก่ ปันปัน โฟกัสและเจเจ มีรายละเอียดดังตารางต่อไปนี้

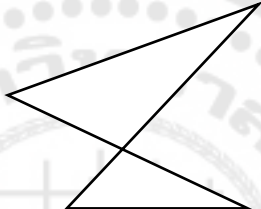
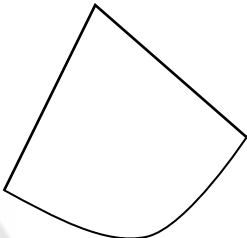
ตาราง 17 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของปันปัน

ด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
   หมายเลข 1 หมายเลข 2 หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณาจากลักษณะภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะมี 4 เส้น 4 มุม หมายเลข 2 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะไม่สามารถ	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนใช้บทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมในการพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็น

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	นับได้ว่ามีกี่ด้าน หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะ ไม่มีมุม หรือเส้นไม่ชนกัน	รูปสี่เหลี่ยมหรือไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม โดยพิจารณาจาก จำนวนมุม จำนวนด้านและ การเป็นรูปปิด จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะเส้นไม่ ชนกัน หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะ มี 6 ด้าน และ 6 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนใช้บทนิยาม ของรูปสามเหลี่ยมในการ พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็น รูปสามเหลี่ยมหรือไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม โดยพิจารณาจาก จำนวนมุม ด้านและการเป็น รูปปิด จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 2

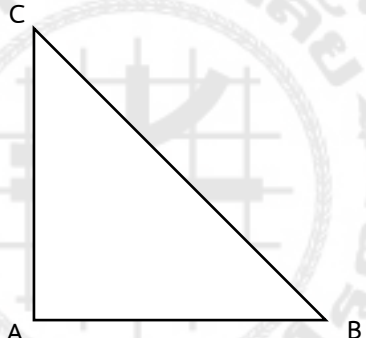
ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะ ประกอบด้วย 4 ด้าน ซึ่ง	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	เป็นส่วนของเส้นตรงและ มุม 4 มุม หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แต่ละรูป ประกอบด้วยด้าน 3 ด้าน ซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรง และมุม 3 มุม หมายเลข 3 ไม่ใช่ทั้งสอง รูป เพราะมีด้านหนึ่งที่ไม่ใช่ ส่วนของเส้นตรง	หมายเลขใดเป็นรูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูป คือ จำนวนด้าน จำนวนมุม ขนาด ของมุมและลักษณะของเส้น จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ 			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน โดยการใช้ ลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่ง	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	รูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน โดยการใช้
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วใช้ สมบัติมุมแย้งในการแสดง ว่าด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่	ลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูป สี่เหลี่ยมออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดง ว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วใช้สมบัติมุมแย้งใน การแสดงว่าด้านตรงข้าม ขนานกัน 2 คู่ จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

ตาราง 17 (ต่อ)

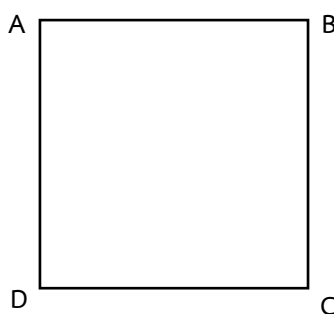
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม			
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ			
			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วโดยการลากเส้นตั้งฉากเพื่อแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - มุม - ด้าน ทำให้ทราบว่าด้านคู่ที่สมนัยกัน 2 ด้าน ยาวเท่ากัน แล้วใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยม	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยใช้การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ซึ่งประกอบด้วยการลากส่วนของเส้นตรงไปตั้งฉากและแบ่งครึ่ง แสดงความเท่ากันทุกประการในการพิสูจน์ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยม สิ่งที่
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน		
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้		

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		ในการแสดงว่า มีมุมฉาก 1 มุม	โจทย์กำหนดและบทยืนยันใน การให้เหตุผลแต่การลาก $\overline{AD}$ ไปตั้งฉากและแบ่งครึ่งยังขาด ความสมเหตุสมผลในการ กำหนด และการสรุปความ เท่ากันทุกประการของ $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ ควรสรุป เป็นแบบ มุม - มุม - ด้าน เพื่อให้เกิด ความสมเหตุสมผลที่สุด จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 4 ขั้นต้น

U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

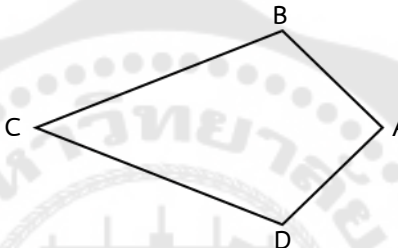
กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



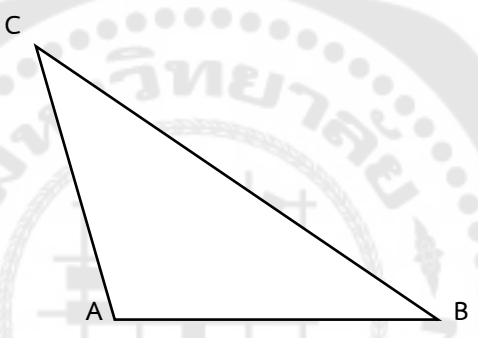
ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	□ <i>ABCD</i> เป็นรูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส โดยการใช้การลากเส้น ทแยงมุมเพื่อแบ่งรูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณารูปที่
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วแสดงว่ารูป	กำหนดให้โดยใช้การพิสูจน์ อย่างมีแบบแผน ซึ่ง
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	สามเหลี่ยมแต่ละคู่เท่ากัน ทุกประการ มุม - ด้าน - มุม จึงได้ว่า ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และใช้ผลรวมมุมภายในรูป สี่เหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้ในการแสดงว่า มุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก	ประกอบด้วยการลากส่วนของ เส้นตรง แสดงความ เท่ากันทุกประการของรูป สามเหลี่ยมที่ได้จากการลาก แบ่ง นำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง กับมุมแย้งและสิ่งที่โจทย์ กำหนดมาใช้ในการให้เหตุผล แต่ในขั้นตอนแรก การ ลากเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งมุม นั้นยังขาดความสมเหตุสมผล จึงทำให้ผลการพิสูจน์ไม่ ถูกต้องและนำไปสู่การลง ข้อสรุปที่ผิด จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน 1 คู่ 2) ด้านที่เป็นส่วของ	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวโดย พิจารณาจากสิ่งที่เรียนมาทำ ให้ทราบว่า ด้านที่ประชิดกันมี ขนาดเท่ากัน 2 คู่ มุมตรงข้าม มีขนาดเท่ากัน 1 คู่และเส้น ทแยงมุมตั้งฉากกัน จึงสรุปได้ ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	เส้นตรงประชิดกัน ยาว เท่ากัน 2 คู่	
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	3) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็น มุมฉาก	
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 17 (ต่อ)

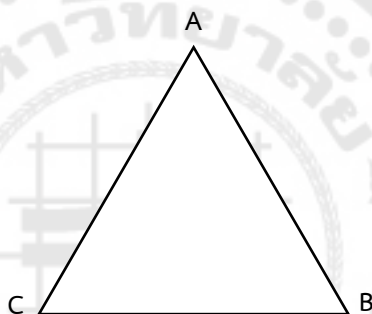
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน 2) มีมุมเท่ากัน 2 มุม 3) มีด้านที่เป็นส่วของ เส้นตรง 3 ด้าน ยาว เท่ากัน 2 ด้าน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากการ คาดคะเนด้วยสายตาและบท นิยาม ทำให้ทราบว่า มีด้าน ยาวเท่ากัน 2 ด้าน มุมมีขนาด เท่ากัน 2 มุมและมีมุมป้าน 1 มุม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ ในระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



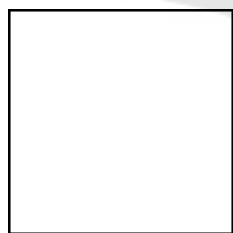
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม โดยให้การลากเส้นตั้งฉาก เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูปที่เท่ากัน ทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วได้ว่ามุมคู่ที่สม นัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้ว พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน อีกครั้ง จึงได้ว่า $\hat{A}BC =$ $\hat{A}CB = \hat{B}AC$	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ความ สมมูลของบทนิยามที่ กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยม ด้านเท่าโดยใช้การพิสูจน์ อย่างมีแบบแผน ซึ่ง ประกอบด้วยการลากเส้นไป ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง ใช้ความ เท่ากันทุกประการและสิ่งที่ โจทย์กำหนดในการให้เหตุผล แต่การลาก $\overline{AD}$ ไปตั้งฉาก และแบ่งครึ่งยังขาดความ
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 17 (ต่อ)

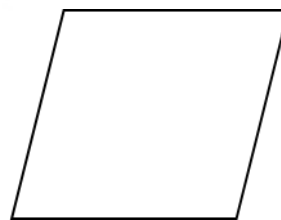
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			สมเหตุสมผลในการกำหนด และการสรุปความเท่ากันทุก ประการของ $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ ควรสรุปเป็นแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน เพื่อให้เกิด ความสมเหตุสมผลที่สุด จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 4 ขั้นต้น

C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



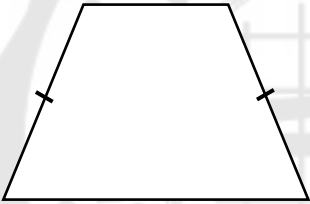
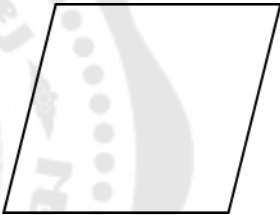
รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีด้านทุกด้านยาว เท่ากัน	

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.2) ด้านตรงข้ามขนานกัน 1.3) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก 1.4) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค้ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก 2.2) เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน 2.3) มีแกนสมมาตร 4 แกน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค้ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ 3.2) เส้นทแยงมุมยาวไม่เท่ากัน 3.3) มีแกนสมมาตร 2 แกน	สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยพิจารณาจากบทนิยามที่เคยเรียนรู้มา การลากเส้นและการมองภาพ จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้			
1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู			
 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากบทนิยามที่เคย เรียนรู้อยู่มาและการลากเส้น จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 3 ขั้นต้น
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีด้าน 4 ด้าน 1.2) มีมุม 4 มุม 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2.1) มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน 2.2) มีด้านขนานกัน 1 คู่ 2.3) มีแกนสมมาตร 1 แกน 2.4) มีเส้นทแยงมุมยาว เท่ากัน	

ตาราง 17 (ต่อ)

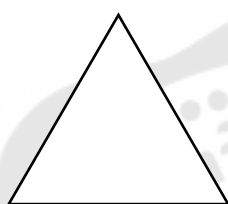
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน 2 คู่ 3.2) เส้นแยงมุมยาวไม่ เท่ากัน 3.3) มีแกนสมมาตร 2 แกน 3.4) มีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน 3.5) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก 3.6) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่ง ซึ่งกันและกัน	

C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

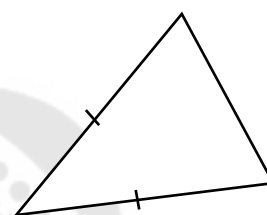
- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



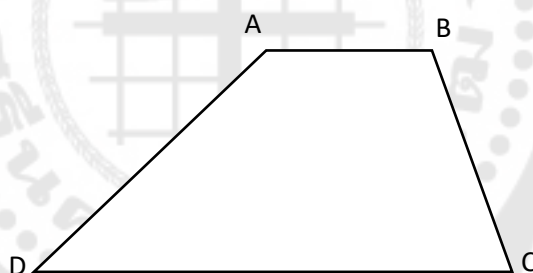
รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูป สามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากบทนิยาม การลากเส้นและการมองภาพ จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 3 ขั้นต้น
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีด้าน 3 ด้าน 1.2) มีมุม 3 มุม 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2.1) มีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน 2.2) มีมุมเท่ากัน 3 มุม 2.3) มีแกนสมมาตร 3 แกน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) มีมุมแหลม 1 มุม	

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3.2) มีมุมเท่ากัน 2 มุม 3.3) มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน 3.4) มีแกนสมมาตร 1 แกน	

P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา

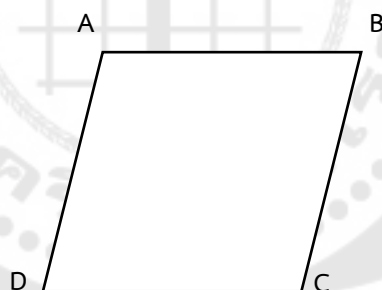


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยใช้การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ซึ่งประกอบด้วยการลากเส้นตั้งฉาก นำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับของผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	โดยลากเส้นตั้งฉาก และนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ	
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน	มุมแย้ง ผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมาใช้ในการให้เหตุผล	

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			มุมแย้งและสมบัติด้าน คู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมขนม เปียกปูน มาใช้ในการให้เหตุ ผลได้อย่างสมเหตุสมผล จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 4

P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูป
สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

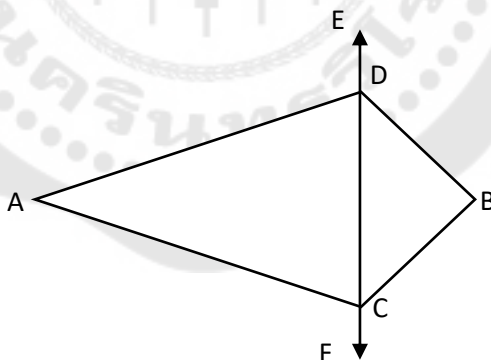


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยง มุมของรูปสี่เหลี่ยมขนม เปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและ	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้น ทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนม เปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและ กัน โดยใช้การพิสูจน์อย่างมี แบบแผน ประกอบด้วยการ ลากเส้นทแยงมุมของรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน แสดง
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	กัน โดยการลากเส้นทแยง มุมของรูปสี่เหลี่ยมขนม	
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	เปียกปูน แสดงความ เท่ากันทุกประการ นำ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุม แย้งและสมบัติของรูป	

ตาราง 17 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมา ใช้ในการให้เหตุผล	ความเท่ากันทุกประการ นำ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุม แย้งและสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมาใช้ ในการให้เหตุผลได้อย่าง สมเหตุสมผล จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



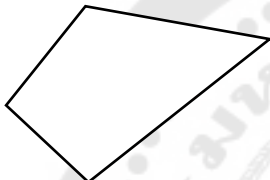
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยการนำ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่ว มุมที่ อยู่บนเส้นตรงและสิ่งที	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การ พิสูจน์อย่างมีแบบแผน
----------	--	---	--

ตาราง 17 (ต่อ)

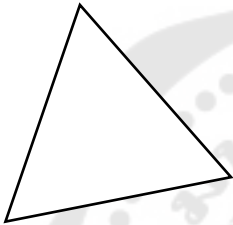
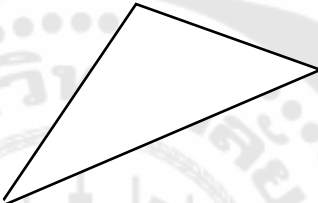
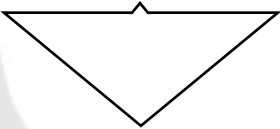
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการ ให้เหตุผล	ประกอบด้วยการนำทฤษฎี บทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว มุมที่อยู่บนเส้นตรง และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา ใช้ในการให้เหตุผลได้อย่าง สมเหตุสมผล จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน		

จากตาราง 17 พบว่าบัณฑิตมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตรรกะหน้าจั่วอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น และการกำหนดบทนิยาม อยู่ในระดับที่ 2 และ ระดับที่ 4 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น และด้านการพิสูจน์อยู่ในระดับที่ 4

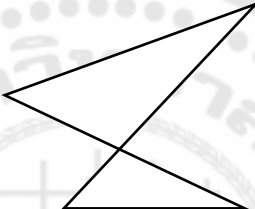
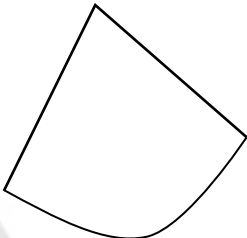
ตาราง 18 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของโฟกัส

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีมุม ทั้งหมด 4 มุมและมีด้าน ทั้งหมด 4 ด้าน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนใช้หลักการที่ เคยเรียนมาเกี่ยวกับรูป สี่เหลี่ยมในการพิจารณาว่า หมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่เป็นรูป จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะไม่มีด้าน และไม่มีมุม หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยมเพราะมี 4 ด้านแต่ ไม่มีมุม	

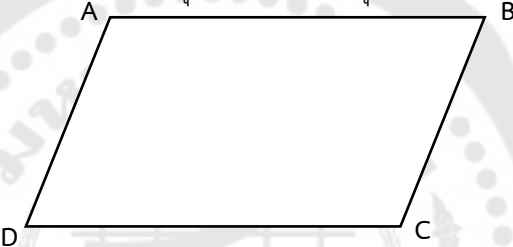
ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้านและมี 3 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนใช้หลักการ ของรูปสามเหลี่ยมที่เคยเรียน มา พิจารณาว่าหมายเลขใด เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือไม่เป็น รูปสามเหลี่ยม โดยพิจารณา จากจำนวนมุม ด้านและการ เป็นรูปปิด จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้านแต่มีมุมแค่ 2 มุม หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 6 ด้านและมีมุม 6 มุม	

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช้ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมี 4 ด้าน และมีมุม 4 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก จำนวนด้านและจำนวนมุม ถึงแม้ในหมายเลข 2 และ หมายเลข 3 จะเป็นรูปแบบที่ ยังไม่เคยพบในบทเรียนแต่ ลักษณะเหตุผลที่ใช้ในการ ตอบยังคงอ้างอิงจากจำนวน มุมและจำนวนด้านในบท นิยามของรูปสามเหลี่ยมและ รูปสี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยมเพราะมีด้าน 6 ด้าน และมีมุม 6 มุม หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยมเพราะมีแค่ 2 ด้าน และมีมุมแค่ 1 มุม	

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ 			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน เพราะรูป สี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้าน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนนำบทนิยาม มาใช้และแสดงความ สอดคล้องกันระหว่างบท นิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้าน ขนานที่กำหนดให้กับสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้ พบว่ามี ความเข้าใจผิดในสิ่งที่ต้องให้ เหตุผล ดังนี้ 1. รูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ยังไม่ สามารถเริ่มต้นด้วยการบอก ได้ว่าด้านตรงข้ามขนานกัน
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	ตรงข้ามยาวเท่ากัน แต่ไม่ เท่ากันทั้ง 4 ด้าน และมีมุม	
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	ตรงข้ามเท่ากันแต่ไม่มีมุม ใดเป็นมุมฉาก โดย กำหนดให้ด้านที่อยู่ตรง ข้ามกัน ขนานกันแล้ว แสดงว่ามุมตรงข้ามมี ขนาดเท่ากันโดยนำสมบัติ ของเส้นขนานมาใช้	

ตาราง 18 (ต่อ)

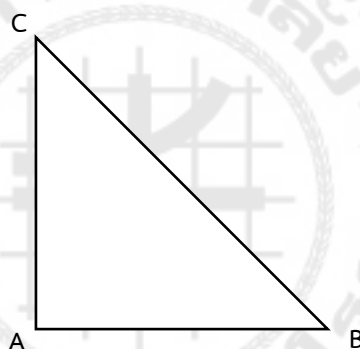
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			แต่กำหนดเพียงแค่ด้านตรง ข้ามยาวเท่ากัน 2. สิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือการ พิสูจน์ว่าด้านตรงข้ามขนาน กัน แต่ในสิ่งที่ทำเป็นการ พิสูจน์ว่ามุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน เนื่องจากเข้าใจโจทย์ ผิดและจำบทนิยามของรูป สี่เหลี่ยมด้านขนานผิด แต่ในลักษณะการเขียนให้ เหตุผลพบว่ามีการใช้ทฤษฎี บทของเส้นขนานและการต่อ เส้นเพื่อให้เหตุผล จึงสรุปได้ ว่านักเรียนไม่แสดงระดับการ ให้เหตุผลทางเรขาคณิตตาม กรอบแนวคิดในข้อนี้ แต่มี แนวโน้มที่จะอยู่ในระดับที่ 4

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยนำสิ่งที่กำหนดให้ไปใช้ในการ	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิจารณาว่า
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	เชื่อมโยงกับทฤษฎีบทเพื่อแสดงว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันจะมีความยาวเท่ากัน แล้วเชื่อมโยงกับบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพื่อ	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยนำบทนิยามมาใช้และแสดงความสอดคล้องกันระหว่างบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วที่กำหนดให้กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ พบว่า
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้	แสดงว่ารูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน	1. การพิจารณาว่าด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านโดยใช้สิ่งที่

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		และนำทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้องกับผลรวมมุม ภายในของรูปสามเหลี่ยม และสิ่งโจทย์กำหนดให้เพื่อ แสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม	โจทย์กำหนดให้ คือ มุม 2 มุม มีขนาดเท่ากัน ร่วมกับการ อ้างอิงทฤษฎีบทของรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่ว และบท นิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้า จั่ว 2. การพิจารณาว่าเป็นมุม ฉาก โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ ผลรวมมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมและสิ่งโจทย์ กำหนดให้เพื่อแสดงว่ามีมุม ฉาก 1 มุม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 4

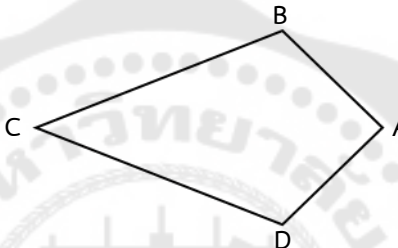
ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการนำผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนนำบทนิยาม
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดง ว่ารูปสี่เหลี่ยมมี	มาใช้และพยายามแสดง
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้	มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ แบ่งครึ่งมุมแล้วพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉากแล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 4 รูป	ความสอดคล้องกันระหว่างบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ พบว่า 1. นักเรียนใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดง

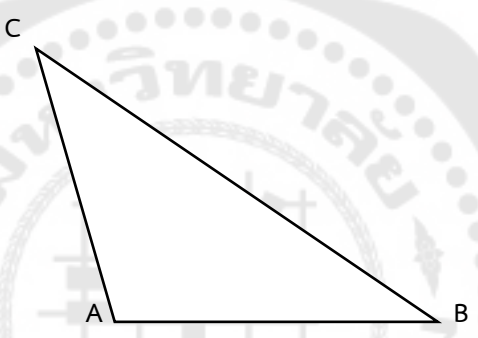
ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		มีความเท่ากันทุกประการ จึงสรุปได้ว่าด้านทุกด้าน ยาวเท่ากัน	ว่ารูปสี่เหลี่ยมมีมุมทุกมุมเป็น มุมฉาก 2. นักเรียนลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ แบ่งครึ่งมุมแล้วพิสูจน์ว่าเส้น ทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก และด้านทุกด้านยาวเท่ากัน โดยการใช้ความเท่ากันทุก ประการแบบ มุม - มุม – ด้าน แต่การขีด เส้นทแยงมุมแล้วแบ่งครึ่งมุม ยังขาดความสมเหตุสมผลใน การกำหนดจึงทำให้การลง ข้อสรุปว่าด้านทุกด้านยาว เท่ากันนั้นขาดความ สมเหตุสมผลด้วย จึงสรุปได้ ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็น มุมฉาก	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว เช่น ด้านที่ อยู่ติดกันมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งเส้น สั้นและเส้นทแยงมุมตั้งฉาก กัน และมีการพิสูจน์ ประกอบการพิจารณาสมบัติ ของรูป เช่น การพิจารณาว่า เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุม ฉาก และมุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน 1 คู่ จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	2) ด้านที่อยู่ติดกันมี ขนาดเท่ากัน 2 คู่	
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	3) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่ง กันและกัน	
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	4) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน 1 คู่	

ตาราง 18 (ต่อ)

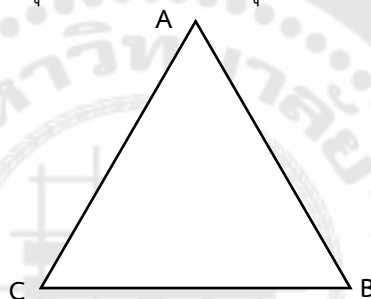
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน 2) มีมุมที่มีขนาดเท่ากัน 2 มุม 3) $\hat{C} + \hat{B} < 90^\circ$	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว เช่น มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน มุมมีขนาดเท่ากัน 2 มุมและ $\hat{C} + \hat{B} < 90^\circ$ มีมุมป้าน 1 มุม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ ในระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

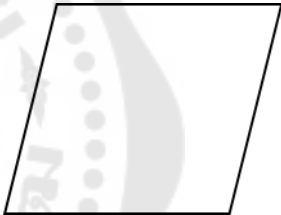
F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม โดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาด เท่ากัน 2 มุมแล้วด้านที่อยู่ ตรงข้ามมุมจะยาวเท่ากันใน การแสดงว่ามุมทั้ง 3 มุมมี ขนาดเท่ากัน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ความ สมมูลของบทนิยามที่ กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยม ด้านเท่าโดยพิจารณาจากบท นิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้า จั่วที่บอกว่ามีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน แล้วเลือกพิจารณาทีละ 2 ด้านจนครบ 3 คู่โดยใช้ทฤษฎี บทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่มี มุมขนาดเท่ากัน 2 มุมแล้วด้าน ที่อยู่ตรงข้ามมุมจะยาวเท่ากัน จึงได้ข้อสรุปว่ามุมทุกมุมมี ขนาดเท่ากัน จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

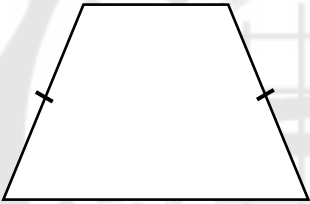
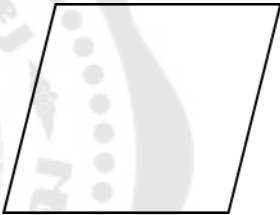
ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) ด้านทั้ง 4 ของรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ต้องเท่ากัน 1.2) เส้นทแยงมุมของทั้ง 2 รูปตัดกันเป็นมุมฉาก 1.3) มุมภายในรวมกันได้ 360 องศา	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากบทนิยามที่เคย เรียนรู้อย่าง การลากเส้นและ การมองภาพ จึงสรุปได้ว่า

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.4) เส้นทแยงมุมแบ่ง ครึ่งซึ่งกันและกัน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกมุมต้อง เป็นมุมฉาก 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ต้องไม่เป็นมุมฉาก 3.2) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน	นักเรียนอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น

ตาราง 18 (ต่อ)

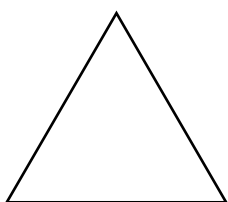
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้			
1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู			
 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีมุม 2 คู่ที่มีขนาด เท่ากัน 1.2) มุมภายในรวมกันได้ 360 องศา	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู 2.1) มีด้านยาวเท่ากัน เพียง 1 คู่ 2.2) มีด้านขนานกันเพียง 1 คู่	สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากบทนิยามที่เคย เรียนรู้อยู่มาและการลากเส้น จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 3 ขั้นต้น

ตาราง 18 (ต่อ)

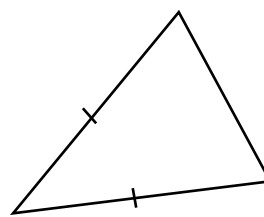
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มีด้านยาวเท่ากันทุกด้าน 3.2) มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 3.3) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก 3.4) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน	

C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

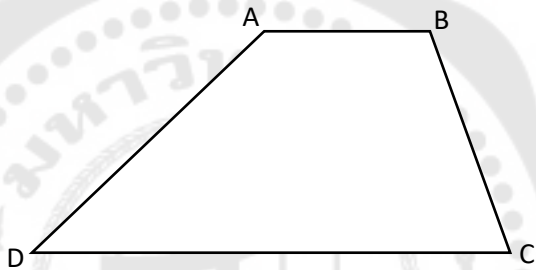


รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูป สามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากบทนิยาม การลากเส้นและการพิสูจน์ สมบัติเกี่ยวกับด้านและมุม ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 3 ขั้นต้น
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มุมภายในรวมกันได้ 180 องศา 1.2) มีมุมเท่ากันอย่าง น้อย 2 มุม	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.3) มีด้านยาวเท่ากัน อย่างน้อย 2 ด้าน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) มีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน 2.2) มีมุมเท่ากัน 3 มุม 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) มีมุมเท่ากัน 2 มุม 3.2) มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน	

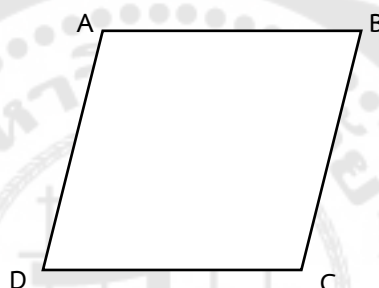
ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา			
			
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวม มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม คางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า ผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยใช้การพิสูจน์อย่าง มีแบบแผน ซึ่งประกอบด้วย การลากเส้นขนาน นำสมบัติ ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมตรงและ เส้นขนานมาใช้ในการให้เหตุ ผลได้อย่างสมเหตุสมผล จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 4
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	โดยการลากเส้นขนาน นำ สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคาง	
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	หมู ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุม ตรงและเส้นขนานมาใช้ในการ การให้เหตุผล	

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

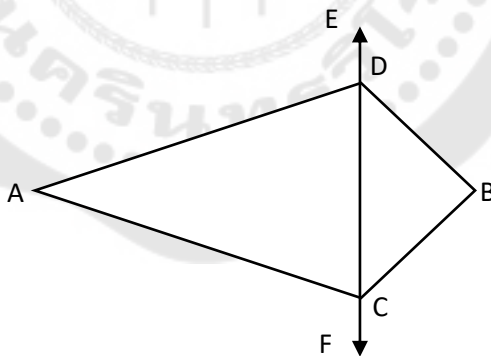


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้ง สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แล้วแสดงความเท่ากันทุกประการเพื่อสนับสนุนข้อสรุป	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยใช้การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ประกอบด้วยการลากเส้นทแยงมุม นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้ง สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในการบอกว่าเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันมาใช้ในการให้เหตุผล เนื่องจากมีการพิจารณาว่าถ้า
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน		
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน		

ตาราง 18 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน แล้วจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้าน ขนานด้วย แล้วสนับสนุน ข้อสรุปนั้นด้วยการแสดง ความเท่ากันทุกประการของ รูปสามเหลี่ยมที่ถูกแบ่ง จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 4 ขั้นต้น

P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overline{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



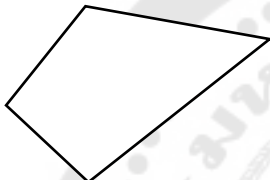
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดย การนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สิ่ง ที่โจทย์กำหนดให้และทฤษฎี	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้ การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน
----------	--	--	--

ตาราง 18 (ต่อ)

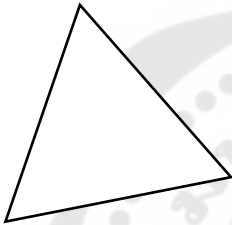
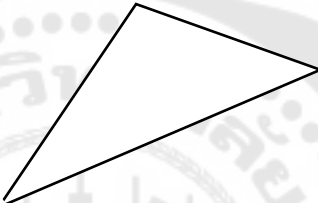
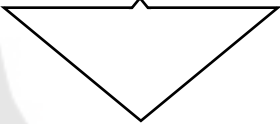
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	บทเกี่ยวกับมุมตรง มาใช้ ในการให้เหตุผล	ประกอบด้วยการนำทฤษฎี บทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว สิ่งที่ได้โจทย์กำหนดให้ และทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมตรง มาใช้ในการให้เหตุผลอย่าง สมเหตุสมผล จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน		

จากตาราง 18 พบว่าไฟกัสมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตรรกะหน้าจั่วอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น และการกำหนดบทนิยามอยู่ในระดับที่ 2 ระดับที่ 3 และระดับที่ 4 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น และด้านการพิสูจน์อยู่ในระดับที่ 4

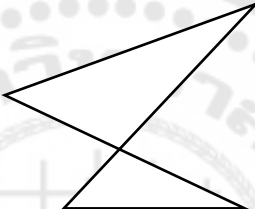
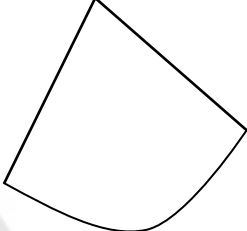
ตาราง 19 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของเจเจ

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีด้าน 4 ด้านและมีมุม 4 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก จำนวนมุมและจำนวนด้าน ของรูป และมีการอ้างอิงบท นิยามของรูปสี่เหลี่ยมเพื่อใช้ ในการมองภาพประกอบการ ให้เหตุผล จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีด้าน 4 ด้านแต่ไม่มีมุม หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยมเพราะเป็นรูปเปิด ที่เส้นตรงต่อกันไม่สนิท ไม่ เกิดมุม	

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้านและมี 3 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก จำนวนมุม จำนวนด้านและ การเป็นรูปปิด จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้าน และมีมุม 2 มุม	
		หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมีด้าน 6 ด้านและมีมุม 6 มุม	

ตาราง 19 (ต่อ)

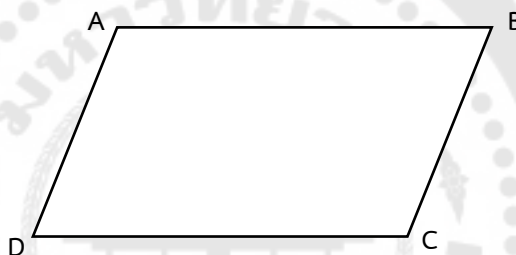
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีด้าน 4 ด้าน และมีมุม 4 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก จำนวนด้านและจำนวนมุม ถึงแม้ในหมายเลข 2 และ หมายเลข 3 จะเป็นรูปแบบที่ ยังไม่เคยพบในบทเรียนแต่ ลักษณะเหตุผลที่ใช้ในการ ตอบยังคงอ้างอิงจากจำนวน มุม จำนวนด้านและลักษณะ ของเส้นตามบทนิยามของรูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูปเพราะมี จำนวนด้าน 6 ด้าน และมี มุม 6 มุม โดยมี C เป็น จุดเชื่อมรูปทั้งสอง หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยมเพราะมีด้าน 2 ด้าน มีมุม 1 มุมและเส้น โค้ง	

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



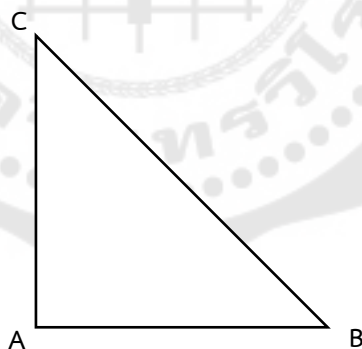
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน โดยการ ลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนนำบทนิยาม มาใช้และแสดงความ สอดคล้องกันระหว่างบท นิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้าน ขนานที่กำหนดให้กับสิ่งที่ โจทย์กำหนด โดยใช้การ พิสูจน์อย่างมีแบบแผน ซึ่ง ประกอบด้วยการลากเส้นเพิ่ม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป และแสดง ความเท่ากันทุกประการของ รูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการ
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	2 รูป แล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน	
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	ทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วนำทฤษฎี บทที่เกี่ยวกับเส้นขนานมา ใช้ในการแสดงว่ารูป สี่เหลี่ยมมีด้านตรงข้าม ขนานกัน 2 คู่	

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ลากเส้น นำทฤษฎีบท สิ่ง ที่ โจทย์กำหนดและบทนิยามมา ใช้ในการให้เหตุผลได้อย่าง สมเหตุสมผล จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมฉากหน้าจั่ว โดยการ ลากเส้นเพื่อแบ่งครึ่งมุม และแบ่งรูปสามเหลี่ยม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุม ฉากหน้าจั่ว โดยนำบทนิยาม มาใช้และแสดงความ สอดคล้องกันระหว่างบท

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U: Use of definition	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	2 รูป เท่ากันทุกประการ แบบ มุม - มุม - ด้าน แล้ว นำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ ผลรวมมุมภายในและสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการ แสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม จึงทำให้ทราบว่ารูป สามเหลี่ยมนี้เป็นรูป สามเหลี่ยมที่มีด้านยาว เท่ากัน 2 ด้านและมีมุม ฉาก 1 มุม	นิยามของรูปสามเหลี่ยมมุม ฉากหน้าจั่วกับสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้ โดยใช้การพิสูจน์ อย่างมีแบบแผน ซึ่ง ประกอบด้วยการลากเส้นเพิ่ม เพื่อแบ่งครึ่งมุมและเกิดเป็น รูปสามเหลี่ยม 2 รูป และ แสดงความเท่ากันทุกประการ ของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จาก การแบ่งรูป นำทฤษฎีบท สิ่ง ที่โจทย์กำหนดและบทนิยามมา ใช้ในการให้เหตุผลได้อย่าง สมเหตุสมผล จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

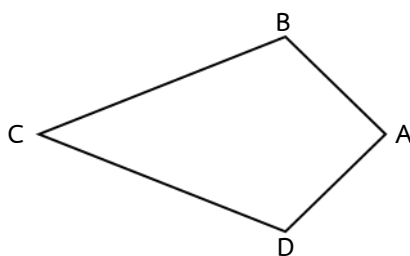
ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูป	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนนำบทนิยาม
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	สี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว	มาใช้และพยายามแสดง
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้	แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการ แบบ มุม – ด้าน – มุม โดยนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับมุมแย้งมาใช้ในการให้เหตุผล แล้วนำสมบัติของ	ความสอดคล้องกันระหว่างบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยการใช้การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ซึ่งประกอบด้วยการลากเส้นทแยงมุมแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูป

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		รูปสี่เหลี่ยมและสิ่งโจทย์ กำหนดให้มาใช้ในการ แสดงว่ามุมแต่ละมุมมี ขนาด 90 องศา	สามเหลี่ยม 2 รูป แสดงความ เท่ากันทุกประการของรูป สามเหลี่ยมทั้งสองรูป นำ ทฤษฎีบทและสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้มาใช้ในการให้ เหตุผล แต่ในขั้นตอนสุดท้าย มีการสรุปที่ผิดพลาด เนื่องจากข้อมูลที่ให้มานั้นไม่ เพียงพอต่อการสรุปว่าเป็นรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสตามบทนิยามที่ กำหนดเพราะไม่สามารถ แสดงให้เห็นได้ว่าด้านทุกด้าน มีความเท่ากันอย่างไร จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

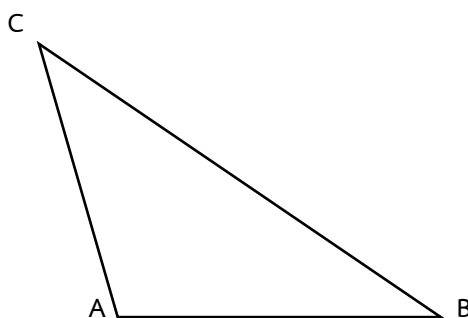
F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มีมุมภายในรวมกันได้ 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวที่จำเป็น และเพียงพอ เช่น ด้านที่ ประชิดกันมีขนาดเท่ากัน มุม ตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน เส้น ทแยงมุมตั้งฉากกัน มีการ พิสูจน์ประกอบการพิจารณา สมบัติของรูป คือ มุมภายใน รวมกันได้ 360 องศา จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 3
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	2) ด้านที่ประชิดกันมี ขนาดเท่ากัน	
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	3) เส้นทแยงมุมยาวไม่ เท่ากัน แต่ตั้งฉากซึ่งกัน และกัน	
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	4) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่ง กันและกัน 5) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน 1 คู่ 6) มีแกนสมมาตร 1 แกน	

F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว

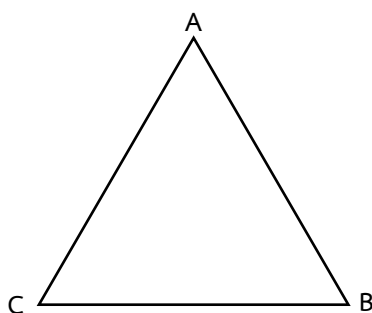


ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) ประกอบด้วยมุมแหลม 2 มุม มุมป้าน 1 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว ที่จำเป็นและเพียงพอ เช่น มี ด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน มุมที่ ฐานมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ มีมุม แหลม 2 มุม มุมป้าน 1 มุม โดยมีการพิสูจน์สมบัติของรูป คือ มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 3
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	เท่ากับ 180 องศา	
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	3) มีมุมที่ฐานขนาดเท่ากัน 1 คู่ 4) มีแกนสมมาตร 1 แกน	
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

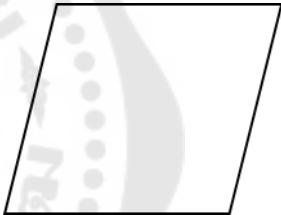
กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูป
สามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่า $\hat{A}BC = \hat{B}CA = \hat{C}AB$ โดยการลากเส้นแบ่งครึ่ง มุมและแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้มุมคู่ที่สมนัยกันมี ขนาดเท่ากัน แล้วพิสูจน์ใน ทำนองเดียวกันอีกครั้ง จึง ทำให้ทราบว่า $\hat{A}BC =$ $\hat{B}CA = \hat{C}AB$	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ความ สมมูลของบทนิยามที่ กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยม ด้านเท่าโดยใช้การพิสูจน์ อย่างมีแบบแผน ประกอบด้วย การเขียนสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการ พิสูจน์ การลากเส้นแบ่งครึ่ง มุม แล้วแสดงความเท่ากันทุก ประการ ของบทนิยามที่โจทย์ กำหนดและสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้ในการให้เหตุผลได้ อย่างสมเหตุสมผล จึงสรุปได้ ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

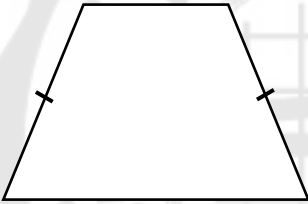
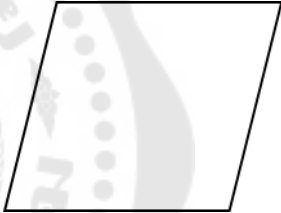
ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้			
1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส			
 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีด้านตรงข้ามขนาน กัน 2 คู่ 1.2) มีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.3) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก 1.4) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่ง ซึ่งกันและกัน	สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากสมบัติของรูป และการพับรูปเพื่อหาจำนวน แกนสมมาตร จึงสรุปได้ว่า

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		2. สมบัติทั้งหมดที่มีแคในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุม 4 มุมมีขนาดเท่ากัน มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก 2.2) เส้นทแยงมุมมีขนาดเท่ากัน 2.3) มีแกนสมมาตร 4 แกน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแคในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ 3.2) เส้นทแยงมุมมีขนาดไม่เท่ากัน 3.3) มีแกนสมมาตร 2 แกน	นักเรียนอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น

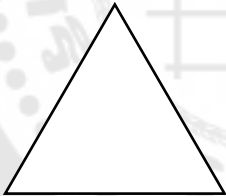
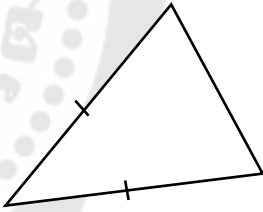
ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู  รูปสี่เหลี่ยมคางหมู  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีมุมที่ขนาดเท่ากัน 2 คู่	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู 2.1) เส้นทแยงมุมมีขนาด เท่ากัน 1 คู่ 2.2) เส้นทแยงมุมไม่แบ่ง ครึ่งซึ่งกันและกัน 2.3) เส้นทแยงมุมตัดกัน ไม่เป็นมุมฉาก 2.4) มีด้านขนานกัน 1 คู่	เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากสมบัติของรูป จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 3 ขั้นต้น

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		2.5) มีด้านที่มีขนาดเท่ากัน 1 คู่ 2.6) มีแกนสมมาตร 1 แกน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) เส้นทแยงมุมขนาดไม่เท่ากัน 3.2) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน 3.3) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก 3.4) มีด้านขนานกัน 2 คู่ 3.5) มีด้านทุกด้านขนาดเท่ากัน 3.6) มีแกนสมมาตร 2 แกน	

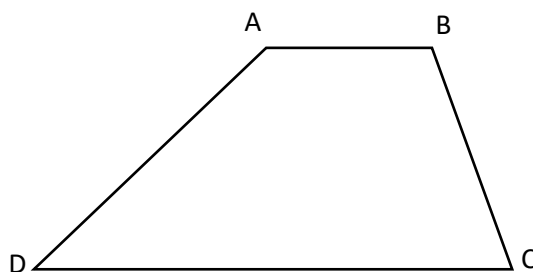
ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้าน้ำจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้าน้ำจั่ว 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้าน้ำจั่ว 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้าน้ำจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้าน้ำจั่ว			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนจำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้าน้ำจั่วโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป และมีการพิสูจน์สมบัติที่ได้มาของรูปสามเหลี่ยม
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มุมภายในรวมกันได้ 180 องศา 1.2) มีมุม 3 มุม มีด้าน 3 ด้าน	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) มีด้าน 3 ด้านยาวเท่ากัน	

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		2.2) มีมุม 3 มุมขนาด เท่ากัน $= 60^\circ$ 2.3) มีแกนสมมาตร 3 แกน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) มีด้าน 2 ด้านเท่ากัน 3.2) มีมุมที่ฐานขนาด เท่ากัน 2 มุม 3.3) มีแกนสมมาตร 1 แกน	ได้แก่ การหาผลรวมมุม ภายในของรูปสามเหลี่ยม จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 3

P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวม มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม คางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า
----------	--	--	---

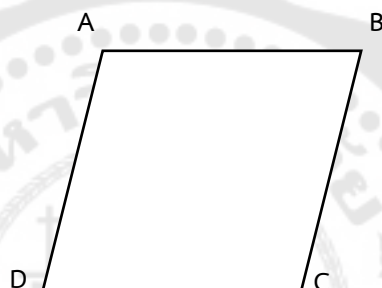
ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	โดยนักเรียนแสดงการ พิสูจน์ 2 วิธี ประกอบด้วย	ผลรวมมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยใช้การพิสูจน์ อย่างมีแบบแผน ใช้ทฤษฎี และสมบัติต่าง ๆ ในการให้ เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล โดยแบ่งออกเป็น 2 วิธี ได้แก่ วิธีที่ 1 คือการลากเส้นทแยง มุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาผลรวมมุม ภายในของรูปสามเหลี่ยมแต่ละ รูปซึ่งมีขนาด 180 องศา วิธีที่ 2 คือการต่อเส้น ขนานเพื่อใช้ทฤษฎีที่ เกี่ยวกับที่เกี่ยวกับมุมแย้ง และมุมตรงในการแสดงว่า ผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมเป็น 360 องศา
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	วิธีที่ 1 เป็นการลากเส้น ทแยงมุมเพื่อแบ่งรูป สี่เหลี่ยมออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว พิจารณาผลรวมมุมภายใน ของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละ รูป วิธีที่ 2 เป็นการต่อเส้น ขนานเพื่อใช้ทฤษฎีที่ เกี่ยวกับที่เกี่ยวกับมุมแย้ง และมุมตรงในการแสดงว่า ผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมเป็น 360 องศา	วิธีที่ 1 คือการลากเส้นทแยง มุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาผลรวมมุม ภายในของรูปสามเหลี่ยมแต่ละ รูปซึ่งมีขนาด 180 องศา วิธีที่ 2 คือการต่อเส้นขนาน เพื่อใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวกับมุม แย้งและมุมตรงในการแสดง ว่าผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมเป็น 360 องศา จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 4

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

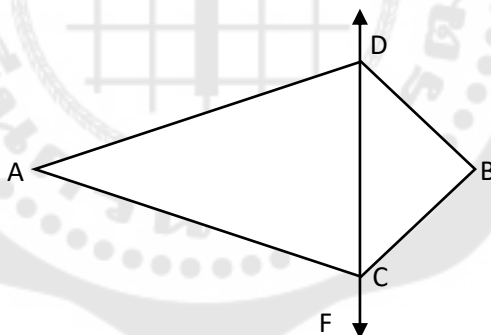


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็น 4 รูป แล้วนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมาใช้ในการให้เหตุผล เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยใช้การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ประกอบด้วยการลากเส้นทแยงมุม แสดงความเท่ากันทุกประการ โดยนำสมบัติต่างของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมาใช้ในการให้เหตุ แต่ยังขาดความ
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับรูปสามเหลี่ยมอีก 2 รูป จึงทำให้ทราบว่า	สมเหตุสมผลในการลาก $\overline{BD}$ แล้วแบ่งครึ่งมุม $\angle ABC$ เพื่อพิสูจน์ว่า
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน		

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		เส้นทแยงมุมของรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่ง ครึ่งซึ่งกัน	$\triangle ABX \cong \triangle CBX$ และ ขาดความสมเหตุสมผลใน การลาก $\overline{AC}$ แล้วแบ่งครึ่งมุม $\widehat{BCD}$ เพื่อพิสูจน์ว่า $\triangle BCX \cong$ $\triangle DCX$ จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overline{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การ พิสูจน์โดยกำหนดให้ มีการ ลากเส้นทแยงมุม $\overline{AB}$ แล้ว แบ่งครึ่ง $\widehat{CBD}$ แล้ว	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การ พิสูจน์อย่างมีแบบแผน
----------	--	--	--

ตาราง 19 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	นำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุม ตรง มาใช้ในการให้เหตุผล และแสดงความเท่ากันทุก ประการ	นำทฤษฎีบทและสมบัติต่าง ๆ มาใช้ในการให้เหตุผล ประกอบด้วยการลากเส้น ทแยงมุม แสดงความเท่ากัน ทุกประการ ทฤษฎีบทและ สมบัติต่าง ๆ ในการให้เหตุผล แต่ในช่วงแรกที่มีการลาก $\overline{AB}$ เพื่อแบ่งครึ่งมุม $D\hat{B}C$ ยังขาด ความสมเหตุสมผลในการ ลากมาแล้วแบ่งครึ่งมุม $D\hat{B}C$ จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 4 ขั้นต้น
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน		

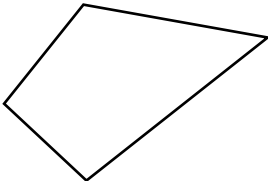
จากตาราง 19 พบว่าเจเจมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตรึงรูปวางอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 4 และการกำหนดบทนิยามมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 3 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น และด้านการพิสูจน์อยู่ในระดับที่ 4

จากตาราง 17 – 19 พบว่านักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตรึงรูปวางอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 4 และการกำหนดบทนิยามมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 3 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น และด้านการพิสูจน์อยู่ในระดับที่ 4

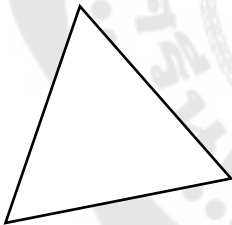
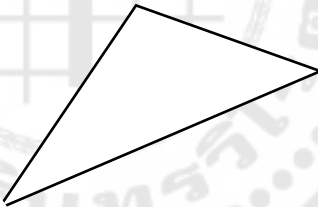
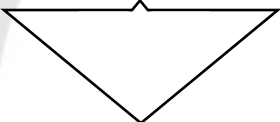
2. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มปานกลาง

การนำเสนอผลการวิจัยในส่วนนี้ จะเป็นการนำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับผลของการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ทั้ง 4 ด้าน ประกอบด้วย ด้านการตระหนักรูปร่าง จำนวน 3 ข้อ ด้านบทนิยาม จำนวน 6 ข้อ แบ่งออกเป็นการใช้บทนิยาม จำนวน 3 ข้อและการกำหนดบทนิยาม จำนวน 3 ข้อ ด้านการจัดหมวดหมู่ จำนวน 3 ข้อ และด้านการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อ และผลของการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task base interview) ของนักเรียนเป้าหมายที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางทั้ง 3 คน ประกอบด้วย วิวกะ โต๊ะและอิงค์ มีรายละเอียดดังตารางต่อไปนี้

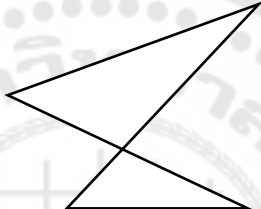
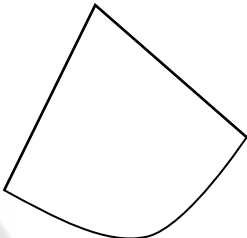
ตาราง 20 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของวิวกะ

ด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณาจากลักษณะภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะมี 4 ด้าน และมี 4 มุม หมายเลข 2 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะมี 4 ด้าน	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิจารณาจากจำนวนมุมและจำนวนด้านของรูป มีการใช้บทนิยาม

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	แต่ไม่มี 4 มุม (โค้งไม่ นับเป็นมุม) หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยมเพราะว่ามี 4 ด้านแต่ไม่มี 4 มุม (เส้น เปิดไม่บรรจบกัน)	ประกอบประสิทธิภาพที่ สอดคล้องกับรูปภาพที่เคย เห็นเป็นตัวตั้ง แล้วนำมา พิจารณาร่วมกับบทนิยาม ของรูปสี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้านและมี 3 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก จำนวนมุมและจำนวนด้าน ของรูปและการเป็นรูปปิด จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้าน และไม่มี 3 มุม หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้าน และไม่มี 3 มุม	

ตาราง 20 (ต่อ)

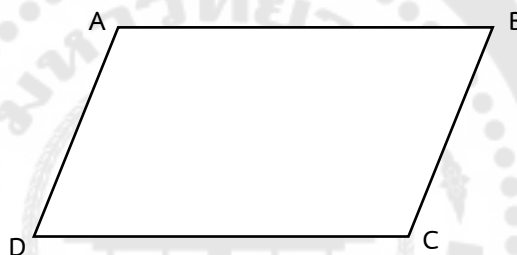
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีด้าน 4 ด้าน และมีมุม 4 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก ลักษณะภายนอกที่ ประกอบด้วย จำนวนด้าน และจำนวนมุม ถึงแม้ใน หมายเลข 2 และหมายเลข 3 จะเป็นรูปแบบที่ยังไม่เคยพบ ในบทเรียนแต่ลักษณะเหตุผล ที่ใช้ในการตอบยังคงอ้างอิง จากจำนวนมุม จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 1 แต่มี แนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แต่ถ้า มองภาพเป็นรูปเดียวจะไม่ เป็น หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยมเพราะมีด้านโค้ง	

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



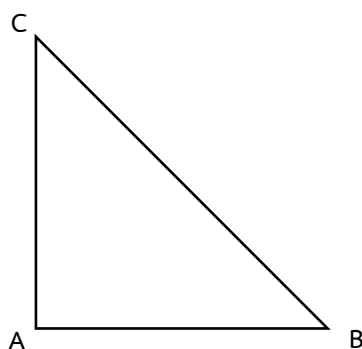
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน เพราะรูป สี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้าน ตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ โดย การลากเส้นทแยงมุมเพื่อ แบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน จะได้ มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาด เท่ากัน แล้วนำทฤษฎีบทที่ เกี่ยวกับมุมแย้งมาใช้แสดง ว่าด้านตรงข้ามขนานกัน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนนำบทนิยาม มาใช้และแสดงความ สอดคล้องกันระหว่างบท นิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้าน ขนานที่กำหนดให้กับสิ่งที่ โจทย์กำหนด โดยใช้การ พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน ซึ่งประกอบด้วยการลากเส้น เพิ่มเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน		
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้		

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ด้าน - ด้าน - ด้าน ซึ่งเกิดจาก การลากเส้นทแยงมุมและนำ สิ่งที่โจทย์กำหนดมาใช้ แล้ว นำทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับมุม แย้งมาใช้ในการแสดงว่าด้าน ตรงข้ามขนานกัน เพื่อให้ สอดคล้องกับบทนิยามที่ กำหนด แต่นักเรียนมีความ เข้าใจผิดว่าความเท่ากันทุก ประการกับความคล้ายคืออัน เดียวกัน จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม

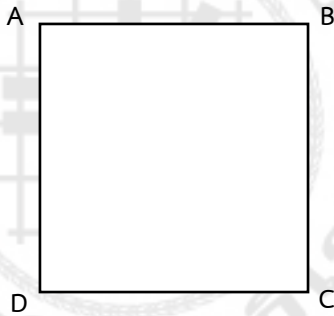
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{A}BC = \hat{A}CB = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมฉากหน้าจั่ว เนื่องจาก นักเรียนพิสูจน์ว่า $AC =$	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	AB โดยการลากเส้นตั้ง ฉาก เพื่อแบ่งรูป	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุม ฉากหน้าจั่ว โดยแสดงการ
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	สามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการ แบบ มุม - มุม - ด้าน จะได้ ด้านที่สมนัยกันมีขนาด เท่ากัน และพิสูจน์ว่ามีมุม ฉาก 1 มุมโดยนำทฤษฎี บทที่เกี่ยวข้องกับผลรวม มุมภายในของรูป สามเหลี่ยมมาใช้ในการให้ เหตุผล และสรุปผลที่ได้ให้ สอดคล้องกับบทนิยามที่ กำหนด	พิสูจน์ว่า $AC = AB$ โดยการ ลากเส้นตั้งฉาก เพื่อแบ่งรูป สามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน จะได้ด้านที่ สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และ พิสูจน์ว่ามีมุมฉาก 1 มุมโดย นำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ ผลรวมมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมมาใช้ในการให้ เหตุผลว่ามุมที่เหลือเป็นมุม ฉาก ซึ่งสอดคล้องกับบท นิยามที่กำหนด จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

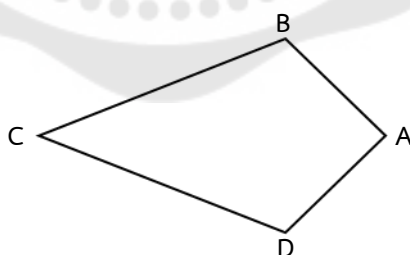
ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ 			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เนื่องจาก นักเรียน พิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมเป็น	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนนำบทนิยาม
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	มุมฉาก โดยใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการให้เหตุผล	มาใช้และพยายามแสดง ความสอดคล้องกันระหว่าง
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้	และนำเสนอสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมาใช้ในการแสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากัน	บทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยการใช้การพิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก และการนำเสนอสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมาใช้ในการแสดงว่า

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน แต่เนื่องจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะสอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เพียงแค่ด้านตรงข้ามจะยาวเท่ากัน ซึ่งขาดความสมเหตุสมผลระหว่างเหตุผลและบทนิยามที่กำหนดให้ จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



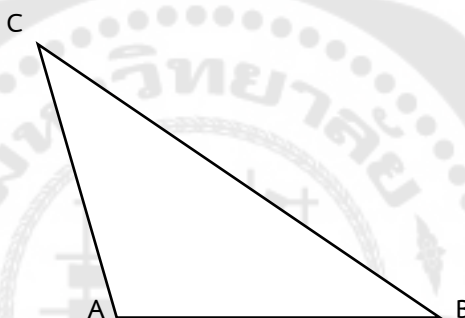
ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มีด้านติดกัน 2 คู่ยาว เท่ากัน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว เช่น มีด้าน ติดกัน 2 คู่ยาวเท่ากัน มีเส้น ทแยงมุม 2 เส้นที่ตัดกันเป็น มุมฉาก เส้นทแยงมุมหลัก เป็นเส้นแบ่งครึ่งของเส้น ทแยงมุมอีกเส้น มุมที่อยู่ ระหว่างด้านที่มีความยาว เท่ากันจะเท่ากัน เส้นทแยง มุมหลักแบ่งรูปว่าวออกเป็น 2 สามเหลี่ยมที่เท่ากัน ซึ่งทราบ โดยการลากเส้นทแยงมุม แล้วพิจารณาร่วมกับบท นิยาม การมองภาพ และการ พิสูจน์แบบปากเปล่า จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	2) มีเส้นทแยงมุม 2 เส้นที่ ตัดกันเป็นมุมฉาก	
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	3) เส้นทแยงมุมหลัก เป็น เส้นแบ่งครึ่งของเส้น ทแยงมุมอีกเส้น	
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	4) มุมที่อยู่ระหว่างด้านที่มี ความยาวเท่ากันจะ เท่ากัน 5) เส้นทแยงมุมหลักแบ่ง รูปว่าวออกเป็น 2 สามเหลี่ยมที่เท่ากัน	

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว



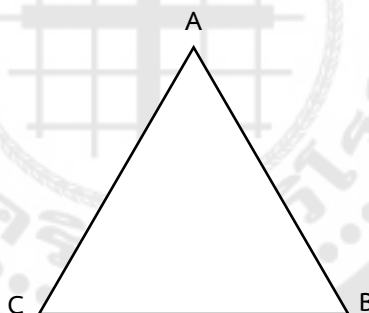
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) เป็นรูปสามเหลี่ยม 2) มีมุมป้านหนึ่งมุม 3) มีมุมแหลมสองมุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว เช่น มีมุมป้าน 1 มุม มีมุม แหลม 2 มุม มีด้านสองด้าน ยาวเท่ากัน มีแกนสมมาตร 1 แกน เส้นสูงแบ่งครึ่งมุมและ เส้นกึ่งกลางจากมุมป้านจะ อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม จุด ศูนย์กลางของวงกลมที่ ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมจะอยู่ ภายนอกสามเหลี่ยม โดยใช้ วิธีการลากเส้นประกอบการ
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	4) มีด้านสองด้านยาว เท่ากัน	
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	5) มีแกนสมมาตร 1 แกน 6) เส้นสูงแบ่งครึ่งมุมและ เส้นกึ่งกลางจากมุม ป้านจะอยู่ภายในรูป สามเหลี่ยม	
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	7) จุดศูนย์กลางของ วงกลมที่ล้อมรอบรูป สามเหลี่ยมจะอยู่ ภายนอกสามเหลี่ยม	

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			พิจารณาสมบัติต่าง ๆ และนำ บทนิยามมาใช้ประกอบการ พิจารณาด้วย จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2

F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูป
สามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



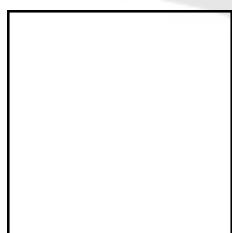
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่า $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB$ โดยพิจารณาจากสิ่งที่เคย ทราบมา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนไม่ได้พิสูจน์ ความสมมูลของบทนิยามที่ กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยม ด้านเท่า แต่ใช้การพิจารณา จากบทนิยามที่เคยทราบมา
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		

ตาราง 20 (ต่อ)

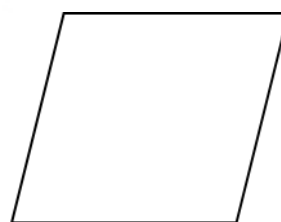
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		และมีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับ บทนิยามของรูปสามเหลี่ยม ด้านเท่าที่เคยทราบมาว่าด้าน ทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุก มุมเท่ากัน จึงสรุปได้ว่า นักเรียนไม่เกิดระดับ
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



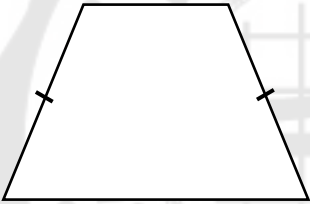
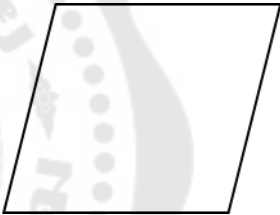
รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้าน ขนาน 1.2) มีด้านตรงข้ามขนาน	

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	กัน 1.3) มีด้านทั้ง 4 เท่ากัน 1.4) มีมุมตรงข้ามเท่ากัน 1.5) มีเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกัน 1.6) มีเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก 2.2) เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) ไม่มีมุมฉาก (ยกเว้นกรณีพิเศษที่สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนกลายเป็นจัตุรัส 3.2) เส้นทแยงมุมยาวไม่เท่ากัน	สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยพิจารณาจากการวัดความยาวของด้าน และพิจารณาพร้อมกับบทนิยาม แต่ขาดความสมเหตุสมผลเกี่ยวกับการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เนื่องจากในสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมทั้งสองระบุว่าด้านทั้ง 4 ยาวเท่ากันแต่ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีเพียงแค่ด้านตรงข้ามที่มีความยาวเท่ากัน จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2

ตาราง 20 (ต่อ)

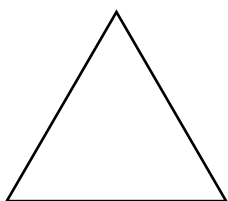
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้			
1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู			
 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) เป็นรูปสี่เหลี่ยม มีมุมภายในรวมกัน 360 องศา	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู 2.1) มีด้านคู่หนึ่งขนาน กัน 2.2) เส้นทแยงมุมมีความ ยาวเท่ากันและไม่ จำเป็นต้องตั้งฉากกัน	สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาบทนิยามของรูป สี่เหลี่ยม มีการลากเส้นแล้ว วัดขนาดของเส้นที่วาดเพื่อ เปรียบเทียบความยาว จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 2

ตาราง 20 (ต่อ)

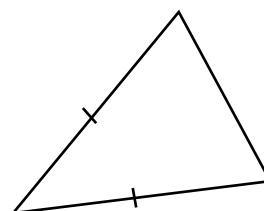
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มีด้านทั้ง 4 เท่ากัน 3.2) มีด้านตรงข้ามขนานกัน 3.3) มุมตรงข้ามเท่ากัน 3.4) เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันและตั้งฉากกัน	

ตาราง C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

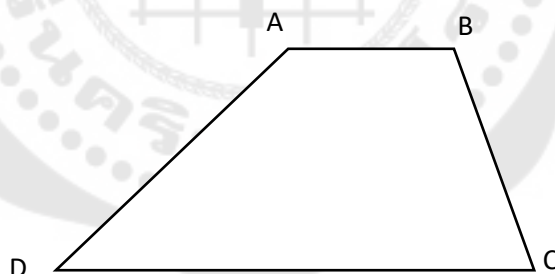
ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) เป็นรูปสามเหลี่ยม 1.2) มุมภายในรวมกันได้ 180 องศา	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.3) มีมุมแต่ละมุมเป็น มุมแหลมทั้งหมด 1.4) มีเส้นสูง เส้นแบ่ง ครึ่งมุม และเส้นกึ่งกลาง ตัดกันที่จุดเดียวกัน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) มีด้าน 3 ด้านยาว เท่ากัน 2.2) มีมุม 3 มุมขนาด เท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) มีด้านที่มีความยาว ไม่เท่ากัน (ยกเว้นกรณี พิเศษที่กลายเป็น สามเหลี่ยมด้านเท่า)	สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูป สามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาสมบัติที่มี เหมือนกันจากบทนิยามและ ทฤษฎีบทของรูปสามเหลี่ยม ในการพิจารณาว่าผลรวมมุม ภายในของรูปสี่เหลี่ยมเป็น 360 องศา มีการลากเส้นตั้ง ฉากที่จุดยอดมุมเพื่อ พิจารณาว่ามีขนาดเล็กกว่า หรือใหญ่กว่า ถ้าหากเล็กกว่า จะถือว่าเป็นมุมแหลม จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3.2) มีมุมที่ไม่จำเป็นต้อง เท่ากันทุกมุมแต่เป็นมุม แหลม 3.3) ด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน 3.4) มุมมีขนาดเท่ากัน 2 มุม	

P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา

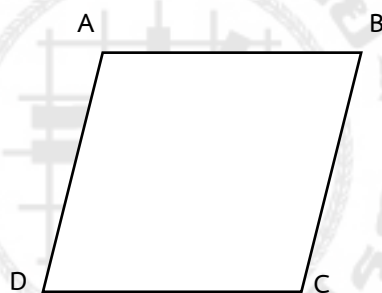


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยใช้สูตรผลรวมของมุมภายใน เพื่อแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูป
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	โดยใช้สูตรผลรวมของมุมภายใน เพื่อแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	สามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยใช้สูตรผลรวมของมุมภายใน เพื่อแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูป
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน		

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			สี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 3

P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

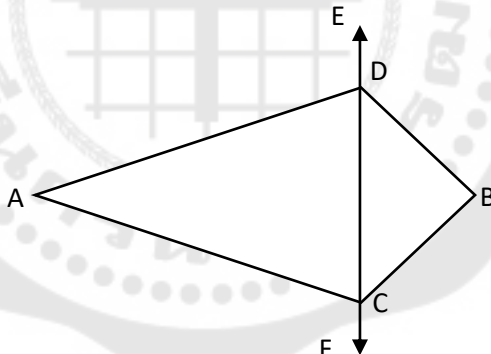


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม แล้วลากเส้นตั้งฉากเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการ แบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน แล้วจะได้ว่าเส้นทแยงมุมมีขนาดยาวเท่ากัน แต่พิสูจน์	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม แล้วลากเส้นตั้งฉากเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน แล้วจะได้
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน		
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน		

ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		เพียง 1 เส้น	ว่าเส้นทแยงมุมมีขนาดยาว เท่ากัน แต่นักเรียนพิสูจน์ เพียงแค่ 1 เส้น จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

P3กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การพิสูจน์โดย กำหนดให้ โดยการ ลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปแล้วใช้สิ่งที่กำหนดให้ ในการแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การ พิสูจน์ โดยการลากเส้นทแยง มุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูปแล้วใช้สิ่งที่ กำหนดให้ในการแสดงว่ารูป
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน		

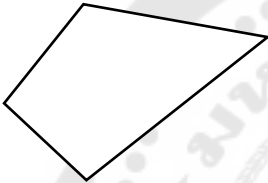
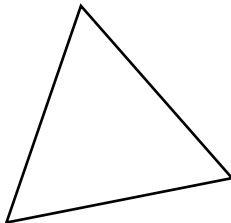
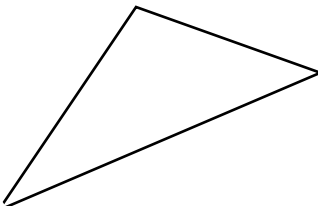
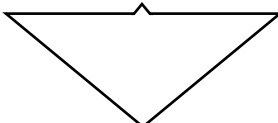
ตาราง 20 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้ว แสดงว่ามุมที่ฐานของรูป สามเหลี่ยม ACD มีขนาด เท่ากัน แล้วแสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยนำ ทฤษฎีบทของมุมตรงมาใช้ ในการให้เหตุผล	สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วแสดง ว่ามุมที่ฐานของรูป สามเหลี่ยม ACD มีขนาด เท่ากัน แล้วแสดงว่า $\widehat{ADE} =$ $\widehat{ACE}$ โดยนำทฤษฎีบทของ มุมตรงมาใช้ในการให้เหตุผล แต่การแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - มุม - ด้าน ขาดความ สมเหตุสมผล เนื่องจากมุม ต้องอยู่ระหว่างด้านคู่ที่ยาว เท่ากัน แต่ด้านคู่ที่ใช้ในการ ให้เหตุผลยังไม่สอดคล้องกับ ข้อสรุปแต่การแสดงว่ามุมที่ กำหนดให้มีขนาดเท่ากันมี ความสมเหตุสมผล จึงสรุปได้ ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

จากตาราง 20 พบว่าริวโกะมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตระหนักรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น และการกำหนดบทนิยามมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 2 และด้านการพิสูจน์มีแนวโน้มที่จะอยู่ในระดับที่



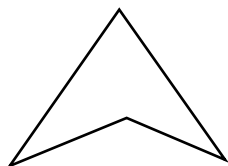
ตาราง 21 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของโต๋

ด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณาจากลักษณะภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะมี 4 มุม มี 4 ด้าน มุมรวม 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า พิจารณาจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งประกอบด้วยการมีด้าน 4 ด้าน มีมุม 4 มุม การเป็นรูปปิดและมุมภายในรวมกันได้ 360 องศา จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณาจากสมบัติทางคณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะไม่เป็นมุม 4 มุม หมายเลข 3 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะด้านไม่ติดกัน	
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			

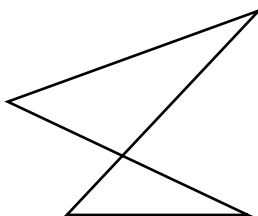
ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมีมุม 3 มุม ด้าน 3 ด้าน มุมรวมได้	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก สมบัติของรูปสามเหลี่ยมซึ่ง ประกอบด้วย ด้าน 3 ด้าน มุม 3 มุม มุมรวมกันได้ 180 องศาและเป็นรูปปิด จึงสรุป ได้นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	180 องศา หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมีมุมไม่ ถึง 3 มุม หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมีมุม มากกว่า 3 มุม (มี 6 มุม) และด้านมากกว่า 3 ด้าน (มี 6 ด้าน) มุมรวมได้ 180 องศา	

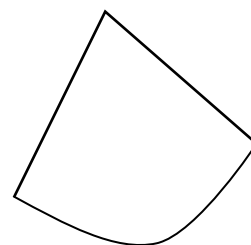
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



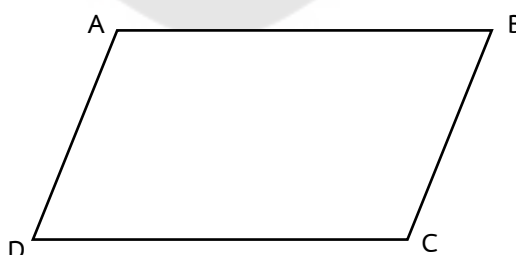
หมายเลข 3

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีมุม 4 มุม มีด้าน 4 ด้าน มุมรวมกันได้	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก สมบัติของรูปสามเหลี่ยมและ รูปสี่เหลี่ยม และมีการ พิจารณาจากลักษณะ ภายนอกที่มาเหมือนกับ รูปแบบที่เคยเห็นในรูปที่ 2 จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	360 องศา หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยมเพราะด้านตัดกัน หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยมเพราะมีด้าน 2 ด้าน มุม 1 มุม	

U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

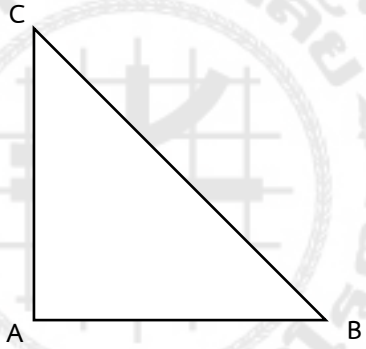
กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	□ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน เพราะรูป สี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้าน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนนำบทนิยาม มาใช้และแสดงความ สอดคล้องกันระหว่างบท นิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้าน ขนานที่กำหนดให้กับสิ่งที่ โจทย์กำหนด โดยใช้การ พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน ซึ่งประกอบด้วยการลากเส้น เพิ่มเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน ซึ่งเกิดจาก การลากเส้นทแยงมุมและนำ สิ่งที่โจทย์กำหนดมาใช้ แล้ว นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุม แย้งมาใช้ในการแสดงว่าด้าน ตรงข้ามขนานกัน เพื่อให้ สอดคล้องกับบทนิยามที่ กำหนด จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	ตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ โดย การลากเส้นทแยงมุมเพื่อ	
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	แบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน จะได้ มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาด เท่ากัน แล้วนำทฤษฎีบทที่ เกี่ยวกับมุมแย้งมาใช้ในการแสดง ว่าด้านตรงข้ามขนานกัน	

ตาราง 21 (ต่อ)

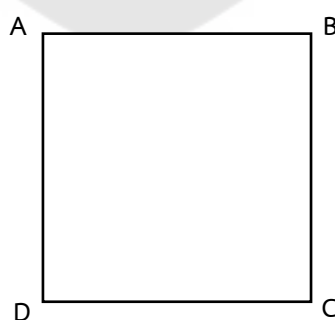
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม			
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ			
			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว เนื่องจากนักเรียนพิสูจน์ว่า $AC = AB$ โดยการลากเส้นตั้งฉาก เพื่อแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน จะได้ด้านที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และพิสูจน์ว่ามีมุมฉาก 1 มุมโดยนำทฤษฎี	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยแสดงการพิสูจน์ว่า $AC = AB$ โดยการลากเส้นตั้งฉาก เพื่อแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน จะได้ด้านที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และ
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน		
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้		

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		บทที่เกี่ยวกับผลรวม มุมภายในของรูป สามเหลี่ยมมาใช้ในการให้ เหตุผล และสรุปผลที่ได้ให้ สอดคล้องกับบทนิยามที่ กำหนด	พิสูจน์ว่ามีมุมฉาก 1 มุมโดย นำทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับ ผลรวมมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมมาใช้ในการให้ เหตุผลว่ามุมที่เหลือเป็นมุม ฉาก ซึ่งสอดคล้องกับบท นิยามที่กำหนด จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ

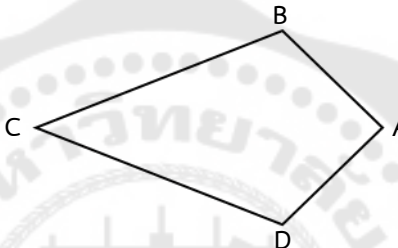


U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัส เนื่องจาก ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่า	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนนำบทนิยาม
-------------------------	--	--	--

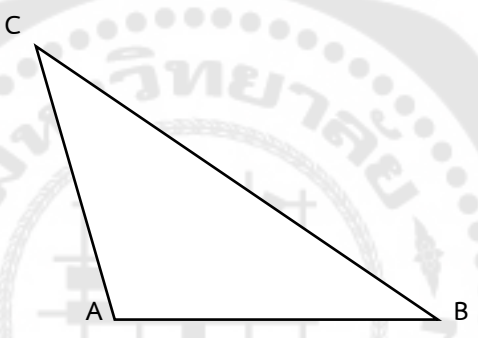
ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	ด้านแต่ละด้านยาวเท่ากัน แต่สามารถพิสูจน์ได้ว่ามุม	เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมมาใช้ในการ การพิสูจน์ได้ว่ามุมแต่ละมุมมี
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	แต่ละมุมมีขนาด 90 องศา โดยนำผลรวมมุมภายใน ของรูปสี่เหลี่ยมและสิ่งที่	ขนาด 90 องศา โดยนำ ผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์
		โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการ การตั้งสมการเพื่อแสดงว่า มุมแต่ละมุมมีขนาด 90 องศา และพิสูจน์ได้ว่าด้าน ตรงข้ามมีความยาวเท่ากัน โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการ แบบ มุม - มุม - ด้าน และ ไม่สามารถสรุปได้ว่าด้าน ทุกด้านยาวเท่ากัน	กำหนดให้มาใช้ในการตั้ง สมการเพื่อแสดงว่ามุมแต่ละ มุมมีขนาด 90 องศา และ พิสูจน์ได้ว่าด้านตรงข้ามมี ความยาวเท่ากัน โดยการ ลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูป ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน และไม่ สามารถสรุปได้ว่าด้านทุก ด้านยาวเท่ากันเนื่องจาก ข้อมูลต่าง ๆ ไม่เพียงพอใน การสรุปว่าด้านทุกด้านจะ ยาวเท่ากัน จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็น มุมฉาก และมีเส้น ทแยงมุมเส้นหนึ่งแบ่ง ครึ่งอีกเส้นหนึ่ง 2) ด้านที่อยู่ติดกันยาว เท่ากัน 2 คู่ 3) มุมภายในรวมกันได้ 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว เช่น เส้น ทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก และมีเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง แบ่งครึ่งอีกเส้นหนึ่ง ด้านที่อยู่ ติดกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุม ภายในรวมกันได้ 360 องศา โดยนักเรียนแสดงการพิสูจน์ ประกอบการให้เหตุผลว่ามุม ภายในรวมกันได้ 360 องศา จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 3 ขั้นต้น
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 21 (ต่อ)

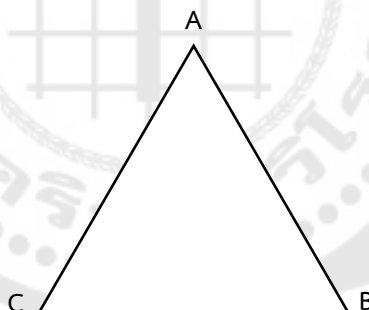
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มุมภายในรวมกันได้ 180 องศา 2) มุมหนึ่งมีค่ามากกว่า 90 องศาแต่น้อยกว่า 180 องศา มุมที่เหลือ 2 มุมรวมกันน้อยกว่า 90 องศา 3) $a^2 + b^2 < c^2$	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมทั่วไปในการ บอกว่ามุมภายในรวมกันได้ 180 องศา แล้วใช้การวัด ขนาดของมุมเพื่อสรุปว่ามุม หนึ่งมีค่ามากกว่า 90 องศา แต่น้อยกว่า 180 องศา มุมที่ เหลือ 2 มุมรวมกันน้อยกว่า 90 องศา และการวัดความ ยาวด้านเพื่อสรุปว่า
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			$a^2 + b^2 < c^2$ เมื่อ กำหนดให้ $AB = a$, $AC = b, BC = c$ จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2

F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



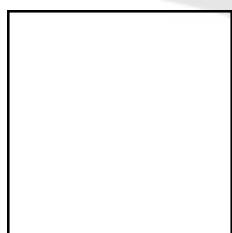
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่า $\hat{ABC} = \hat{BCA} = \hat{CAB}$ โดยการลากเส้น มัธยฐานเพื่อแบ่งรูป ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์โดยการ ลากเส้นมัธยฐานเพื่อแบ่งรูป ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน จะได้มุมคู่
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		

ตาราง 21 (ต่อ)

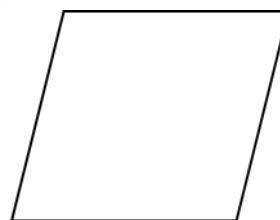
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	ด้าน - ด้าน - ด้าน จะได้ มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาด เท่ากัน โดยพิสูจน์ในทำ นอกเดียวกันอีกครั้งจึงได้ ข้อสรุปว่ามุมมีขนาด	ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน โดยพิสูจน์ในทำนอกเดียวกัน อีกครั้งจึงได้ข้อสรุปว่ามุมมี ขนาดเท่ากัน 3 มุม จากการ ให้เหตุผลของนักเรียน จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	เท่ากัน 3 มุม	

C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



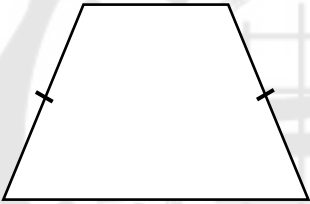
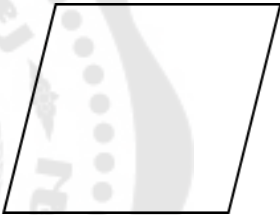
รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) ด้านเท่ากัน 4 ด้าน 1.2) ด้านตรงข้ามขนาน กัน	

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.3) มุมตรงข้ามเท่ากัน 1.4) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก 1.5) มุม 4 มุม 1.6) ด้าน 4 ด้าน 1.7) มุมภายใน 360 องศา 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุมทุกมุมเป็นมุม ฉาก 2.2) เส้นทแยงมุมยาว เท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) เส้นทแยงมุมยาวไม่ เท่ากัน	สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากการวัดความ ยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยม ลากเส้นทแยงมุมแล้ววัด ขนาดของมุม และพิจารณา ร่วมกับบทนิยามในการระบุ สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมทั้งสอง โดยการระบุสมบัติที่จำเป็น และเพียงพอของรูปสี่เหลี่ยม ทั้งสอง จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 2

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้			
1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู			
 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มุม 4 มุม 1.2) ด้าน 4 ด้าน 1.3) มุมภายใน 360 องศา	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู 2.1) มีด้านคู่หนึ่งขนาน กัน 2.2) เส้นทแยงมุมมีความ ยาวเท่ากันและ ไม่เป็นต้องตั้งฉากกัน	สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากสมบัติของรูป สี่เหลี่ยม วัดความยาวของ ด้านและพิสูจน์ประกอบ สมบัติที่ระบุ โดยระบุสมบัติที่ จำเป็นและเพียงพอของรูป สี่เหลี่ยมทั้งสอง จึงสรุปได้ว่า

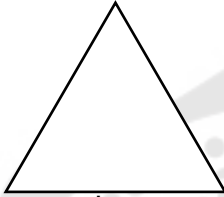
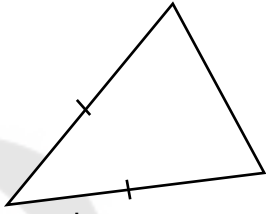
ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		2.3) มุมที่ฐานเดียวกัน ยาวเท่ากัน 2.4) เส้นทแยงมุมยาว เท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) ด้านยาวเท่ากันทุก ด้าน 3.2) มุมตรงข้ามเท่ากัน 3.3) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก	นักเรียนอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น

C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			
		รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูป สามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากสมบัติของ รูปสามเหลี่ยม การพิสูจน์ ประกอบสมบัติที่ระบุ แต่ใน การระบุยังขาดสมบัติบาง ประการ เช่น สมบัติเกี่ยวกับ เส้นทแยงมุม เป็นต้น จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มุม 3 มุม 1.2) ด้าน 3 ด้าน 1.3) มุมภายใน 180 องศา	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.4) มุมแหลมเหมือนกัน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) ด้านทุกด้านเท่ากัน 2.2) มุมทุกมุมเท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) ด้าน 2 ด้านยาว เท่ากัน 3.2) มุมที่ฐานของด้านที่ ไม่เท่า ยาวเท่ากัน	

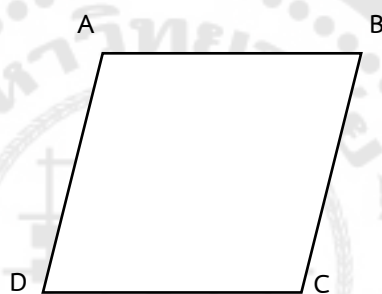
ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา			
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ซึ่งผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีขนาด 180 องศา จึงได้ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป	
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน	สามเหลี่ยม 2 รูป ซึ่งผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีขนาด 180 องศา จึงได้ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ในระดับที่ 3

P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

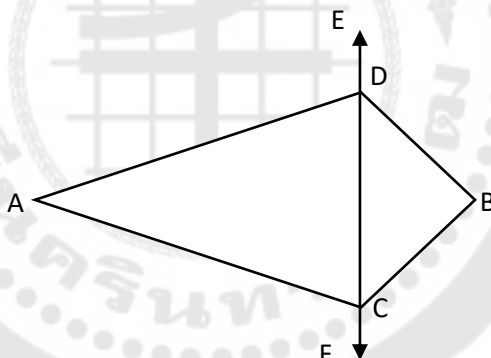


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม แล้วจะได้ว่าเส้นทแยงมุมมีขนาดยาวเท่ากัน	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม โดยนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมแย้งมาใช้ในการให้เหตุผล
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน		
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน		

ตาราง 21 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ประกอบ แล้วจะได้ว่าเส้น ทแยงมุมมีขนาดยาวเท่ากัน จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 4

P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การ พิสูจน์โดยกำหนดให้ โดย การลากเส้นตั้งฉากเพื่อ แบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูปแล้วใช้สิ่ง ที่กำหนดให้และสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ใน การแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การ พิสูจน์อย่างมีแบบแผน โดย การลากเส้นตั้งฉากเพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปแล้วใช้สิ่งที่กำหนดให้และ สมบัติของรูป
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน		

ตาราง 21 (ต่อ)

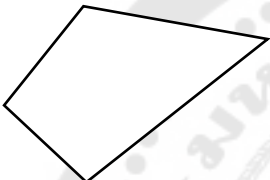
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	ทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการ แบบ มุม - มุม - ด้าน แล้ว ลากเส้นตั้งฉากอีกครั้งใน รูปสามเหลี่ยม ACD เพื่อ แบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่ามุมที่ฐานของ รูปสามเหลี่ยม ACD มี ขนาดเท่ากัน แล้วแสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยนำ ทฤษฎีบทของมุมตรงมาใช้ ในการให้เหตุผล	สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ในการ แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน แล้วลากเส้น ตั้งฉากอีกครั้งในรูป สามเหลี่ยม ACD เพื่อแบ่งรูป ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ ว่ามุมที่ฐานของรูป สามเหลี่ยม ACD มีขนาด เท่ากัน แล้วแสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยนำทฤษฎี บทของมุมตรงมาใช้ในการให้ เหตุผล แต่การแสดงว่ารูป สามเหลี่ยม 2 รูปที่เกิดจาก การแบ่งรูปสามเหลี่ยม ACD นั้น เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ยังขาด ความสมเหตุสมผลเนื่องจาก นักเรียนลากเส้นตั้งฉากต่อไป

ตาราง 21 (ต่อ)

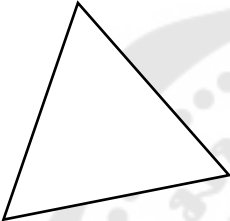
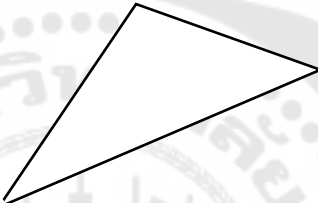
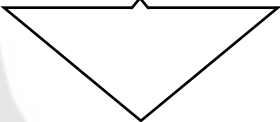
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ยังจุกดยอดมุม แล้วพิจารณา ว่าเส้นทั้ง 2 ต่อกันเป็น เส้นตรง จึงใช้สมบัติของมุม ตรงข้ามในการให้เหตุผล ซึ่ง เส้นที่วาดต่อกันอาจจะไม่เป็น เส้นตรง จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

จากตาราง 21 พบว่าได้มีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตรึงรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 4 และการกำหนดบทนิยามอยู่ในระดับที่ 2 ระดับที่ 3 ขั้นต้น และระดับที่ 4 ด้านการจัดหมวดหมู่มีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 3 ขั้นต้น และด้านการพิสูจน์มีแนวโน้มที่จะอยู่ในระดับที่ 4

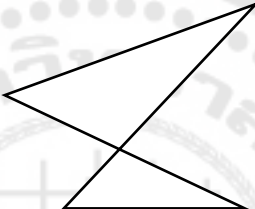
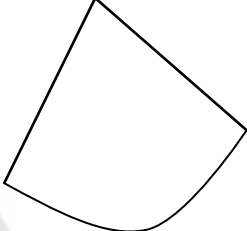
ตาราง 22 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของอิงค์

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เนื่องจากมีมุม ภายใน 4 มุม ด้าน 4 ด้าน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า พิจารณาจากบทนิยาม ของรูปสี่เหลี่ยม ประกอบด้วย การมีด้านทั้งหมด 4 ด้าน มี มุมทั้งหมด 4 มุม ภายในรูป สี่เหลี่ยมมีมุมรวมกันได้ 360 องศา จึงพบว่าหมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม แต่หมายเลข 2 และ 3 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะไม่สามารถ นับได้ว่ามีกี่ด้าน เนื่องจาก เป็นเส้นโค้ง หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะไม่มีเส้น ไหนชนกันเป็นมุมและด้าน	

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เนื่องจากมุม 3 มุม ด้าน 3 ด้าน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก บทนิยามของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งประกอบด้วย มีด้าน 3 ด้าน มีมุม 3 มุม มุมรวมกัน ได้ 180 องศา จึงพบว่า หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม แต่หมายเลข 2 และ 3 ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เนื่องจากมุม 2 มุม ด้าน 3 ด้าน หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม แต่เป็นรูปหก เหลี่ยม เนื่องจากมีมุม 6 มุม ด้าน 6 ด้าน	

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะ ประกอบด้วยด้าน 4 ด้าน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก การลากเส้น การนับจำนวน มุม โดยถ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยม จะต้องมีมุม 4 มุม และด้าน 4 ด้าน และการพิจารณาจาก ลักษณะของเส้น จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	มุม 4 มุม หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูปเพราะ เมื่อลากเส้นแบ่งครึ่งจาก ได้รูปสามเหลี่ยม 2 รูปซึ่ง แต่ละรูปมีด้าน 3 ด้านและ มุม 3 มุม หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยมเนื่องจากมีด้าน หนึ่งไม่ใช่ส่วนของเส้นตรง แต่เป็นเส้นโค้ง	

ตาราง 22 (ต่อ)

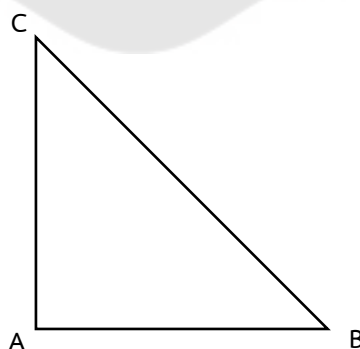
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ 			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน จะได้มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมแย้งมาใช้แสดงว่าด้านตรงข้ามขนานกัน	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนนำบทนิยามมาใช้และแสดงความสอดคล้องกันระหว่างบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่กำหนดให้กับสิ่งที่โจทย์กำหนด โดยใช้การพิสูจน์ซึ่งประกอบด้วยการลากเส้นเพิ่มเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน		
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้		

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ด้าน - ด้าน - ด้าน ซึ่งเกิดจาก การลากเส้นทแยงมุมและนำ สิ่งที่โจทย์กำหนดมาใช้ แล้ว นำทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับมุม แย้งมาใช้ในการแสดงว่าด้าน ตรงข้ามขนานกัน เพื่อให้ สอดคล้องกับบทนิยามที่ กำหนด จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4

U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม

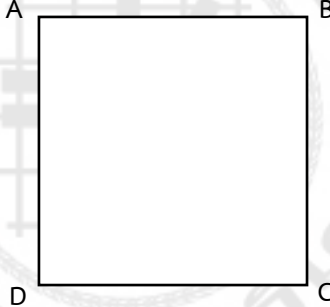
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{A}BC = \hat{A}CB = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมฉากหน้าจั่ว เนื่องจาก นักเรียนพิสูจน์ว่า	คำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หน้าจั่ว โดยแสดงการพิสูจน์ ว่า $AC = AB$ โดยการ ลากเส้นตั้งฉาก เพื่อแบ่งรูป สามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะ ได้ด้านที่สมนัยกันมีขนาด เท่ากัน และพิสูจน์ว่ามีมุม ฉาก 1 มุมโดยนำทฤษฎี บทที่เกี่ยวข้องกับผลรวม มุมภายในของรูป สามเหลี่ยมมาใช้ในการ แสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	$AC = AB$ โดยการ	
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	สามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะ ได้ด้านที่สมนัยกันมีขนาด เท่ากัน และพิสูจน์ว่ามีมุม ฉาก 1 มุมโดยนำทฤษฎี บทที่เกี่ยวข้องกับผลรวม มุมภายในของรูป สามเหลี่ยมมาใช้ในการ แสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม	

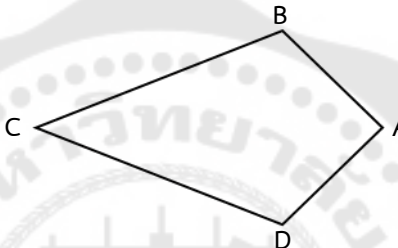
ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ 			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพราะมีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุม	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนนำบทนิยาม
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	เป็นมุมฉาก โดยการพิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมมีขนาด 90 องศา โดยการลากเส้น	เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมมาใช้ในการพิสูจน์ได้ว่ามุมแต่ละมุมมี
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้	ทแยงมุมแล้วนำผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม สิ่งที่เกี่ยวข้องที่กำหนดให้ และทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้ง มาใช้ใน	ขนาด 90 องศา โดยการลากเส้นทแยงมุมแล้วนำผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม สิ่งที่เกี่ยวข้องที่กำหนดให้ และทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้ง มาใช้ในการตั้งสมการ

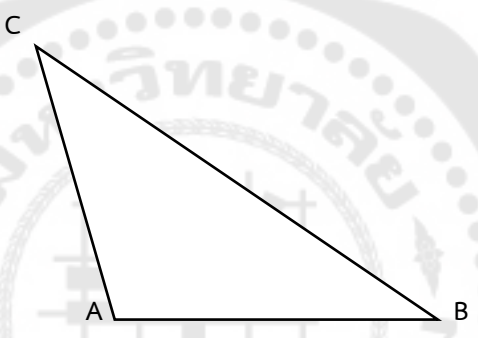
ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		การตั้งสมการเพื่อแสดงว่า มุมแต่ละมุมมีขนาด 90 องศา และพิสูจน์ได้ว่าด้าน ตรงข้ามมีความยาวเท่ากัน โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการ แบบ มุม – ด้าน - มุม แล้ว จะได้ว่าแต่ละด้านมีความ ยาวเท่ากัน	เพื่อแสดงว่ามุมแต่ละมุมมี ขนาด 90 องศา และพิสูจน์ได้ ว่าด้านตรงข้ามมีความยาว เท่ากัน โดยการลากเส้นทแยง มุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดง ว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม – ด้าน - มุม แล้วจะได้ว่า แต่ละด้านมีความยาวเท่ากัน แต่การสรุปว่าด้านทุกด้าน ยาวเท่ากันยังขาดความ สมเหตุสมผล เนื่องจากไม่มี อะไรที่สามารถเชื่อมโยงได้ว่า ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน โดย สามารถสรุปได้เพียงแต่ด้าน ตรงข้ามมีความยาวเท่ากัน เท่านั้น จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

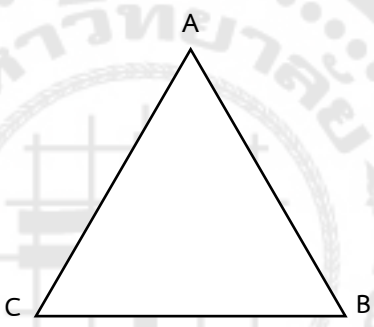
ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) ด้านที่อยู่ติดกันยาว เท่ากัน 2 คู่ 2) มุมตรงข้ามในแนว ทแยงมุมมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ 3) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็น มุมฉาก	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว โดยการ ลากเส้นทแยงมุมแล้วพบว่า ด้านที่อยู่ติดกันยาวเท่ากัน 2 คู่ มุมตรงข้ามในแนวทแยงมุม มีขนาดเท่ากัน 1 คู่ และเส้น ทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มี 1 มุมเป็นมุมป้าน 2) มีมุม 2 มุมที่เท่ากัน 3) ด้านประกอบมุมจั่ว(2 มุมที่เท่ากัน) มีความ ยาวเท่ากัน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากบทนิยาม ของรูปสามเหลี่ยม จึงได้ว่ามี ด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน มุม เท่ากัน 2 มุม และมุมป้าน 1 มุม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ ในระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 22 (ต่อ)

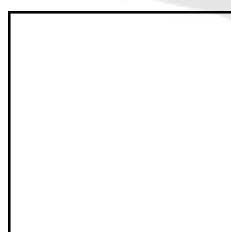
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน			
กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่า $\hat{A}BC = \hat{B}CA = \hat{C}AB$ โดยการลากเส้น	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	มีฐานไปตั้งฉากเพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม	พบว่า นักเรียนพิสูจน์โดยการ ลากเส้นมีฐานไปตั้งฉาก
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้มุม คู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน	เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดง ว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้มุมคู่ที่ สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน โดย

ตาราง 22 (ต่อ)

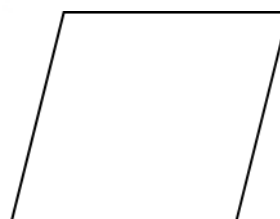
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	โดยพิสูจน์ในทำนอง เดียวกันอีกครั้ง จึงสรุปได้ ว่ามุมมีขนาดเท่ากัน 3 มุม	พิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีก ครั้งจึงได้ข้อสรุปว่ามุมมีขนาด เท่ากัน 3 มุม แต่การให้ เหตุผลของนักเรียนยังขาด ความสมเหตุสมผลในการ ลากเส้นไปตั้งฉากและแบ่ง ครึ่งด้าน จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีด้านทุกด้านยาว เท่ากัน 1.2) ด้านตรงข้ามกัน	

ตาราง 22 (ต่อ)

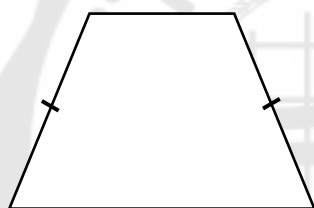
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	ขนานกัน 1.3) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก 1.4) เส้นทแยงมุมแบ่ง ครึ่งซึ่งกันและกัน 1.5) มุมภายในรวมกันได้ 360 องศา 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค้ใน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุมทุกมุมเป็นมุม ฉาก 2.2) เส้นทแยงมุมยาว เท่ากัน 2.3) มีแกนสมมาตร 4 แกน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค้ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) เส้นทแยงมุมยาวไม่ เท่ากัน 3.2) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน 2 คู่ 3.3) มีแกนสมมาตร 2 แกน	สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากการพับรูปเพื่อ พิจารณาแกนสมมาตร และ พิจารณาร่วมกับบทนิยามใน การระบุสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมทั้ง จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



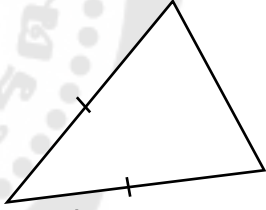
รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มุม 4 มุม 1.2) ด้าน 4 ด้าน 1.3) มุมภายใน 360 องศา	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู 2.1) มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน 2.2) มีด้านขนานกัน 1 คู่ 2.3) มีแกนสมมาตร 1 แกน	พิจารณาจากบทนิยามของรูป สี่เหลี่ยม การพับรูปและการ ลากเส้นทแยงมุม แกน สมมาตร แต่การระบุสมบัติ ของรูปสี่เหลี่ยมยังมีความ ซ้ำซ้อนอยู่ สมบัติทั้งหมดที่มี

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		2.4) มุมที่ฐานแต่ละคู่ ยาวเท่ากัน 2.5) เส้นทแยงมุมยาว เท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน 2 คู่ 3.2) เส้นทแยงมุมยาว เท่ากัน 3.3) มีด้านขนานกัน 2 คู่ 3.4) มีแกนสมมาตร 2 แกน 3.5) มีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน 3.6) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก 3.7) มุมตรงข้ามมีขนาด เท่ากัน	แค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียก ปูนนักเรียนระบุว่ามุมตรงข้าม มีขนาดเท่ากัน 2 คู่ และมุม ตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน จึง สรุปได้ว่าอยู่ในระดับที่ 2

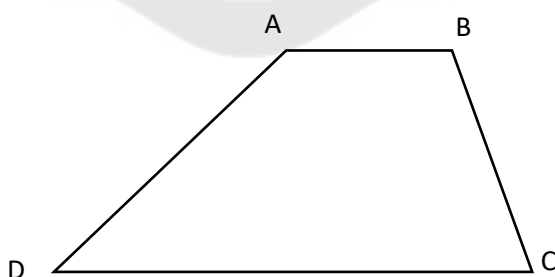
ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไป			
1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า			
			
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า		รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว	
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มุม 3 มุม 1.2) ด้าน 3 ด้าน 1.3) มุมภายใน 180 องศา	พบว่า นักเรียนจำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) มีด้าน 3 ด้านยาวเท่ากัน	สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจาก สมบัติของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป การพับรูปเพื่อพิจารณาแกน

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		2.2) มีมุมเท่ากัน 3 มุม 2.3) มีแกนสมมาตร 3 แกน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) มีมุมเท่ากัน 2 มุม 3.2) มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน 3.3) มีแกนสมมาตร 1 แกน	สมมาตร จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 2

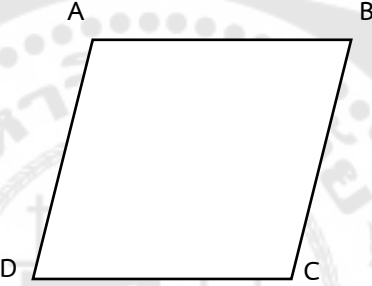
P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูป
สี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวม มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม คางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	โดยการลากเส้นตรงผ่าน ด้านคู่ขนานของรูป	ผลรวมมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	สี่เหลี่ยมคางหมู และ ลากเส้นตั้งฉาก 2 เส้น แล้ว ใช้ทฤษฎีบทมุมตรงและ ทฤษฎีบทของมุมแย้งมาใช้ในการ พิสูจน์ว่าผลรวมมุม ภายในของรูปสี่เหลี่ยมคาง หมูมีขนาด 360 องศา	360 องศา โดยใช้การพิสูจน์ อย่างมีแบบแผน ประกอบด้วย การลากเส้น ตรงผ่านด้านคู่ขนานของรูป สี่เหลี่ยมคางหมู และลากเส้น ตั้งฉาก 2 เส้น แล้วใช้ทฤษฎี บทมุมตรงและทฤษฎีบทของ มุมแย้งมาใช้ในการให้เหตุผล ว่าผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ ในระดับที่ 4

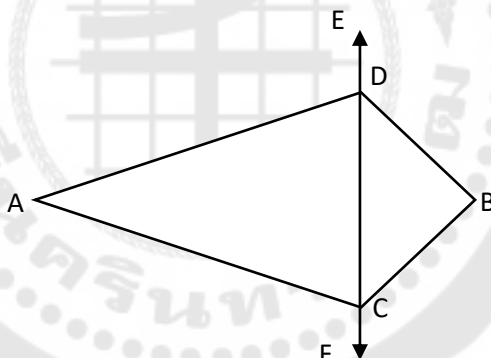
ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน			
			
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เพื่อ	โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เพื่อแสดง
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน	แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม แล้วจะได้ว่าเส้นทแยงมุมมีขนาดยาวเท่ากัน	ว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม โดยนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมแย้งมาใช้ในการให้เหตุผล

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ประกอบ แล้วจะได้ว่าเส้น ทแยงมุมมีขนาดยาวเท่ากัน จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 4

P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การพิสูจน์โดย กำหนดให้ โดยการ ลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปแล้วใช้สิ่งที่กำหนดให้ ในการแสดงว่ารูป สามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การ พิสูจน์อย่างมีแบบแผน โดย การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปแล้วใช้สิ่งที่กำหนดให้ ใน การแสดงว่ารูป
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน		

ตาราง 22 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	มุม - ด้าน - มุม แล้วพิสูจน์ ว่า $B\hat{C}D = B\hat{D}C$ โดยใช้ สิ่งที่กำหนดให้ มุมคู่ที่สม นัยกันและด้านร่วม แล้ว พิสูจน์ว่า $A\hat{D}E = A\hat{C}E$ โดยใช้ สมบัติของมุมตรง	สามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม แล้วพิสูจน์ว่า $B\hat{C}D = B\hat{D}C$ โดยใช้สิ่งที่ กำหนดให้ มุมคู่ที่สมนัยกัน และด้านร่วม ในการแสดงว่า รูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่า $A\hat{C}D = A\hat{D}C$ แล้วพิสูจน์ว่า $A\hat{D}E = A\hat{C}E$ โดยใช้สมบัติ ของมุมตรง ยังขาดความ สมเหตุสมผลเนื่องจาก นักเรียนลากเส้นทแยงมุมเพื่อ แบ่งครึ่งมุม มุมที่ได้อาจจะ ไม่ได้ถูกแบ่งครึ่ง จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

จากตาราง 22 พบว่าอิงค์มีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตระหนักรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น และการกำหนดบทนิยามอยู่ในระดับที่ 2 และระดับที่ 4 ขั้นต้น ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 2 และด้านการพิสูจน์อยู่ในระดับที่ 4

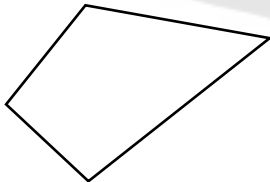
จากตาราง 20 – 22 พบว่านักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตระหนักรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 4 และการกำหนดบทนิยามมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 ด้านการจัดหมวดหมู่มีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 และด้านการพิสูจน์มีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 4



3. การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มต่ำ

การนำเสนอผลการวิจัยในส่วนนี้ จะเป็นการนำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับผลของการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ทั้ง 4 ด้าน ประกอบด้วย ด้านการตระหนักรูปร่าง จำนวน 3 ข้อ ด้านบทนิยาม จำนวน 6 ข้อ แบ่งออกเป็น การใช้บทนิยาม จำนวน 3 ข้อและการกำหนดบทนิยาม จำนวน 3 ข้อ ด้านการจัดหมวดหมู่ จำนวน 3 ข้อ และด้านการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อ และผลของการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task base interview) ของนักเรียนเป้าหมายที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำทั้ง 3 คน ประกอบด้วย กัปตัน เกรซและต้นข้าว มีรายละเอียดดังตารางต่อไปนี้

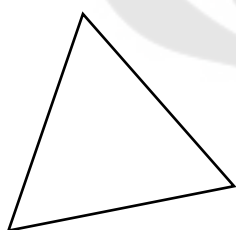
ตาราง 23 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของกัปตัน

ด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	ระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
  			
หมายเลข 1 หมายเลข 2 หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณาจากลักษณะภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะว่ามีทั้ง 4 ด้านและมุมทั้ง 4 มุม หมายเลข 2 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะมีด้านทั้ง 4	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่านักเรียนพิจารณาจากลักษณะภายนอกโดยการมองภาพ ทำให้ทราบว่า

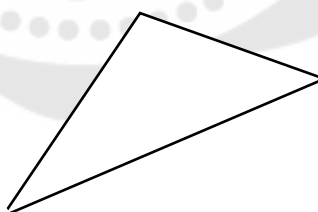
ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	ก็จริง แต่ส่วนมุมเป็นส่วน โค้งมน เลยไม่คิดว่าเป็น สี่เหลี่ยม หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีด้านทั้ง 4 จริงแต่ส่วนหัวมุม ไม่ได้ เชื่อมกันอยู่เลยดูเหมือน เพียงเส้นตรง 4 เส้น นำมา ประกอบไว้ตามแบบรูป สี่เหลี่ยม	หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม แต่หมายเลข 2 และ หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 1 และมี แนวโน้มจะอยู่ในระดับที่ 2

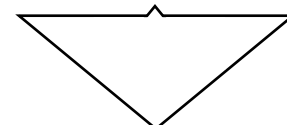
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมีด้าน 3 ด้าน มีมุม 3 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่านักเรียนพิจารณาจาก ลักษณะภายนอกโดยการ มองภาพ ทำให้ทราบว่า หมายเลข 1 เป็นรูป
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะรูป สามเหลี่ยมที่ให้มา มี 1 มุม	

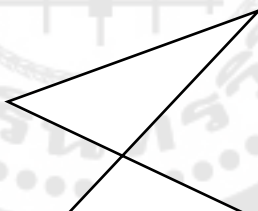
ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		ที่เป็นปลายเปิด รูป สามเหลี่ยมไม่เป็นรูปปิด หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะถ้านับ จริง ๆ แล้วมี 6 ด้าน 6 มุม เลยจึงไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม	สามเหลี่ยม แต่หมายเลข 2 และหมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 1 แต่มี แนวโน้มจะอยู่ในระดับที่ 2

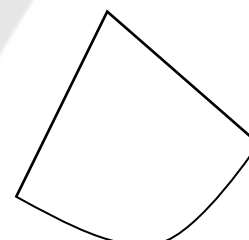
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เนื่องจากมีด้าน ทั้ง 4 และ 4 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก ลักษณะภายนอกแล้วใช้การ นับจำนวนด้านและจำนวน มุม ทำให้ทราบว่าหมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม หมายเลข 2 เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปและ หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งคู่
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะถ้ามอง เป็นรูปเล็ก ๆ 2 รูปจะเห็น เป็น 3 เหลี่ยมที่มี 3 ด้าน และ 3 มุม	

ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		เนื่องจากมีเพียง 2 ด้าน และยังมีส่วนโค้งเลยไม่ นับว่าเป็น	สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 1 แต่มีแนวโน้มจะอยู่ ในระดับที่ 2

U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



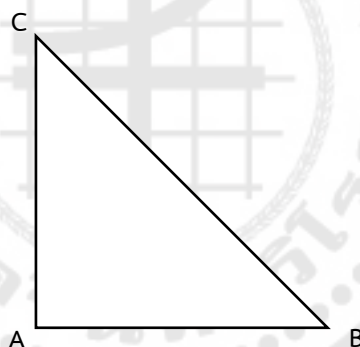
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน เพราะลากเส้น ทแยงมุมแบ่งครึ่งรูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนลากเส้นทแยง มุมแบ่งครึ่งรูปสี่เหลี่ยม
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	จะเห็นว่าสามารถใช้ความ เท่ากันทุกประการแบบ	ออกเป็น 2 รูป ก็เห็นว่า สามารถใช้ความเท่ากันทุก
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	ด้าน - ด้าน - ด้าน และมัน จะขนานกัน	ประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วด้าน ตรงข้ามจะขนานกันเนื่องจาก รูปที่แบ่งสามารถพลิกออกมา

ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ได้จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 3

U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



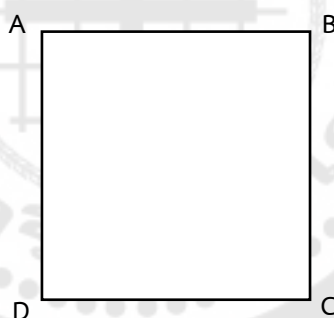
UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมฉากหน้าจั่ว เนื่องจาก มุมรวมของรูปสามเหลี่ยม คือ 180 องศา มีมุม 45 องศาแล้ว 2 มุม อีกมุมจึง เป็น 90 องศาซึ่งเป็นมุม ฉาก	คำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หน้าจั่ว โดยแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุมโดยพิจารณาจาก ผลรวมมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมและมุมที่โจทย์ กำหนดให้ แต่ไม่สามารถ พิสูจน์ได้ว่ามีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน แต่จำได้เพียงแค่
UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน		
UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้		

ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			มุมที่ฐานเท่ากันแล้ว จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 3

U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ

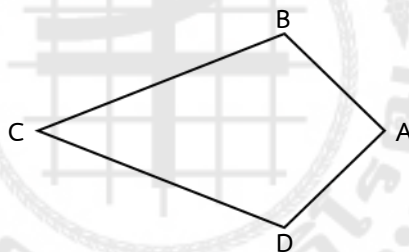


U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ ยังไม่สามารถ สรุปได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส เพราะมุมทุกมุม เท่ากัน และมุมรวมของรูป สี่เหลี่ยมคือ 360 องศา แต่	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนนำเสนอสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมมาใช้ในการแสดง ว่าผลรวมมุมภายในเป็น 360 องศา และมุมแต่ละมุมมี ขนาดเท่ากันตามที่โจทย์ กำหนด จึงสรุปได้ว่ามุมแต่ละ มุมมีขนาด 90 องศา
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	ละมุมเป็น 90 องศา แล้ว ด้านทุกด้านยังไม่ทราบว่ เท่ากันหมดหรือไม่	
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้		

ตาราง 23 (ต่อ)

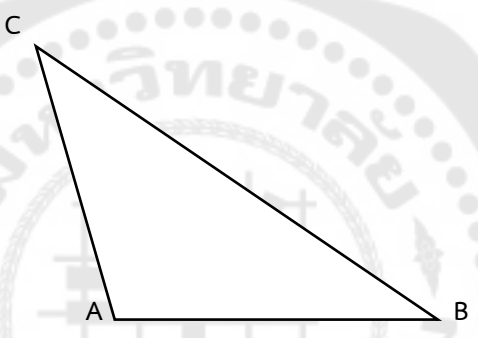
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		จึ้งยังไม่สามารถสรุปได้ว่า เป็นหรือไม่เป็น	แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่า ด้านแต่ละด้านมีความยาว เท่ากัน ทราบเพียงขนานกัน จากสิ่งที่โจทย์กำหนด จึงสรุป ได้นักเรียนอยู่ในระดับที่ 3

F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

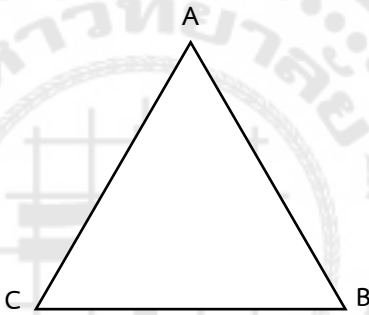


F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) ด้าน 2 คู่ยาวเท่ากัน 2) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็น มุมฉาก	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว โดยการ ลากเส้นทแยงมุมแล้วพบว่า เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุม ฉาก และจำจากสิ่งที่เคยเรียน มาว่าด้านติดกันยาวเท่ากัน 2 คู่ จึงสรุปได้นักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและเพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบทนิยาม ได้		

ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว			
			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มี 1 มุมป้าน 2) ด้าน 2 ด้านเท่ากัน 3) มุมที่ฐานเท่ากัน 2 มุม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากสิ่งที่เคย เรียนมาจึงได้ว่า มีมุมป้าน 1 มุม มีด้าน 2 ด้านยาวเท่ากัน และมีมุมที่ฐานเท่ากัน 2 มุม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ 			
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่า $\hat{A}BC = \hat{B}CA = \hat{C}AB$ โดยพิจารณาจากผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมคือ 180 องศา แล้วถ้าด้านทุกด้านยาวเท่ากัน มุมทุกมุมจะเท่ากันด้วย	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิจารณาจากสิ่งที่เคยเรียนรู้มาก่อนเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าว่า ถ้ามีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน มุมจะมีขนาดเท่ากัน 3 มุม จึงสรุปได้ว่านักเรียนไม่เกิดระดับ
	FL2: ระบุสมบัติทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและเพียงพอ		

ตาราง 23 (ต่อ)

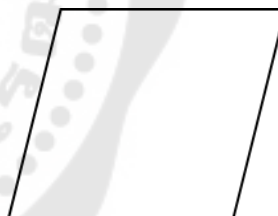
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

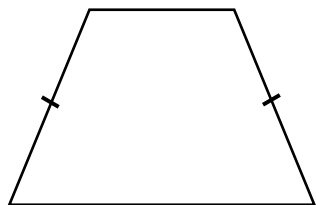
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) ด้านตรงข้ามเท่ากัน 1.2) มุมตรงข้ามเท่ากัน 1.3) ความยาวด้านยาว เท่ากัน 4 ด้าน	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	พิจารณาจากทฤษฎีที่เคยจำ มาเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จึงทำให้ทราบว่ามุมตรงข้ามมี

ตาราง 23 (ต่อ)

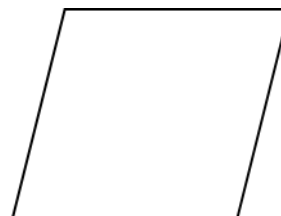
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		2.1) ด้านทุกด้านยาว เท่ากัน 2.2) มุมฉากเหมือนกัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) ไม่มีฉาก	ขนาด 90 องศาเพราะแต่ละ มุมมีขนาด 90 องศา แล้วใช้ ไม้บรรทัดในการวัดความยาว ด้านแต่ละด้านของรูป สี่เหลี่ยมทั้ง 2 รูป ทำให้ทราบ ว่าแต่ละด้านยาวเท่ากัน และ พิจารณาจากลักษณะของรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มี ความเียง ทำให้ทราบว่ารูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนไม่มีมุม ฉาก จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ในระดับที่ 2

C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

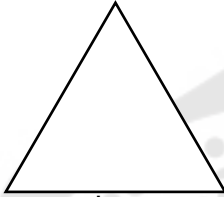
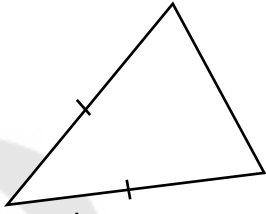
ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) เป็นรูปสี่เหลี่ยม 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2.1) มีด้านคู่หนึ่งขนาน กัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก	สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากลักษณะ ภายนอกของรูป ทฤษฎีบทที่ เคยจำมาและการขีดเส้นเพื่อ วัดว่าเป็นมุมฉากหรือไม่ จึง สรุปได้ว่าอยู่ในระดับที่ 2

C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไป

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

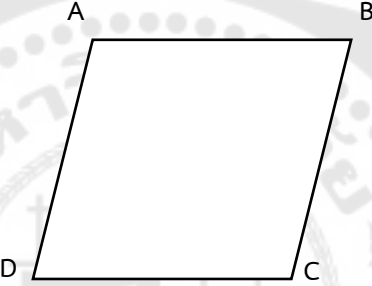
ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			
		รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูป สามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจาก ทฤษฎีที่ เคยเรียนมาเกี่ยวกับรูป สามเหลี่ยมด้านเท่า และ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่วและ สัญลักษณ์ขีดที่โจทย์ กำหนดให้ จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) เป็นรูปสามเหลี่ยม เหมือนกัน 1.2) มุมที่ฐานเท่ากัน	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.3) มุมแหลม 3 มุม 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) มุมทุกมุมขนาด 60 องศา 2.2) ด้านทุกด้านยาว เท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) มีด้าน 2 ด้าน ยาว เท่ากัน	

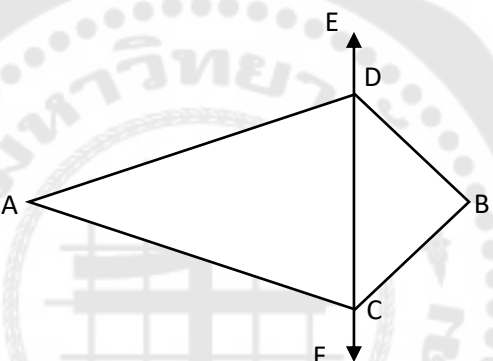
ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา			
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วจึงใช้ผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเป็น 180 องศา เพื่อแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม	
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน	ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วจึงใช้ผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเป็น 180 องศา เพื่อแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	

ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน			
			
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน	รูปแล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน	ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปแล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน	ทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แต่ไม่สามารถนำไปสู่การพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกัน	ด้าน - ด้าน - ด้าน แต่ไม่สามารถนำไปสู่การพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกัน จึงสรุปได้ว่านักเรียนไม่เกิดระดับ

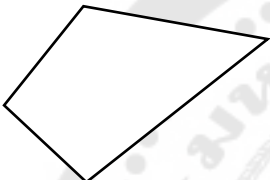
ตาราง 23 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ 			
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนใช้การต่อเส้นเพื่อหามุมแย้งและเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่ไม่สามารถนำไปสู่การพิสูจน์ได้ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนใช้การต่อเส้นเพื่อหามุมแย้งและเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่ไม่สามารถนำไปสู่การพิสูจน์ได้ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ จึงสรุปได้ว่านักเรียนไม่เกิดระดับ
	PL3: พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน		
	PL4: พิสูจน์อย่างมีแบบแผน		

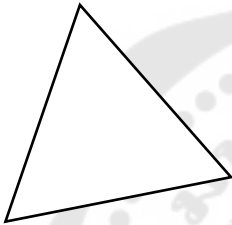
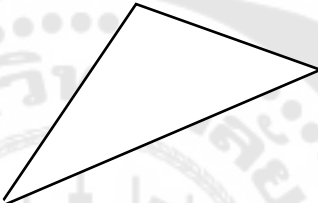
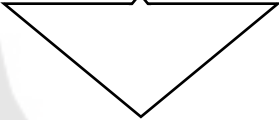
จากตาราง 23 พบว่ากัปตันมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตระหนักรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามอยู่ในระดับที่ 3 และการกำหนดบทนิยามอยู่ในระดับที่ 2 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 2 และด้านการพิสูจน์มีแนวโน้มที่จะอยู่ในระดับที่ 3



ตาราง 24 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของเกรซ

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เนื่องจาก ประกอบด้วยเส้นตรง 4 เส้นประกอบกัน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่านักเรียนพิจารณาจาก สิ่งที่เคยเรียนมา คือ เส้น 4 เส้น มาประกอบกัน ทำให้ ทราบว่าหมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม แต่หมายเลข 2 และ
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เนื่องจากเป็นเส้น โค้ง หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม เนื่องจากเส้นตรง ไม่ประกอบกัน	หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สี่เหลี่ยม แต่นักเรียนมีความ เข้าใจผิดเกี่ยวกับประเภทของ เส้นที่ประกอบกัน จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2 ขั้นต้น

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี เส้นตรง 3 เส้นประกบกัน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่านักเรียนพิจารณาจาก สิ่งที่เคยเรียนมา คือ เส้น 3 เส้น มาประกบกัน ไม่ใช่เส้น โค้ง ทำให้ทราบว่า หมายเลข 1 เป็นเส้นตรงที่ประกบกัน เป็นสามเหลี่ยม หมายเลข 2 เส้นไม่ประกบกันเป็น สามเหลี่ยม และหมายเลข 3 เป็นเส้นตรงมากกว่า 3 เส้นตรง แต่นักเรียนมีความ เข้าใจผิดเกี่ยวกับประเภทของ เส้นที่ประกบกัน จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2 ขั้นต้น
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะเส้นตรง 3 เส้นไม่ประกบกัน หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะมี เส้นตรงมากกว่า 3 เส้นประกบกัน	

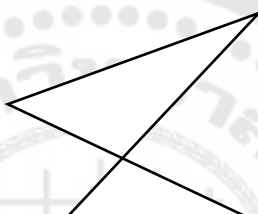
ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

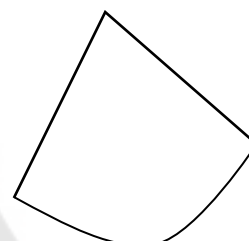
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

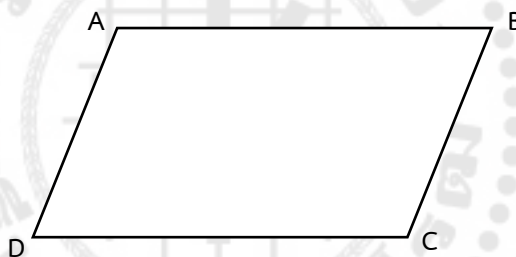
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะเส้นตรง 4 เส้นประกบกัน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก สิ่งที่เคยเรียนมา คือ เส้น 3 เส้น มาประกบกัน ไม่ใช่เส้น โค้ง จะเป็นรูปสามเหลี่ยม ถ้า เส้น 4 เส้น มาประกบกัน จะ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ทำให้ทราบ ว่า หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป และ หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม จึงได้ แต่นักเรียนมีความ เข้าใจผิดเกี่ยวกับประเภทของ เส้นที่ประกบกัน
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป เพราะ เส้นตรง 3 เส้นประกบกัน 2 รูป หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยม เพราะเป็นเส้น โค้ง	

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2 ขั้นต้น

U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



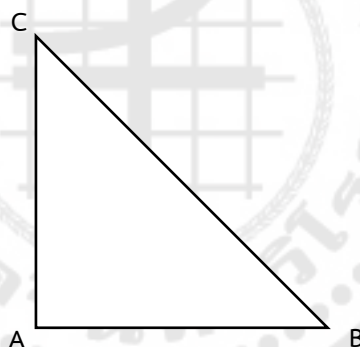
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน เพราะลากเส้น ทแยงมุมแบ่งครึ่งรูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนลากเส้นทแยง มุมแบ่งครึ่งรูปสี่เหลี่ยม
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	สี่เหลี่ยมออกเป็น 2 รูปแล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการ	ออกเป็น 2 รูปแล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากัน
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	แบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง มุมแย้งมาแสดงว่าด้านตรง ข้ามขนานกัน จากมุมคู่ที่ สมนัยกันที่มีขนาดเท่ากัน	ทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วนำทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้องกับมุมแย้งมาแสดงว่า ด้านตรงข้ามขนานกัน จาก มุมคู่ที่สมนัยกันที่มีขนาด

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			เท่ากัน จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 4

U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ

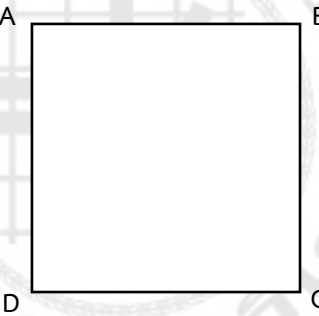


UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม มุมฉากหน้าจั่ว โดย นักเรียนลากเส้นแบ่งครึ่ง	คำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หน้าจั่ว โดยนักเรียนลากเส้น แบ่งครึ่งด้านของรูป
UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	ด้านของรูปสามเหลี่ยม ทำ ให้เกิดรูปสามเหลี่ยม 2 รูป	สามเหลี่ยม ทำให้เกิดรูป สามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดง
UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูปนั้นเท่ากันทุก ประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ทำให้ ทราบว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมี	ว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปนั้น เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ทำให้ทราบ

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		ขนาดเท่ากัน จึงได้ว่ารูป สามเหลี่ยมนี้มีด้านยาว เท่ากัน 2 ด้าน แล้วใช้ ทฤษฎีมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมเพื่อแสดงว่ามี มุมฉาก 1 มุม	ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาด เท่ากัน จึงได้ว่ารูปสามเหลี่ยม นี้มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน แล้วใช้ทฤษฎีมุมภายในของ รูปสามเหลี่ยมเพื่อแสดงว่ามี มุมฉาก 1 มุม แต่การลากเส้น เพื่อแบ่งครึ่งด้านในการแสดง ความเท่ากันทุกประการแล้ว สรุปว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป นั้นเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ยังเป็น ข้อสรุปที่ไม่ถูกต้อง จึงสรุปได้ ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

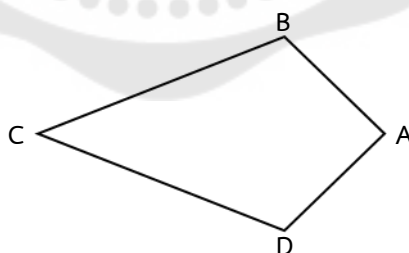
ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ 			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูป	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนลากเส้นทแยง
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	สี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว	มุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้	แสดงความเท่ากันทุกประการแบบมุม - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วแสดงว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากโดยใช้ผลรวมมุม	แล้วแสดงความเท่ากันทุกประการแบบมุม - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วแสดงว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากโดยใช้ผลรวมมุม

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		ผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยม และสิ่งที่โจทย์ กำหนดให้ จึงสรุปได้ว่า เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	ภายในของรูปสี่เหลี่ยม และ สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จึงสรุป ได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่นักเรียนไม่ได้แสดงว่าด้าน ทุกด้านมีความยาวเท่ากัน โดยพิสูจน์เพียงแค่ว่าด้านตรง ข้ามมีความยาวเท่ากัน เท่านั้น ทำให้การลงข้อสรุปมี ความผิดพลาด จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

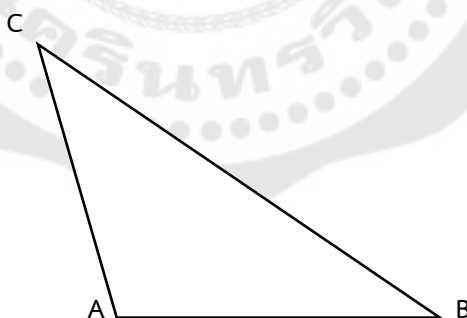


F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มีด้านประชิดกัน ยาว เท่ากัน 2 คู่ 2) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็น มุมฉาก	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว โดยการ ลากเส้นทแยงมุมแล้วพบว่า
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	3) มุมตรงข้ามแนทแยงมี ขนาดเท่ากัน	เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุม ฉาก และพิจารณาร่วมกับบท นิยาม จึงสรุปได้ว่านักเรียน อยู่ในระดับที่ 2
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูป
สามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว



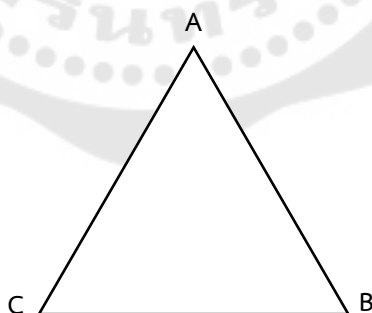
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) มุมที่ฐานมีขนาดน้อย กว่า 45 องศา 2) มุมยอดมีขนาด มากกว่า 90 องศา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากสิ่งที่เคย เรียนมาจึงได้ว่า มุมป้านต้อง
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	3) มีด้าน 2 ด้านยาว เท่ากัน	

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		มีขนาดมากกว่า 90 องศา และมุมที่เหลือของฐาน จะต้องเท่ากันและน้อยกว่า 45 องศา จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



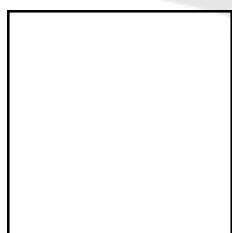
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่า $\hat{A}BC = \hat{B}CA = \hat{C}AB$ โดยพิจารณาจากการตีเส้น ขนาน แล้วใช้ทฤษฎีบท ของมุมแย้งใน	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนโดยพิจารณา จากการตีเส้นขนาน แล้วใช้ ทฤษฎีบทของมุมแย้งในการ
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		

ตาราง 24 (ต่อ)

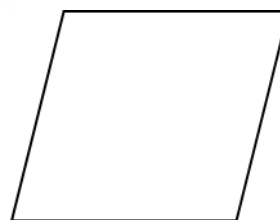
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	การหามุมที่มีขนาดเท่ากัน แล้วพิจารณาร่วมกับ ทฤษฎีบทของรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่วในการ แสดงว่ามุมแต่ละมุมมี	หามุมที่มีขนาดเท่ากัน แล้ว พิจารณาร่วมกับทฤษฎีบท ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ กล่าวว่า ถ้าจุดไหนเป็นจุด ยอดมุมที่ฐานจะมีขนาด
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	ขนาดเท่ากัน	เท่ากัน จะได้ว่ามุมแต่ละมุมมี ขนาดเท่ากัน จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

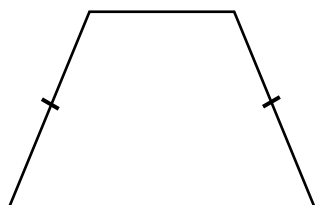
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) ด้านทุกด้านยาว เท่ากัน	

ตาราง 24 (ต่อ)

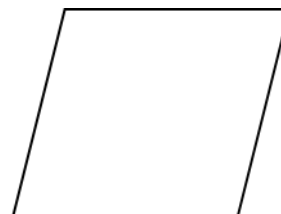
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.2) ด้านตรงข้ามขนาน กัน 1.3) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุมทุกมุมเป็นมุม ฉาก 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มุมทุกมุมไม่เป็นมุม ฉาก	สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากลักษณะ ภายนอกและพิจารณา ร่วมกับบทนิยามของรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จึงสรุป ได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2

C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากลักษณะ ภายนอกและการลากเส้นเพื่อ พิจารณาเส้นทแยงมุม จึง สรุปได้ว่าอยู่ในระดับที่ 2
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มีด้านที่ขนานกัน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2.1) ด้านระหว่างด้าน คู่ขนานมีขนาดเท่ากัน 2.2) มีด้านคู่ขนาน 1 คู่ 2.3) เส้นทแยงมุมตัดกัน ไม่เป็นมุมฉาก 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) ด้านทุกด้านยาว เท่ากัน 3.2) ด้าน 2 ด้านขนาน กัน 2 คู่	

ตาราง 24 (ต่อ)

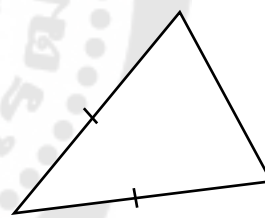
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
-------------------------------------	--	------------------	--------------

C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



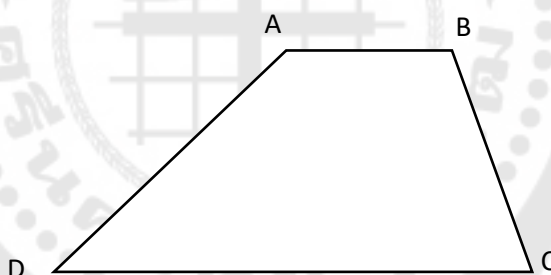
รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูป สามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจาก ลักษณะ ภายนอกและบทนิยามของรูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) มุมทุกมุมในรูป สามเหลี่ยมน้อยกว่า 90 องศา	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) ด้านทุกด้านยาว เท่ากัน 2.2) มุมเท่ากัน 3 มุม	

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม หน้าจั่ว 3.1) มีด้านเท่ากัน 2 ด้าน 3.2) มุม 2 มุมเท่ากัน	จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2

P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา

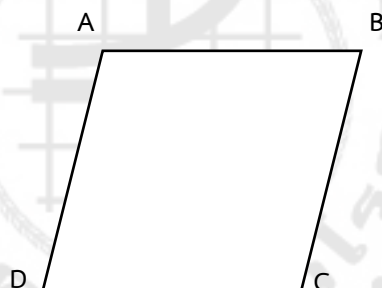


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวม มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม คางหมูมีขนาด 360 องศา	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่า ผลรวมมุมภายในของรูป สามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	โดยการสร้างเส้นขนานบน ด้านขนานของรูปสี่เหลี่ยม	360 องศา โดยการสร้างเส้น
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	คางหมูแล้วพิจารณา ร่วมกับทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้องกับมุมแย้งและ มุมตรงในการแสดงว่า ผลรวมมุมภายในของรูป	ขนานบนด้านขนานของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูแล้วพิจารณา ร่วมกับทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง กับมุมแย้งและมุมตรงในการ

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		สี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา	แสดงว่าผลรวมมุมภายใน ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมี ขนาด 360 องศา จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูป
สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

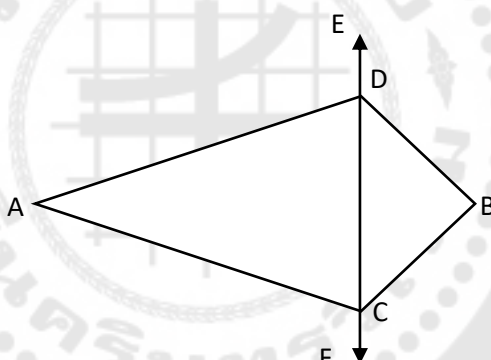


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์โดยการ ลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์โดยการ
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	2 รูป เพื่อแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้งสองนั้น	ลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูป ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วจะ ได้ว่าเส้นทแยงมุมสามารถ แบ่งจนได้สามเหลี่ยมที่ เท่ากันได้	เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง สองนั้นเท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้ว จะได้ว่าเส้นทแยงมุมสามารถ แบ่งจนได้สามเหลี่ยมที่ เท่ากันได้ แต่นักเรียนไม่ได้

ตาราง 24 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมแบ่ง ครึ่งซึ่งกันและกัน จึงสรุปได้ ว่านักเรียนไม่เกิดระดับ

P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



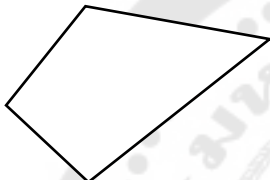
P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ โดยใช้สิ่งที่โจทย์ กำหนดให้แสดงว่ารูป สามเหลี่ยม BCD เป็นรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่ว จึงได้ ว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน แล้วพิจารณาร่วมกับสิ่งที่ กำหนดให้และมุมตรงใน การแสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนใช้สิ่งที่โจทย์ กำหนดให้แสดงว่ารูป สามเหลี่ยม BCD เป็นรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่ว จึงได้ว่า มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน แล้ว พิจารณาร่วมกับสิ่งที่ กำหนดให้และมุมตรงในการ แสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน		
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน		

ตาราง 24 (ต่อ)

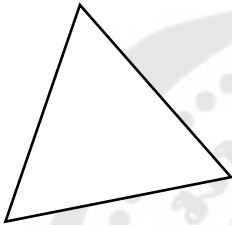
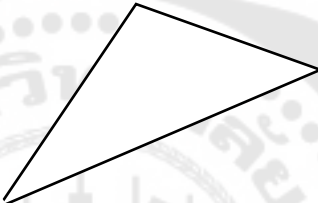
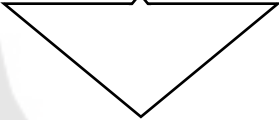
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 4

จากตาราง 24 พบว่าเกรซมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตระหนักรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ขั้นต้น ด้านบัพนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บัพนิยามอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น และการกำหนดบัพนิยามอยู่ในระดับที่ 2 และระดับที่ 4 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 2 และด้านการพิสูจน์มีแนวโน้มที่จะอยู่ในระดับที่ 4

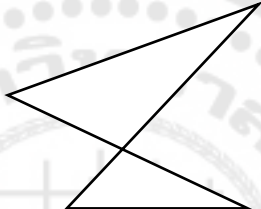
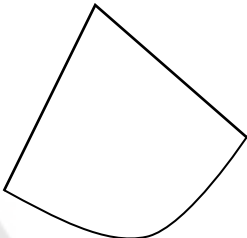
ตาราง 25 ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของต้นข้าว

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R1: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	รูปสี่เหลี่ยมคือรูปทรงปิดที่เกิดจากการเชื่อมจุด 4 จุดเข้าด้วยกัน มีด้าน 4 ด้าน, 4 มุม, 4 จุดยอด	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่านักเรียนพิจารณาจากบทรนิยามของรูปสี่เหลี่ยม คือรูปที่มีจุด 4 จุดติดกัน โดยมี 4 ด้าน มุม 4 มุมปิดกัน ทำให้ทราบว่าหมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม แต่หมายเลข 2 และ 3 ไม่ได้เป็นรูปสี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม ตรงตามที่กล่าวมา หมายเลข 2 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะจุดยอดกันไม่ได้เชื่อมกันด้วยเส้นตรง หมายเลข 3 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะเป็นรูปที่ไม่ได้ปิดกัน	

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R2: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	รูปสามเหลี่ยม คือ รูปปิดที่ เกิดจากการลากเส้นเชื่อม จุด 3 จุด	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่านักเรียนพิจารณาจาก บทนิยามของรูปสามเหลี่ยม ที่กล่าวว่า รูปสามเหลี่ยม คือ รูปปิดที่เกิดจากการลากเส้น เชื่อมจุด 3 จุด ทำให้ทราบว่า หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม แต่หมายเลข 2 และ 3 ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 1 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะตรง ตามทีกล่าวไป หมายเลข 2 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะไม่ได้ปิด รูปด้วยเส้นตรง หมายเลข 3 ไม่เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะไม่ได้ปิด รูปด้วยเส้นตรง	

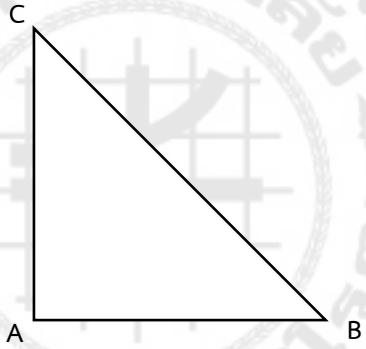
ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
R3: จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ			
 หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3			
R: Recognition	RL1: พิจารณา จากลักษณะ ภายนอก	หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม เพราะมีด้าน 4 ด้าน, 4 มุม, 4 จุดยอด	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก บทนิยามที่เคยเรียนของรูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ดังข้อที่ 1 และ 2 จึงทำให้ ทราบว่า หมายเลข 1 เป็นรูป สี่เหลี่ยม หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูป และ หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 2
	RL2: พิจารณา จากสมบัติทาง คณิตศาสตร์	หมายเลข 2 เป็นรูป สามเหลี่ยม เพราะเหมือน รูปสามเหลี่ยม 2 รูป ประกอบกัน หมายเลข 3 ไม่เป็นทั้งรูป สามเหลี่ยมและรูป สี่เหลี่ยม เพราะไม่ได้ปิด ด้วยเส้นตรง	

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U1: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ 			
U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน เพราะลากเส้น ทแยงมุมแบ่งครึ่งรูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนลากเส้นทแยง มุมแบ่งครึ่งรูปสี่เหลี่ยม
	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	สี่เหลี่ยมออกเป็น 2 รูปแล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง	ออกเป็น 2 รูปแล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากัน
	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	2 รูป เท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วนำคู่ที่สมนัยกันมา แสดงว่าด้านตรงข้ามขนาน กัน	ทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วนำมุม คู่ที่สมนัยกันมาแสดงว่าด้าน ตรงข้ามขนานกัน จึงสรุปได้ ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

ตาราง 25 (ต่อ)

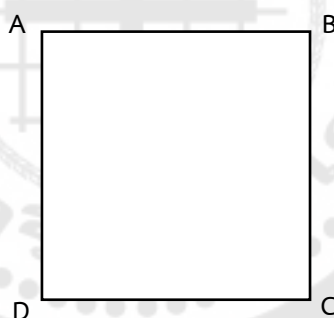
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
U2: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม			
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็น รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ			
			
UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	UL2: ใช้บทนิยาม ที่มีโครงสร้าง อย่างง่าย	$\triangle ABC$ ไม่สามารถยืนยัน ได้ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุม ฉากหน้าจั่ว เนื่องจาก	คำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle ABC$ ไม่สามารถยืนยันได้ว่าเป็นรูป
UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	UL3: ใช้บทนิยาม ที่มีความซับซ้อน	นักเรียนใช้ทฤษฎีบทที่ เกี่ยวกับผลรวมมุมภายใน	สามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว เนื่องจากนักเรียนใช้ทฤษฎี
UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	UL4: แสดง ความสัมพันธ์ของ บทนิยามที่ใช้	ของรูปสามเหลี่ยมและสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้ในการ แสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม	บทที่เกี่ยวกับผลรวมมุม ภายในของรูปสามเหลี่ยม และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ใน การแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่ามี ด้าน 2 ด้านยาวเท่ากัน

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ใน ระดับที่ 3

U3: บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ

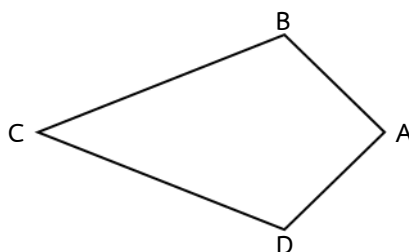


U: Use of definition	UL2: ใช้บทนิยามที่มีโครงสร้างอย่างง่าย	$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้ว	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงความเท่ากันทุกประการแบบ
	UL3: ใช้บทนิยามที่มีความซับซ้อน	มุม - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านที่สมนัยกันมีขนาด	มุม - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน
	UL4: แสดงความสัมพันธ์ของบทนิยามที่ใช้		

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		เท่ากัน แล้วแสดงว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากโดยใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จึงสรุปได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	แล้วแสดงว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากโดยใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จึงสรุปได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่นักเรียนไม่ได้แสดงว่าด้านทุกด้านมีความยาวเท่ากัน โดยพิสูจน์เพียงแค่ด้านตรงข้ามมีความยาวเท่ากันเท่านั้น ทำให้การลงข้อสรุปมีความผิดพลาด จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

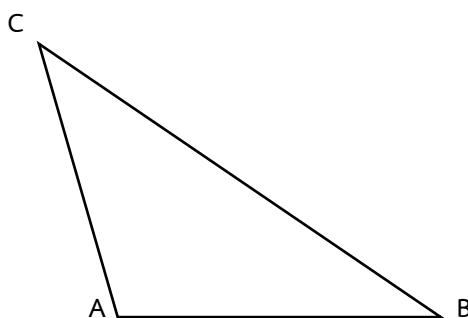
F1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) เส้นทแยงมุมตัดกันเป็น มุมฉาก	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว โดยการ ลากเส้นทแยงมุม จึงสรุปได้ ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	2) เส้นทแยงมุม BD ถูก แบ่งครึ่งด้วยเส้น AC	
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	3) ด้าน $AB = AD$, $BC = CD$	
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

F2: กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว

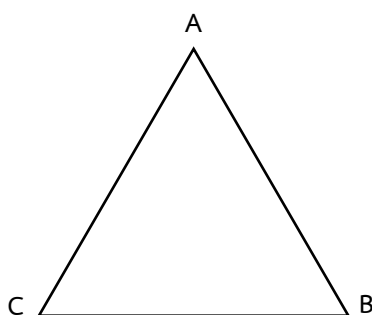


ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	1) ด้าน $AC = AB$ 2) $\hat{C} = \hat{B}$	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนระบุสมบัติของ รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากบทนิยาม ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 2
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์		
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ		
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้		

F3: บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

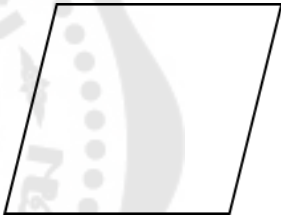
กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
F: Formulation of definition	FL1: ระบุสมบัติ ภายนอกที่ เกี่ยวข้อง	นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่า $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{C}\hat{A}\hat{B}$ โดยพิจารณาจากการ	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน
	FL2: ระบุสมบัติ ทางคณิตศาสตร์	ลากเส้นมัธยฐานมาแบ่ง ครึ่งด้านของรูปสามเหลี่ยม	พบว่า นักเรียนพิจารณาจาก การลากเส้นมัธยฐานมาแบ่ง
	FL3: จัดกลุ่มของ สมบัติทาง คณิตศาสตร์ที่ จำเป็นและ เพียงพอ	ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน ทำให้ทราบว่า	ครึ่งด้านของรูปสามเหลี่ยม ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ
	FL4: พิสูจน์ความ สมมูลของบท นิยามได้	มุมที่ฐานเท่ากันแล้วทำ แบบเดิมอีกครั้ง จึงทำให้ได้ ข้อสรุปว่า $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{C}\hat{A}\hat{B}$	ด้าน - ด้าน - ด้าน ทำให้ ทราบว่ามุมที่ฐานเท่ากันแล้ว ทำแบบเดิมอีกครั้ง จึงทำให้ ได้ข้อสรุปว่า $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{C}\hat{A}\hat{B}$ จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 4

ตาราง 25 (ต่อ)

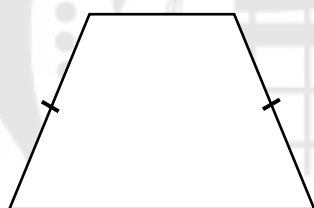
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
C1: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน			
C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากบทนิยาม จึง สรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับ ที่ 2
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) ด้านทุกด้านยาว เท่ากัน 1.2) ด้านตรงข้ามขนาน กัน	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	1.3) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉากและแบ่งครึ่ง กัน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2.1) มุมภายในทุกมุม 90 องศา	

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) มุมตรงข้ามเท่ากัน	

C2: กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูและรูป สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดย พิจารณาจากลักษณะ ภายนอกและสมบัติภายใน เช่น การตัดกันเป็นมุมฉาก ของเส้นทแยงมุม เป็นต้น
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) ผลรวมมุมภายใน เท่ากัน 2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2.1) มีด้านคู่ขนาน 2 ด้าน 2.2) เส้นทแยงมุมตัดกัน ไม่เป็นมุมฉาก	

ตาราง 25 (ต่อ)

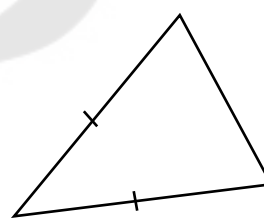
ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
		3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ใน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3.1) เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก	จึงสรุปได้ว่าอยู่ในระดับที่ 2 ขั้นต้น

C3: กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไป

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



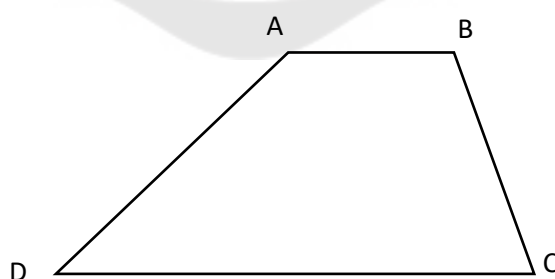
รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

C: Classification	CL1: จำแนกโดย ลักษณะภายนอก	1. สมบัติทั้งหมดที่ เหมือนกันของทั้ง 2 รูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนจำแนกความ เหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูป สามเหลี่ยมด้านเท่าและรูป
	CL2: จำแนกโดย สมบัติเฉพาะทาง คณิตศาสตร์	1.1) ผลรวมมุมภายใน เท่ากัน คือ 180 องศา	

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	CL3: อธิบาย ความสัมพันธ์ ระหว่างกลุ่ม	2. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2.1) ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน 2.2) มุมทุกมุมเท่ากัน 3. สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว 3.1) มุมที่ฐานเท่ากัน 3.2) ด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน	สามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจาก ลักษณะภายนอกและสมบัติภายในของรูปสามเหลี่ยม จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 2 ขั้นต้น

P1: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา

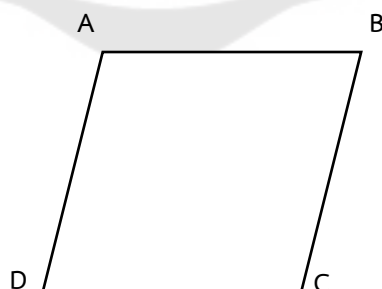


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดยการยกตัวอย่างประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยการลากเส้นทแยงมุม	จากการสัมภาษณ์และการเขียนคำตอบของนักเรียนพบว่า นักเรียนพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูป
----------	------------------------------------	---	--

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	เพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาว่ามุม ภายในรูปสามเหลี่ยมแต่ ละมุมมีขนาด 180 องศา ทำให้ทราบว่าผลรวมมุม ภายในของรูปสี่เหลี่ยมคาง หมูมีขนาด 360 องศา	สามเหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยการลากเส้น ทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยม ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาว่ามุมภายในรูป สามเหลี่ยมแต่ละมุมมีขนาด 180 องศา ทำให้ทราบว่า ผลรวมมุมภายในของรูป สี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ ในระดับที่ 3

P2: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูป
สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

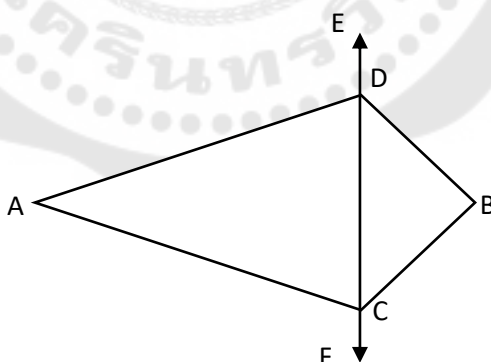


P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์โดยการ ลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่ง รูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วแสดงว่ารูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนพิสูจน์โดยการ ลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูป
----------	--	--	---

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	สามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุก ประการแบบ	ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	มุม - ด้าน - มุม จึงได้ว่า เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกัน และกัน	มุม - ด้าน - มุม โดยใช้สมบัติ ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จึงได้ว่าเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่ง ซึ่งกันและกัน จึงสรุปได้ว่า นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4

P3: กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



P: Proof	PL2: พิสูจน์โดย การยกตัวอย่าง ประกอบ	นักเรียนพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ โดยการลากเส้นแบ่งครึ่ง มุมเพื่อแสดงว่ารูป	จากการสัมภาษณ์และการ เขียนคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนลากเส้นแบ่ง ครึ่งมุมเพื่อแสดงว่ารูป สามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุก ประการแบบ
	PL3: พิสูจน์อย่าง ไม่เป็นแบบแผน	สามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุก ประการแบบ	

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
	PL4: พิสูจน์อย่าง มีแบบแผน	ด้าน - มุม - ด้าน แล้วทำ ให้ทราบว่ามุมคู่ที่สมนัยกัน มีขนาดเท่ากัน แล้ว ลากเส้นต่อจากรูปเดิมเพื่อ แบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูปแล้วแสดงว่ารูป สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน ทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จึงทำให้ ทราบว่ามุมคู่ที่สมนัยกันมี ขนาดเท่ากันแล้วใช้สมบัติ ของมุมตรงในการแสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$	ด้าน - มุม - ด้าน แล้วทำให้ ทราบว่ามุมคู่ที่สมนัยกันมี ขนาดเท่ากัน แล้วลากเส้นต่อ จากรูปเดิมเพื่อแบ่งรูป สามเหลี่ยมออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จึงทำให้ ทราบว่ามุมคู่ที่สมนัยกันมี ขนาดเท่ากันแล้วใช้สมบัติ ของมุมตรงในการแสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ แต่การต่อเส้น เพื่อพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยม อีก 2 รูปเท่ากันทุกประการ ยังขาดความสมเหตุสมผล เนื่องจากการต่อเส้น เส้นที่ต่อ อาจจะไม่ได้ติดกันเป็นเส้นตรง เดียวกัน แต่การจะแสดงว่า $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$ สามารถใช้สิ่ง ที่โจทย์กำหนดให้ร่วมกับมุมคู่ ที่สมนัยที่ได้จากการพิสูจน์ใน ตอนแรก จึงสรุป

ตาราง 25 (ต่อ)

ด้านการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิต	ระดับการให้ เหตุผลทาง เรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime	คำตอบของนักเรียน	การวิเคราะห์
			ได้ว่าเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น

จากตาราง 25 พบว่าต้นข้าวมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตระหนักรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามมีอยู่ในระดับที่ 3 และระดับที่ 4 ขั้นต้นและการกำหนดบทนิยามอยู่ในระดับที่ 2 และระดับที่ 4 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 2 ขั้นต้น และด้านการพิสูจน์มีแนวโน้มที่จะอยู่ในระดับที่ 4

จากตาราง 23 – 25 พบว่าพบว่านักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ในด้านการตระหนักรูปร่างอยู่ในระดับที่ 2 ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็นการใช้บทนิยามมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 4 และการกำหนดบทนิยามมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 ด้านการจัดหมวดหมู่อยู่ในระดับที่ 2 และด้านการพิสูจน์มีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 4

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยเรื่อง การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime มีความมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ของการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ การวิจัยครั้งนี้เริ่มจากการกำหนดกรอบแนวคิดในการวิจัย โดยการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องก่อนหน้า ผู้วิจัยใช้กรอบแนวคิดในการวิจัยมาเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยแบ่งออกเป็น 4 ด้าน ประกอบด้วย ด้านการตระหนักรูปร่าง ด้านบทนิยาม ด้านการจัดหมวดหมู่และด้านการพิสูจน์ ของนักเรียนเป้าหมายจำนวน 9 คน

นักเรียนเป้าหมายเป็นนักเรียนที่ผู้วิจัยได้คัดเลือกมาจากนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน คน ซึ่งผู้วิจัยได้พิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม มาจัดเรียงคะแนนจากน้อยไปหามากและแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ประกอบด้วยนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ โดยมีเกณฑ์ในการแบ่งนักเรียนดังนี้ นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่สูงกว่า 66 นักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่สูงกว่า 33 แต่ไม่เกิน 66 และนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำต้องอยู่ในกลุ่มที่มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ไม่เกิน 33 และให้นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 40 คน ทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แล้วหานักเรียนที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ กลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน ซึ่งการหานักเรียนตัวแทนของแต่ละกลุ่มดังกล่าวนี้จะพิจารณาจากผลการทำงานปฏิบัติ (Task) ของนักเรียนและข้อมูลของนักเรียนจากครูผู้สอน รวมทั้งความยินยอมของนักเรียน แล้วจึงนำนักเรียนทั้ง 9 คนที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มไปดำเนินการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานเป็นฐาน (Task – base interview) เพื่อนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์หาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime โดนมียุติวิเคราะห์ 3 คน ได้แก่ ผู้วิจัย และผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ จำนวน 2 คน ซึ่งผลการวิเคราะห์มีความเชื่อมั่นตามสูตรการคำนวณค่าความ

เชื่อกันของไมล์สและฮูเบอร์แมน คิดเป็นร้อยละ 97 แล้วนำผลที่ได้ไปใช้ในการสรุปผลการศึกษ การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ว่าเป็นอย่างไร โดยผลการวิจัยในครั้งนี้สามารถสรุป ประเด็นต่าง ๆ ตามความมุ่งหมายของการวิจัย ดังต่อไปนี้

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

ผลการวิจัยเรื่อง การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime ที่มีผลสัมฤทธิ์ของการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทาง เรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ในกลุ่มสูง กลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ โดยแบ่ง ออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ ด้านการตระหนักรูปร่าง ด้านบทนิยาม ด้านการจัดหมวดหมู่และด้านการ พิสูจน์ สรุปผลได้ดังนี้

ด้านการตระหนักรูปร่าง

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิด ของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 โดยพบว่านักเรียน พิจารณารูปร่างที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมจากบทนิยามหรือหลักการของรูปที่ เคยเรียนมา ซึ่งประกอบด้วยการพิจารณาจากจำนวนด้าน จำนวนมุม การเป็นรูปปิด ลักษณะของ เส้น โดยในข้อที่ 1 และข้อที่ 2 นักเรียนทุกคนจะได้คำตอบที่เหมือนกัน และเมื่อเจอรูปที่แตกต่าง ออกไปจากที่เคยเจอในบทเรียน นักเรียนยังคงใช้บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมใน การพิจารณา เช่น ข้อที่ 3 รูปหมายเลข 1 ทุกคนจะพิจารณาเหมือนกันว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะมี 4 ด้านและ 4 มุม ถึงแม้จะมีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน หมายเลข 2 มีนักเรียน 2 คนพิจารณาว่าเป็นรูป สามเหลี่ยม 2 รูปเนื่องจากมีจำนวน 6 ด้านและ 6 มุม มีจุดตัดเป็นจุดเชื่อมรูป แต่มีนักเรียน 1 คนที่ พิจารณาว่าไม่เป็นทั้งรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม เพราะมีจำนวนด้านและจำนวนมุมเกินกว่า จำนวนที่ใช้ในการตัดสิน และในหมายเลข 3 ทุกคนมองเหมือนกันว่าไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมและไม่ เป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะมี 1 เส้นที่ไม่ใช่ส่วนของเส้นตรง ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตใน ระดับที่ 1 เนื่องจากมีการพิจารณาจากลักษณะภายนอก

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตาม แนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 โดยพบว่า นักเรียนพิจารณารูปร่างที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมจากบทนิยามและสมบัติของ รูปที่เคยเรียนมา ซึ่งประกอบด้วยการพิจารณาจากจำนวนด้าน จำนวนมุม การเป็นรูปปิด ลักษณะ ของเส้นและผลรวมมุมภายในของรูป โดยในข้อที่ 1 และข้อที่ 2 นักเรียนทุกคนจะได้คำตอบที่

เหมือนกัน และเมื่อเจอรูปที่แตกต่างออกไปจากที่เคยเจอในบทเรียน นักเรียนยังคงใช้บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมในการพิจารณา เช่น ข้อที่ 3 รูปหมายเลข 1 ทุกคนจะพิจารณาเหมือนกันว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะมี 4 ด้านและ 4 มุม ถึงแม้จะมีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน หมายเลข 2 นักเรียนทั้ง 3 คนพิจารณาเหมือนกันว่าเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เนื่องจากการลากเส้นตรงจุดตัดทำให้เห็นว่าเกิดรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแต่ละรูปมีด้าน 3 ด้าน มุม 3 มุม และในหมายเลข 3 ทุกคนมองเหมือนกันว่าไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมและไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะมีด้าน 2 ด้าน มีมุม 1 มุม และมีเส้นหนึ่งเป็นลักษณะโค้ง ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 เนื่องจากการพิจารณาจากลักษณะภายนอก

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 โดยพบว่านักเรียนพิจารณาว่ารูปที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมจากบทนิยามหรือหลักการของรูปที่เคยเรียนมา ซึ่งประกอบด้วยการพิจารณาจากจำนวนด้าน จำนวนมุม การเป็นรูปปิด ลักษณะของเส้น โดยในข้อที่ 1 และข้อที่ 2 นักเรียนทุกคนจะได้คำตอบที่เหมือนกัน และเมื่อเจอรูปที่แตกต่างออกไปจากที่เคยเจอในบทเรียน นักเรียนยังคงใช้บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมในการพิจารณา เช่น ข้อที่ 3 รูปหมายเลข 1 ทุกคนจะพิจารณาเหมือนกันว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะมี 4 ด้านและ 4 มุม ถึงแม้จะมีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน หมายเลข 2 นักเรียนทั้ง 3 คนพิจารณาเหมือนกันว่าเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เนื่องจากการลากเส้นตรงจุดตัดทำให้เห็นว่าเกิดรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแต่ละรูปมีด้าน 3 ด้าน มุม 3 มุม และมีนักเรียน 1 คนที่ให้เหตุผลว่าเหมือนรูปสามเหลี่ยม 2 รูปประกอบกันแต่ไม่ได้ให้เหตุผลอื่น ๆ ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลในระดับที่ 1 และในหมายเลข 3 ทุกคนมองเหมือนกันว่าไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมและไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมเพราะมีด้าน 2 ด้าน ไม่ได้ปิดด้วยเส้นตรงและมีเส้นหนึ่งเป็นลักษณะโค้ง แต่มีนักเรียนบางคนยังมีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับประเภทของเส้นว่าเส้นตรงกับส่วนของเส้นตรงคือสิ่งเดียวกัน แล้วเรียกส่วนของเส้นตรงว่าเป็นเส้นตรง

ในด้านการตระหนักรูปร่างนักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำกลุ่มละ 3 คน รวมทั้งหมด 9 คน อยู่ในระดับที่ 2 ทุกคนและมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบพิจารณาว่ารูปที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือรูปสี่เหลี่ยมจากบทนิยามหรือหลักการของรูปที่เคยเรียนมา ซึ่งประกอบด้วยการพิจารณาจากจำนวนด้าน จำนวนมุม การเป็นรูปปิด และนักเรียนทั้ง 9 คนยังแสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 1 ด้วย คือ การพิจารณาจากลักษณะภายนอกของรูปที่เคยเห็นและลักษณะของเส้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998)

ที่กล่าวว่า นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 2 สามารถจดจำรูปร่างต่าง ๆ ได้โดยใช้และให้คำนิยามในการจำแนกรูป ซึ่งนักเรียนใช้สมบัติเป็นพื้นฐานของกิจกรรม

ด้านบทนิยาม

ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1) การใช้บทนิยาม

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 4 โดยพบว่านักเรียนพิจารณารูปที่กำหนดให้และนำสิ่งที่กำหนดให้ ทฤษฎีบท บทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ไปใช้ในการพิสูจน์เพื่อแสดงความสมเหตุสมผลระหว่างผลที่ได้จากการพิสูจน์และบทนิยามที่กำหนดให้ ดังนี้

ข้อที่ 1 เป็นการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ มีนักเรียน 2 คนใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งมาแสดงว่า มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน) แล้วจะเกิดด้านคู่ขนานขึ้น แต่มีนักเรียน 1 คนที่เข้าใจผิดเกี่ยวกับการให้เหตุผล โดยนักเรียนกำหนดว่าด้านตรงข้ามขนานกันแล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งในการแสดงว่ามุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน ข้อที่ 2 เป็นการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่ นักเรียนทั้ง 3 คนใช้วิธีการที่แตกต่างกันในการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน โดยนักเรียนคนที่ 1 ใช้วิธีการลากเส้นแบ่งครึ่งมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน นักเรียนคนที่ 2 ใช้วิธีการลากเส้นตั้งฉากแล้วแบ่งครึ่งด้านและแบ่งรูปออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แต่การลากเส้นไปตั้งฉากแล้วแบ่งครึ่งด้านยังขาดความสมเหตุสมผลในการกำหนด นักเรียนคนที่ 3 ใช้ทฤษฎีที่กล่าวว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปมีมุมเท่ากัน 2 มุมแล้ว ด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันย่อมเท่ากัน จึงได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน ในการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมฉาก 1 มุม ทุกคนใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม และข้อที่ 3 เป็นการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่ นักเรียนทั้ง 3 คนตอบเหมือนกันหมดว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้วิธีการที่เหมือนในการพิจารณาว่ามุมแต่ละมุมเป็นฉาก จากการนำผลรวมมุมภายในรูปสี่เหลี่ยมไปพิจารณาร่วมกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จะได้ว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก แต่การแสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันนักเรียนแต่ละคนแสดงวิธีการที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนคนที่ 1 และ 2 ใช้การ

ลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม แล้วจะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกัน (ด้านตรงข้ามกัน) จะยาวเท่ากัน แต่ไม่ได้แสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากัน จึงทำให้การสรุปว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมยังขาดความสมเหตุสมผล ส่วนนักเรียนคนที่ 3 ใช้วิธีการพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉากแล้วแสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันจากรูปสามเหลี่ยมทั้ง 4 รูปที่มีพื้นที่เท่ากัน แต่ยังขาดความสมเหตุสมผลในการสรุปว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันและรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 4 โดยพบว่านักเรียนพิจารณารูปที่กำหนดให้และนำสิ่งที่กำหนดให้ ทฤษฎีบท บทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ไปใช้ในการพิสูจน์เพื่อแสดงความสมเหตุสมผลระหว่างผลที่ได้จากการพิสูจน์และบทนิยามที่กำหนดให้ ดังนี้ ข้อที่ 1 เป็นการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ โดยนักเรียนทั้ง 3 คน ใช้วิธีการที่เหมือนกันคือการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งมาแสดงว่า มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน) แล้วจะเกิดด้านคู่ขนานขึ้น แต่มีนักเรียน 1 คนที่มีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการและรูปสามเหลี่ยมคล้ายคือแบบเดียวกัน แต่ในลักษณะของการพิสูจน์นักเรียนพิสูจน์ในลักษณะของความเท่ากันทุกประการ ข้อที่ 2 เป็นการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่ มีนักเรียนทั้ง 2 คน ที่ใช้วิธีการที่เหมือนกันในการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน คือการลากเส้นไปตั้งฉากเพื่อแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แต่นักเรียนอีกคนใช้วิธีการลากเส้นตั้งฉากแล้วแบ่งครึ่งด้านและแบ่งรูปออกเป็น 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปทั้ง 2 เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แต่การลากเส้นไปตั้งฉากแล้วแบ่งครึ่งด้านยังขาดความสมเหตุสมผลในการกำหนด ในการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมฉาก 1 มุม ทุกคนใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม และข้อที่ 3 เป็นการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่ มีนักเรียน 2 คน พิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้วิธีการที่แตกต่างดังนี้ นักเรียนคนที่ 1 ใช้การพิจารณาว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากจากการนำผลรวมมุมภายในรูปสี่เหลี่ยมไปพิจารณาร่วมกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วนำไปแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมที่

กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากการพิจารณาสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ มีด้านขนาน 2 คู่ และมีมุมภายในแต่ละมุมขนาด 90 องศา ให้สอดคล้องกับสิ่งที่ได้จากการพิสูจน์และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยไม่ได้แสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากัน ซึ่งยังขาดความสมเหตุสมผลเนื่องจากสมบัติที่นักเรียนใช้ในการพิจารณาสามารถสองเป็นรูปสี่เหลี่ยมอื่นได้ คือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า นักเรียนคนที่ 2 ใช้การลากเส้นทแยงมุม 2 เส้น แล้วแสดงว่ามุมแต่ละมุมมีขนาดเท่ากันมุมละ 45 องศา และรวมกันได้ 90 องศา จากการใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง แล้วในการพิสูจน์ว่าด้านแต่ละด้านยาวเท่ากัน นักเรียนแสดงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นทแยงมุมแบ่งรูป โดยรูปสามเหลี่ยมนี้เท่ากันทุกประการแบบมุม - ด้าน - มุม จะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (แต่ละด้านยาวเท่ากัน) แต่เนื่องจากการที่ได้ว่ามุมแต่ละมุมที่ถูกแบ่งด้วยเส้นทแยงมุมมีขนาดเท่ากันมุมละ 45 องศา ยังขาดความสมเหตุสมผลในการสรุป จึงทำให้การสรุปว่าแต่ละด้านยาวเท่ากันยังขาดความสมเหตุสมผล นักเรียนคนที่ 3 พิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพราะไม่สามารถสรุปได้ว่าทุกด้านยาวเท่ากัน เนื่องจากการพิสูจน์ของนักเรียน มีการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบมุม - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แต่ไม่สามารถเชื่อมโยงได้ว่าแต่ละด้านยาวเท่ากัน และพิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากจากการนำผลรวมมุมภายในรูปสี่เหลี่ยมไปพิจารณาร่วมกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 3 และ 4 แต่โดยภาพรวมแล้วมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 4 ซึ่งพบว่านักเรียนพิจารณารูปที่กำหนดให้และนำสิ่งที่กำหนดให้ ทฤษฎีบท บทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ไปใช้ในการพิสูจน์เพื่อแสดงความสมเหตุสมผลระหว่างผลที่ได้จากการพิสูจน์และบทนิยามที่กำหนดให้ ดังนี้ ข้อที่ 1 เป็นการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ มีนักเรียน 1 คนที่อยู่ในระดับที่ 3 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แต่ไม่สามารถแสดงได้ว่าด้านตรงข้ามขนานกัน โดยเข้าใจว่าถ้าหากรูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการแล้วจะต้องขนานกันด้วย แต่นักเรียนอีก 4 คนที่อยู่ในระดับที่ 4 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งมาแสดงว่า มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (มุมแย้งมีขนาด

เท่ากัน) แล้วจะเกิดด้านคู่ขนานขึ้น ข้อที่ 2 เป็นการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่ มีนักเรียน 2 คนที่อยู่ในระดับที่ 3 โดยนักเรียนคนที่ 1 ใช้วิธีการพิสูจน์ว่ามีมุมฉาก 1 มุมโดยนำผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปใช้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม แต่การพิสูจน์ว่ามีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน เพราะรูปสามเหลี่ยมมีค่าว่าหน้าจั่วโดยจำจากสิ่งที่เคยเรียนมา แต่นักเรียนคนที่ 2 ไม่สามารถสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยสามารถพิสูจน์ได้เพียงแค่การมีมุมฉาก 1 มุมโดยนำผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปใช้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุมเท่านั้น และมีนักเรียน 1 คนที่อยู่ในระดับที่ 4 ใช้วิธีการลากเส้นมัธยฐานไปเพื่อแบ่งครึ่งด้านและแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วพิสูจน์ว่ามีมุมฉาก 1 มุม โดยนำผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปใช้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม และสามารถสรุปได้ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว และข้อที่ 3 เป็นการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่ มีนักเรียน 1 คนที่อยู่ในระดับที่ 3 พิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากจากการนำผลรวมมุมภายในรูปสี่เหลี่ยมไปพิจารณาร่วมกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าด้านแต่ละด้านนั้นมีความยาวเท่ากันหรือไม่ จึงสรุปได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่มีนักเรียน 2 คนที่อยู่ในระดับที่ 4 ขึ้นต้นพิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากจากการนำผลรวมมุมภายในรูปสี่เหลี่ยมไปพิจารณาร่วมกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และพิสูจน์ว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันจากการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (ด้านที่อยู่ตรงข้ามกัน) แล้วสรุปว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ไม่ได้แสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันอย่างไร จึงขาดความสมเหตุสมผลในการสรุป

ในด้านบทนิยาม ประเภทการใช้บทนิยาม นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 และ 4 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998) ที่กล่าวว่านักเรียนระดับมัธยมศึกษาส่วนใหญ่จะอยู่ในระดับที่ 3 หรือ 4 ซึ่งนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 มีจำนวน 2 คน ซึ่งอยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ ใช้วิธีพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยนำทฤษฎีนิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการให้เหตุผลหรือแสดงความเท่ากันทุกประการ แต่ยังขาดความสมเหตุสมผลในการลงข้อสรุป และนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 มีจำนวน 8 คน ประกอบด้วย

นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน กลุ่มปานกลาง จำนวน 3 คน และกลุ่มต่ำ จำนวน 2 คน ใช้วิธีพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยนำทฤษฎี นิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการแสดงความเท่ากันทุกประการ จนได้ข้อสรุปตามที่โจทย์ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Villiers (1987) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียวแต่นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 4 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แต่มีนักเรียนจำนวน 1 คนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงไม่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่สอดคล้องกับระดับที่กำหนด เนื่องจากมีความตีความโจทย์ผิดแล้วทำให้การให้เหตุผลมีความผิดพลาดไปจากที่โจทย์ต้องการ จำนวน 1 ข้อ

2) การกำหนดบทนิยาม

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 3 และ 4 โดยภาพรวมแล้วมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 3 ซึ่งพบว่าการกำหนดบทนิยามในข้อที่ 1 ที่เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว นักเรียนทั้ง 3 คน ระบุสมบัติที่เหมือนกัน ได้แก่ เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ ด้านประชิดกันมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ เป็นต้น และสมบัติที่แตกต่างกันในการระบุ เช่น มุมภายในรวม 360 องศา เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน 1 เส้น มีแกนสมมาตร 1 แกน มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เป็นต้น นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 2 ระบุสมบัติโดยพิจารณาจากสิ่งที่เคยเรียนมา แต่นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 ระบุสมบัติของรูปโดยใช้การลากเส้น นิยามที่เคยเรียนมาของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวและมีการพิสูจน์ประกอบสมบัติที่ได้ ได้แก่ การพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมมีขนาด 360 องศา เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก และมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เป็นต้น ในข้อที่ 2 เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว นักเรียนทั้ง 3 คนระบุสมบัติที่เหมือนกัน คือ มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านและมีมุมที่เท่ากัน 2 มุม (มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 1 คู่) และสมบัติที่แตกต่างกันในการระบุ คือ มีมุมป้าน 1 มุม มีมุมแหลม 2 มุม และมีแกนสมมาตร 1 แกน นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 2 ระบุสมบัติโดยพิจารณาจากการคาดคะเนด้วยสายตาประกอบกับบทนิยามที่เคยเรียนมา แต่นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 ระบุสมบัติของรูปโดยใช้บทนิยามที่เคยเรียนของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสามเหลี่ยมมุมป้านและการพิสูจน์ประกอบสมบัติที่ได้ ได้แก่ มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ ในข้อที่ 3 เป็นการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่กำหนดให้ มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ โดยนักเรียนทั้ง 3 คนอยู่ในระดับที่ 4 แต่มีรูปแบบการให้เหตุผลที่แตกต่างกัน เช่น นักเรียนคนที่ 1 จะใช้การลากเส้นไปแบ่งครึ่งมุมและแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากัน

ทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีกครั้ง จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม อย่างสมเหตุสมผล แต่นักเรียนคนที่ 2 ใช้การลากเส้นไปตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้านเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีกครั้ง จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม แต่ขาดความสมเหตุสมผลในการลากเส้นไปตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้าน แต่ถ้านักเรียนเลือกเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งในการลากเส้น เช่น การลากเส้นไปตั้งฉาก หรือการลากเส้นไปแบ่งครึ่งมุม เป็นต้น จะทำให้เกิดความสมเหตุสมผล จึงทำให้นักเรียนคนที่ 2 อยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น นักเรียนคนที่ 3 ใช้การพิจารณาจากทฤษฎีบทที่กล่าวว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากัน 2 มุมแล้วด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันย่อมเท่ากัน โดยเลือกพิจารณาทีละ 2 ด้าน แล้วนำมาสรุปว่ามุมทั้ง 3 มุมมีขนาดเท่ากัน

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 3 และ 4 โดยภาพรวมแล้วมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 ซึ่งพบว่าการกำหนดบทนิยามในข้อที่ 1 ที่เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว นักเรียนทั้ง 3 คน ระบุสมบัติที่เหมือนกัน ได้แก่ เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก ด้านที่อยู่ติดกันยาวเท่ากัน 2 คู่ เป็นต้น และสมบัติที่แตกต่างกันในการระบุ เช่น เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน 1 เส้น มุมภายในรวม 360 องศา มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เส้นทแยงมุมหลักแบ่งรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวออกเป็น 2 สามเหลี่ยมที่เท่ากัน เป็นต้น ซึ่งนักเรียน 2 คนที่อยู่ในระดับที่ 2 ระบุสมบัติโดยพิจารณาจากสิ่งที่เคยเรียนมาและการลากเส้น แต่นักเรียน 1 คนที่อยู่ในระดับที่ 3 ระบุสมบัติของรูปโดยใช้การวัดความยาวด้าน การลากเส้น และมีการพิสูจน์ประกอบสมบัติที่ได้ ได้แก่ การพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมมีขนาด 360 องศา เป็นต้น ในข้อที่ 2 เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว นักเรียนทั้ง 3 คนระบุสมบัติที่เหมือนกัน คือ มีมุมป้าน 1 มุมและมีมุมแหลม 2 มุม สมบัติที่แตกต่างกันในการระบุ ได้แก่ มีมุมเท่ากัน 2 มุม ด้านประกอบมุมจั่วมีความยาวเท่ากัน มีแกนสมมาตร 1 แกน $a^2 + b^2 < c^2$ มุมภายในรวมกันได้ 180 องศา ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนอยู่ในระดับที่ 2 มีการระบุสมบัติโดยพิจารณาจากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมทั่วไป การวัดขนาดของมุม การลากเส้น และบทนิยามของรูปสามเหลี่ยม เป็นต้น ในข้อที่ 3 เป็นการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่กำหนดให้ มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ มีนักเรียนทั้ง 2 คนอยู่ในระดับที่ 4 แต่มีรูปแบบการให้เหตุผลที่แตกต่างกัน เช่น นักเรียนคนที่ 1 จะใช้การลากเส้นไปแบ่งครึ่งด้านและแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป

แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน จะได้มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีกครั้ง จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม อย่างสมเหตุสมผล แต่นักเรียนคนที่ 2 ใช้การลากเส้นไปตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้านเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีกครั้ง จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม แต่ขาดความสมเหตุสมผลในการลากเส้นไปตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้าน แต่ถ้านักเรียนเลือกเพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งในการลากเส้น เช่น การลากเส้นไปตั้งฉาก หรือการลากเส้นไปแบ่งครึ่งมุม เป็นต้น จะทำให้เกิดความสมเหตุสมผล จึงทำให้นักเรียนคนที่ 2 อยู่ในระดับที่ 4 ขึ้นต้น แต่นักเรียนคนที่ 3 ไม่แสดงระดับ เนื่องจากไม่สามารถพิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามที่กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและสิ่งที่โจทย์ต้องการ แต่ทราบว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้านแล้วมุมจะต้องเท่ากันทั้ง 3 มุมด้วย จากบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เคยจำมาว่ามีมุมเท่ากัน 3 มุม ซึ่งเป็นความเข้าใจผิดเกี่ยวกับบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 และ 4 โดยภาพรวมแล้วมีแนวโน้มอยู่ในระดับที่ 2 ซึ่งพบว่าการกำหนดบทนิยามในข้อที่ 1 ที่เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว (แนวนอน) นักเรียนทั้ง 3 คน ระบุมุมสมบัติที่เหมือนกัน ได้แก่ เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก ด้านที่อยู่ติดกันยาวเท่ากัน 2 คู่ เป็นต้น และสมบัติที่แตกต่างกันในการระบุ ได้แก่ มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เส้นทแยงมุมแนวตั้ง (เส้นสั้น) ถูกแบ่งครึ่งด้วยเส้นทแยงมุมแนวนอน (เส้นยาว) เป็นต้น ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนอยู่ในระดับที่ 2 มีการระบุสมบัติโดยพิจารณาจากการลากเส้น และบทนิยามที่เคยเรียนมาเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว (แนวนอน) ในข้อที่ 2 เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว นักเรียนทั้ง 3 คนระบุมุมสมบัติที่เหมือนกัน คือ มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และสมบัติที่แตกต่างกันในการระบุ ได้แก่ มีมุมที่ฐานเท่ากัน 2 มุม มีมุมป้าน 1 มุม (มุมยอดมีขนาดมากกว่า 90 องศา) มุมที่ฐานมีขนาดน้อยกว่า 45 องศา เป็นต้น ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนอยู่ในระดับที่ 2 มีการระบุสมบัติโดยพิจารณาจากสิ่งที่เคยเรียนมาและบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เป็นต้น ในข้อที่ 3 เป็นการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่กำหนดให้ มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ มีนักเรียนทั้ง 2 คนอยู่ในระดับที่ 4 แต่มีรูปแบบการให้เหตุผลที่แตกต่างกัน เช่น นักเรียนคนที่ 1 จะใช้การตีเส้นขนานแล้วนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง มาใช้ในการหามุมที่มีขนาดเท่ากัน แล้วนำไปพิจารณาร่วมกับ

ทฤษฎีบทของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่กล่าวว่า ถ้าจุดใดเป็นจุดยอด มุมที่ฐานจะมีขนาดเท่ากัน แล้วจะได้ว่ามุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีขนาดเท่ากัน แต่นักเรียนคนที่ 2 ใช้การลากเส้นไปแบ่งครึ่งด้านและแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน จะได้มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีกครั้ง จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม อย่างสมเหตุสมผล แต่นักเรียนคนที่ 3 ไม่แสดงระดับ เนื่องจากไม่สามารถพิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามที่กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและสิ่งที่โจทย์ต้องการ แต่ทราบว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้านแล้วมุมจะต้องเท่ากันทั้ง 3 มุมด้วย แล้วใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมในการให้เหตุผลว่ามุมแต่ละมุมต้องมีขนาด 60 องศาแต่ไม่ได้พิสูจน์ว่ามุมแต่ละมุมมีขนาดเท่ากันอย่างไร

ในด้านบทนิยาม ประเภทการกำหนดบทนิยาม นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 3 และ 4 โดยนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 จำนวน 8 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 2 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 3 คน มีการกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากนิยาม ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง การลากเส้น การวัดความยาว ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 2 ใช้นิยามเป็นพื้นฐานในการพิจารณาแต่ไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ทางตรรกะระหว่างคุณสมบัติได้ แต่นักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 จำนวน 3 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 2 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 1 คน มีการกำหนดบทนิยามของรูปโดยพิจารณาจากนิยาม ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง การลากเส้น การวัดความยาวและมีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว ส่วนนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 จำนวน 7 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 2 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 2 คน ใช้วิธีพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยนำทฤษฎี นิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการแสดงความเท่ากันทุกประการ จนได้ข้อสรุปตามที่โจทย์ต้องการ

ด้านการจัดหมวดหมู่

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 3 ขึ้นต้น โดยพบว่าการจัดหมวดหมู่ในข้อที่ 1 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

และรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยนักเรียนทุกคนที่อยู่ในระดับที่ 3 ขึ้นต้น จะใช้นิยามของรูปที่เคยเรียนมา การลากเส้น และการพักรูปในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ในข้อที่ 2 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยนักเรียนทุกคนที่อยู่ในระดับที่ 3 ขึ้นต้น จะใช้นิยามและสมบัติของรูปที่เคยเรียนมาและ การลากเส้น ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ในข้อที่ 3 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้านหน้าจั่ว โดยนักเรียน 1 คนที่อยู่ในระดับที่ 3 ขึ้นต้น จะใช้นิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า สามเหลี่ยมมุมแหลม และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว การลากเส้นและการมองภาพ แต่มีนักเรียน 2 คนที่อยู่ในระดับที่ 3 มีการให้เหตุผลเพิ่มเติม คือ การพิสูจน์เกี่ยวกับสมบัติที่ได้ ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้านหน้าจั่ว รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และมีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้านหน้าจั่ว

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 และ 3 ขึ้นต้น โดยพบว่าการจัดหมวดหมู่ในข้อที่ 1 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยนักเรียนทุกคนที่อยู่ในระดับที่ 2 จะใช้การพักรูปเพื่อพิจารณาแกนสมมาตร วัดความยาวของด้าน เส้นทแยงมุมและวัดขนาดของมุม ใช้นิยามของรูปที่เคยเรียนมา ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ในข้อที่ 2 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มีนักเรียนจำนวน 2 คน อยู่ในระดับที่ 2 จะใช้การพักรูป ลากเส้นทแยงมุม วัดความยาวด้าน ใช้นิยามของรูปสี่เหลี่ยม แต่มีนักเรียน 1 คน ที่อยู่ในระดับที่ 3 ขึ้นต้น จะมีการให้เหตุผลเพิ่มเติม คือ การพิสูจน์เกี่ยวกับสมบัติที่ได้ ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ในข้อที่ 3 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมห้านหน้าจั่ว นักเรียนจำนวน 2 คน อยู่ในระดับที่ 2 จะใช้การพักรูปเพื่อพิจารณาแกนสมมาตร สมบัติของรูป นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวกับรูป

สามเหลี่ยม แต่มีนักเรียน 1 คน ที่อยู่ในระดับที่ 3 ขึ้นต้น จะมีการให้เหตุผลเพิ่มเติม คือ การพิสูจน์ประกอบสมบัติที่ได้ ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าหน้าจั่ว รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค้ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าหน้าจั่ว

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 2 และ 3 ขึ้นต้น โดยพบว่าการจัดหมวดหมู่ในข้อที่ 1 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยนักเรียนทุกคนที่อยู่ในระดับที่ 2 จะใช้ทฤษฎีที่เคยจำมาเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม ใช้ไม่บรรทัดในการวัดความยาวด้าน ดูจากลักษณะความเียงของรูป ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค้ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ในข้อที่ 2 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มีนักเรียนทุกคนอยู่ในระดับที่ 2 จะใช้การลากเส้นเพื่อพิจารณาเส้นทแยงมุม พิจารณาจากลักษณะภายนอก ใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง วัดความเป็นมุมฉากของรูป แต่มีนักเรียน 1 คน ที่อยู่ในระดับที่ 2 ขึ้นต้น แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 1 ด้วย คือ การใช้ลักษณะภายนอก ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค้ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และมีแค้ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ในข้อที่ 3 เป็นการระบุสมบัติที่เหมือนกันและแตกต่างกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าหน้าจั่ว มีนักเรียนทุกคนอยู่ในระดับที่ 2 จะใช้ลักษณะภายนอก นิยามของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีที่เคยเรียนมาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม สัญลักษณ์รอยขีดของรูป แต่มีนักเรียน 1 คน ที่อยู่ในระดับที่ 2 ขึ้นต้น แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 1 ด้วย คือ การใช้ลักษณะภายนอก ในการอธิบายความเหมือนกันของสมบัติที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าหน้าจั่ว รวมถึงการระบุสมบัติที่มีแค้ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าหน้าจั่ว

ในด้านการจัดหมวดหมู่ นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 2 และ 3 ซึ่งนักเรียนส่วนมากจะอยู่ในระดับที่ 2 และ 3 โดยนักเรียนที่แสดงวิธีการอธิบายความเหมือนกันและแตกต่างกันของสมบัติ ในระดับที่ 1 จะพิจารณาจากลักษณะภายนอก แต่นักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 2 จำนวน 6 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 3 คน พิจารณาจากการอธิบายความเหมือนกันและแตกต่างกันของสมบัติโดย

พิจารณาจาก การลากเส้นเพื่อพิจารณาเส้นทแยงมุม ใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง วัตถุประสงค์ความเป็นมุมฉากของรูป และนักเรียนที่แสดงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 จำนวน 4 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 1 คน จะมีการให้เหตุผลเพิ่มเติมจากระดับที่ 2 สอดคล้องกับงานวิจัยของ Villiers (1987) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 จะมีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียวเกี่ยวกับสมบัติที่ได้มา

ด้านการพิสูจน์

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 4 ซึ่งพบว่าการพิสูจน์ในข้อที่ 1 พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา นักเรียนทุกคนอยู่ในระดับที่ 4 ใช้วิธีการที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนคนที่ 1 แสดงวิธีการพิสูจน์ 2 วิธี คือ วิธีการที่ 1 พิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนและแสดงถึงการให้เหตุผลในระดับที่ 3 คือ การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมีขนาด 180 องศา จำนวน 2 รูป รวมกันจะได้ 360 องศา วิธีการที่ 2 การพิสูจน์อย่างมีแบบแผนและแสดงถึงการให้เหตุผลในระดับที่ 4 คือ การต่อเส้นขนานออกไปแล้วนำทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งมาใช้ในการพิจารณาร่วมกับทฤษฎีของมุมตรงในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา เป็นต้น นักเรียนคนที่ 2 ใช้วิธีการลากเส้นตั้งฉาก 2 เส้น เพื่อแบ่งรูปออกเป็น 3 รูป คือ รูปสี่เหลี่ยม 1 รูปและรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณามุมที่ได้ร่วมกับการใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งในการแสดงว่ามุมมีขนาดเท่ากัน แล้วใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมีขนาด 180 องศา จำนวน 2 รูป รวมกันจะได้ 360 องศา นักเรียนคนที่ 3 ใช้วิธีการลากเส้นต่อด้านออกไป แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกมีขนาดเท่ากับมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดพิจารณาร่วมกับทฤษฎีของมุมตรงในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา ข้อที่ 2 พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน นักเรียนทุกคนอยู่ในระดับที่ 4 ใช้วิธีการที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนคนที่ 1 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุม 2 เส้นเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วพิจารณาร่วมกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน) นักเรียนคนที่ 2 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุม 2 เส้นเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วพิจารณาร่วมกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการ แบบ มุม - ด้าน - มุม จะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน) นักเรียนคนที่ 3 ใช้วิธีการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เนื่องจากมีด้านตรงข้ามขนานกัน จึงนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมาใช้ในการแสดงว่าเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน ในข้อที่ 3 พิสูจน์ว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน นักเรียนทุกคนอยู่ในระดับที่ 4 แต่ใช้วิธีการที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนคนที่ 1 และนักเรียนคนที่ 2 ใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วในการแสดงว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องมุมตรงในการแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน แต่นักเรียนคนที่ 3 ใช้วิธีการลากเส้นแบ่งครึ่งมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้ว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องมุมตรงในการแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 4 ซึ่งพบว่าการพิสูจน์ในข้อที่ 1 พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา มีนักเรียนจำนวน 2 คน อยู่ในระดับที่ 3 ซึ่งนักเรียนแต่ละคนใช้วิธีการที่แตกต่างกันในการพิสูจน์ โดยนักเรียนคนที่ 1 ใช้วิธีการแทนค่าสูตรผลรวมมุมภายในของรูป n เหลี่ยม ที่มีสูตรว่า ผลรวมมุมภายในของรูป n เหลี่ยม เท่ากับ $180(n - 2)$ เมื่อ n คือจำนวนเหลี่ยม แล้วจึงได้ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา แต่นักเรียนคนที่ 2 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาร่วมกับผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดรูปละ 180 องศา จำนวน 2 รูป รวมกันได้ 360 องศา มีนักเรียนจำนวน 1 คนที่อยู่ในระดับที่ 4 ใช้วิธีการต่อเส้นขนานแล้วลากเส้นตั้งฉากจำนวน 2 เส้นเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป และรูปสี่เหลี่ยม 1 รูป แล้วพิจารณามุมที่ได้ร่วมทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งในการแสดงว่ามุมมีขนาดเท่ากัน แล้วใช้ทฤษฎีของมุมตรงในการแสดงว่าผลรวมมุมตรงมีขนาด 180 องศา จำนวน 2 มุม รวมกันจะได้ 360 องศา ข้อที่ 2 พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน นักเรียนทุกคนอยู่ในระดับที่ 4 แต่ใช้วิธีการที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนคนที่ 1 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุม 2 เส้นแล้วใช้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในการระบุว่าเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน ในการพิจารณาร่วมกับการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นทแยงมุม เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน จึงได้ว่าเส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน แต่นักเรียนพิสูจน์เพียง 1 เส้น จึงทำให้นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น ถ้าหาก

นักเรียนพิสูจน์ต่อในทำนองเดียวกันอีกครั้งกับรูปสามเหลี่ยมที่เหลือก็จะได้ครบตามที่โจทย์กำหนด และอยู่ในระดับที่ 4 ซึ่งมีนักเรียน 2 คนที่อยู่ในระดับที่ 4 ใช้วิธีการที่เหมือนกันคือการลากเส้นทแยงมุม 2 เส้นเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วพิจารณาร่วมกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและทฤษฎีที่เกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้ง ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม จะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน) ในข้อที่ 3 พิสูจน์ว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน นักเรียนทุกคนอยู่ในระดับที่ 4 ขึ้นต้น แต่ใช้วิธีการที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนคนที่ 1 ใช้วิธีการลากเส้นแบ่งครึ่งมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้ว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวกับมุมตรงในการแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน แต่การแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ยังขาดความสมเหตุสมผล เนื่องจากมุมต้องอยู่ระหว่างด้านด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน จึงได้ว่าด้านคู่ที่ใช้ในการให้เหตุผลยังไม่สอดคล้องกับข้อสรุป แต่การแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน มีความสมเหตุสมผล จึงสรุปได้ว่านักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขึ้นต้น นักเรียนคนที่ 2 ใช้วิธีการลากเส้นตั้งฉากเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วใช้สิ่งที่กำหนดให้และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน แล้วลากเส้นตั้งฉากอีกครั้งโดยการลากเส้นต่อจากเส้นเดิม เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากัน แล้วแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน โดยใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวกับมุมตรง แต่การแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่เกิดจากการแบ่งรูปสามเหลี่ยมในครั้งที่ 2 นั้น เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ยังขาดความสมเหตุสมผล เนื่องจากนักเรียนลากเส้นตั้งฉากต่อไป ยังจุดยอดมุม แล้วพิจารณาว่าเส้นทั้ง 2 ต่อกันเป็นเส้นตรง จึงใช้สมบัติของมุมตรงข้ามในการให้เหตุผล ซึ่งเส้นที่วาดต่อกันอาจจะไม่เป็นส่วนของเส้นตรง

นักเรียนคนที่ 3 ใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุมเพื่อครึ่งมุมและแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม แล้วพิสูจน์ว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน โดยแสดงความเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ของรูปสามเหลี่ยม 2 รูป อีกครั้งแล้วแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากันโดยใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวกับมุมตรง แต่การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งครึ่งมุมในตอนแรกยังขาดความสมเหตุสมผล เนื่องจากมุมที่ได้อาจจะไม่ถูกแบ่งครึ่ง โดยนักเรียนสามารถใช้เพียงการพิสูจน์ในครั้งที่ 2 ที่แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะมีความสมเหตุสมผลมากกว่า

นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในระดับที่ 3 และ 4 ซึ่งพบว่าการพิสูจน์ในข้อที่ 1 พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา มีนักเรียนจำนวน 2 คน อยู่ในระดับที่ 3 ใช้วิธีการที่เหมือนกัน คือ การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาร่วมกับผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดรูปละ 180 องศา จำนวน 2 รูป รวมกันได้ 360 องศา มีนักเรียนจำนวน 1 คนที่อยู่ในระดับที่ 4 ใช้วิธีการต่อเส้นขนานออกไปในด้านคู่ขนาน แล้วนำทฤษฎีที่เกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้งมาใช้ในการพิจารณาร่วมกับทฤษฎีของมุมตรงในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา ข้อที่ 2 พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน มีนักเรียนจำนวน 1 คนอยู่ในระดับที่ 4 โดยใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม แล้วจะได้ว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน) แต่นักเรียนอีก 2 คนไม่แสดงระดับการให้เหตุผล เนื่องจากใช้วิธีการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก

ในข้อที่ 3 พิสูจน์ว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน มีนักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 จำนวน 2 คน แต่ใช้วิธีการที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนคนที่ 1 ใช้วิธีการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปพิจารณาร่วมกับมุมตรงในการแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน แต่นักเรียนคนที่ 2 ใช้วิธีการลากเส้นแบ่งครึ่งมุมและแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จะได้ว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน แล้วลากเส้นต่อจากรูปเดิมไปแบ่งรูปสามเหลี่ยมอีกฝั่งหนึ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน จึงได้ว่ามุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วแสดงว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากันโดยใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวกับมุมตรง แต่การลากเส้นต่อเพื่อแบ่งรูปสามเหลี่ยมอีกฝั่งหนึ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ยังขาดความสมเหตุสมผลในด้านการต่อเส้น เนื่องจากเส้นที่ลากต่ออาจจะไม่ทำให้เส้นทั้งสองรวมเป็นส่วนของเส้นตรงเดียวกัน แต่การพิสูจน์ในตอนแรกนั้นเพียงพอต่อการนำไปสู่ข้อสรุปได้ จึงทำให้นักเรียนอยู่ในระดับที่ 4 ขั้นต้น และมีนักเรียน 1 คน ไม่แสดงระดับการให้เหตุผลเนื่องจากไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดเท่ากัน

ในด้านการพิสูจน์ นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลางและต่ำ แสดงวิธีการพิสูจน์ประกอบการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 และ 4 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Gutiérrez and Jaime (1998) ที่กล่าวว่านักเรียนมัธยมส่วนใหญ่จะอยู่ในระดับที่ 3 หรือ 4 โดยนักเรียนที่แสดงการพิสูจน์ในระดับที่ 3 จำนวน 4 คน ประกอบไปด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 2 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 2 คน ใช้วิธีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว โดยนำทฤษฎีบทนิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการให้เหตุผลหรือแสดงความเท่ากันทุกประการ แต่นักเรียนที่แสดงการพิสูจน์ในระดับที่ 4 จำนวน 8 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูง จำนวน 3 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลาง จำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ จำนวน 2 คน ใช้วิธีการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน โดยนำทฤษฎีบทนิยามและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปสนับสนุนเหตุผลในการแสดงความเท่ากันทุกประการ จนได้ข้อสรุปตามที่โจทย์ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Villiers (1987) ที่กล่าวว่านักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 3 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียวแต่นักเรียนที่อยู่ในระดับที่ 4 จะใช้วิธีการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แต่มีนักเรียนจำนวน 2 คน อยู่ที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ ไม่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้านการพิสูจน์ที่สอดคล้องกับระดับที่กำหนด เนื่องจากนักเรียนแสดงการพิสูจน์ได้ว่า 2 รูปเท่ากันทุกประการแล้ว แต่ไม่สามารถนำไปสู่ข้อสรุปที่โจทย์ต้องการได้

นอกจากผลสรุปที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว ในระหว่างการทำวิจัย ผู้วิจัยได้พบประเด็นที่น่าสนใจดังนี้ 1) นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในภาพรวมทั้ง 4 ด้านที่สูงกว่ากลุ่มปานกลางและกลุ่มต่ำ 2) ในด้านการใช้บทนิยาม นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางจะมีการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้สมเหตุสมผลกว่ากลุ่มสูง 3) ในด้านการใช้บทนิยามที่เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อสถานการณ์ที่กำหนดให้มีข้อมูลไม่เพียงพอที่จะตัดสินเกี่ยวกับการเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในที่มีผลสัมฤทธิ์กลุ่มสูงใช้ข้อมูลที่กำหนดให้มานั้นตัดสินว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขณะที่นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางและต่ำบางคนใช้ข้อมูลที่ไม่เพียงพอดังกล่าวตัดสินว่าไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 4) ในด้านการกำหนดบทนิยามและการจัดหมวดหมู่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม นักเรียนเป้าหมายที่อยู่ในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำไม่แสดงการพิสูจน์ประกอบการให้เหตุผลเกี่ยวกับสมบัติที่ได้มา

ข้อเสนอแนะจากการวิจัย

ข้อเสนอแนะสำหรับผู้สอน

1. ในการจัดการเรียนรู้สาระเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยเฉพาะนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำครูควรหาวิธีการสอนที่ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายหรือเกิดความเข้าใจอย่างแท้จริงเกี่ยวกับบทนิยาม สมบัติ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม เพราะว่าสิ่งเหล่านี้เป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนจะต้องนำไปใช้ในการจำแนกหรือจัดหมวดหมู่รูปเรขาคณิต รวมทั้งใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2. ในการจัดการเรียนรู้สาระเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ครูควรให้ความสำคัญเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียน เพราะว่า การให้เหตุผลของนักเรียนจะสะท้อนให้เห็นถึงความเข้าใจของเนื้อหาที่เรียนได้เป็นอย่างดี และทำให้ครูได้ข้อมูลเกี่ยวกับการเรียนรู้เรขาคณิตของนักเรียน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อครูในการออกแบบการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตครั้งถัดไป

3. ในการจัดการเรียนรู้สาระเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ครูควรให้ความสำคัญ 4 ด้านต่อไปนี้ ตามที่ Gutierrez และ Jaime เสนอ ได้แก่ 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง 2) ด้านบทนิยาม 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ และ 4) ด้านการพิสูจน์ เพราะ 4 ด้านดังกล่าวนี้เป็นความสามารถพื้นฐานที่สำคัญของผู้เรียนที่จะไปต่อยอดเรียนวิชาเรขาคณิตระดับสูงต่อไป

4. ในการวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมของนักเรียน ไม่ควรพิจารณาเพียงแค่ว่าคำตอบถูกหรือผิดจากแบบทดสอบที่นักเรียนทำเพียงอย่างเดียว ครูผู้สอนควรให้ความสำคัญเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียนที่ได้มาซึ่งคำตอบ โดยใช้การประเมินที่หลากหลาย เช่น ใช้การสัมภาษณ์ ใช้การถาม - ตอบ หรือใช้การสังเกตร่วมด้วย เป็นต้น เพราะว่ามีนักเรียนบางคนมีความรู้แต่อาจขาดความสามารถในการสื่อสารผ่านการเขียน

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ในวิชา คณิตศาสตร์ เรื่อง การให้เหตุผลของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งการวิจัยนี้ได้ให้นักเรียน แสดงเหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมใน 4 ด้าน ได้แก่ 1) ด้านการตระหนักรูปร่าง 2) ด้านบทนิยาม 3) ด้านการจัดหมวดหมู่ และ 4) ด้านการพิสูจน์ โดยผลการวิจัยครั้งนี้ขึ้นอยู่กับบริบทของโรงเรียนที่ผู้วิจัยเข้าไปเก็บข้อมูล สำหรับผู้ที่สนใจจะทำวิจัยครั้งถัดไป ควรทำวิจัยในบริบทอื่น ๆ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่อง รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ของนักเรียนที่ชัดเจนยิ่งขึ้น



บรรณานุกรม

- Boyatzis, R. E. (1998). *Transforming qualitative information: Thematic analysis and code development*. sage.
- Ferrini-Mundy, J. (2000). Principles and standards for school mathematics: A guide for mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(8).
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, 20, 27-46.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, 22(3), 237-251.
- Hiele, V. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents. *National Council of Teachers of Mathematics*, 1988.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teachers*, 74 (1), 11–18. *Hoffer11174Mathematics Teacher1981*.
- Lutfi, M., & Jupri, A. (2020). Analysis of junior high school students' spatial ability based on Van Hiele's level of geometrical thinking for the topic of triangle similarity. *Journal of Physics: Conference Series*,
- Mei, A. (2018). An Analysis on Male and Female Junior High School Students' Van Hiele Levels of Geometric Thinking from Mathematical Ability. *Research on Humanities and Social Sciences*, 8, 24 - 28.
<https://www.iiste.org/Journals/index.php/RHSS/article/view/43738>
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. sage.
- Parker, L. D. (2003). Financial management strategy in a community welfare organisation: a boardroom perspective. *Financial Accountability & Management*, 19(4), 341-374.
- Sulistiowati, D., Herman, T., & Jupri, A. (2019). Student difficulties in solving geometry problem based on Van Hiele thinking level. *Journal of Physics: Conference Series*,

- Teppo, A. R. (1997). Chapter 1: Diverse ways of knowing. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 1-177.
- Villiers, M. d. (1987). Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele theory: Some critical comments. *Internal RESUME-report*, 3 - 24.
- ชาย โพธิ์สิตา. (2564). ศาสตร์และศิลป์แห่งการวิจัยเชิงคุณภาพ (9 ed.).
- ณัชฎาภา นิมิตดี. (2560). การจัดการเรียนรู้ตามแนวปฏิบัติสู่ผลสัมฤทธิ์ขั้นสูงเพื่อส่งเสริมการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.
- ปองกมล พันธุ์อาทิตย์. (2555). การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดทางเรขาคณิตกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.
- ปัญญา ธีระวิทยเลิศ. (2559). เทคนิคการสนทนากลุ่ม (Focus Group) ที่มีประสิทธิภาพ. *Journal of Yanasangvorn Research Institute Mahamakut Buddhist University*, 7(2), 284-289.
- พินิดา กองเกตุใหญ่. (2542). ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบ แวน ฮีลี ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นในจังหวัดกาญจนบุรี.
- รัตนะ บัวสนธ์. (2558). วิจัยเชิงคุณภาพทางการศึกษา (4 ed.). สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- วัชรिता ภิรมย์ไกรภักดี. (2561). การศึกษามโนทัศน์ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นตามระดับการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele.
- วินัย คำสุวรรณ. (2558). มโนทัศน์และการวิจัย ความเข้าใจคณิตศาสตร์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ. (2554). การอบรมครูด้วยระยะทางไกลสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาหลักสูตรมาตรฐานการอบรมครูปีที่ 1.
- สมควร สีชมภู. (2549). การศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนตามโมเดลของ แวน ฮีลี.
- สิริพร ทิพย์คง. (2532). แวนฮีลีโมเดล ; ลำดับขั้นตอนการเรียนรู้เรขาคณิต. 91 - 95.
- สุภางค์ จันทวานิช. (2545). วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- หนิมพานิช, จ., & ชมภูณัฐ หนูนาค. (2565). การออกแบบวิจัยเชิงคุณภาพสำหรับนักศึกษาปริญญาโทและปริญญาเอก. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อรรถกร ใจเดช. (2555). การ พัฒนาการ คิด ทาง เรขาคณิต เรื่อง ทฤษฎีบท พี ทา โก รัส ของนักเรียน ชั้น มัธยมศึกษา ปี ที่ 2 โดย ใช้ แนว การ สอน ของ แวน ฮี ลี= Developing geometric thinking on pythagorean theorem of Mathayom Suksa 2 students by

using the van Hiele teaching approach.

อัมพร ม้าคนอง. (2557). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ.







รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ในการร่วมประชุมกลุ่มย่อย (Focus group) เพื่อตรวจสอบและพัฒนาเครื่องมือในการวิจัย ซึ่งได้แก่ งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม แบบสัมภาษณ์ และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ มีดังนี้

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยี่สาและ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอนก จันทรวงูญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

4. อาจารย์พัชราภรณ์ ไวยเดช

โรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา (ฝ่ายมัธยม)

ผู้ให้รหัสข้อมูล

1. อาจารย์ ดร.ศิริรัตน์ ชาวนา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา

2. อาจารย์ สุพินดา เพชรา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา

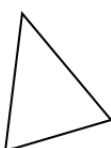
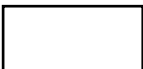


ภาคผนวก ข
การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย

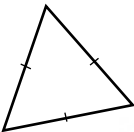
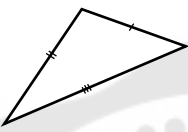
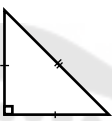
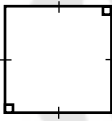
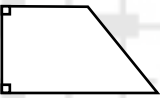
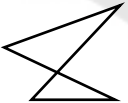
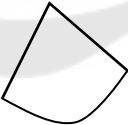
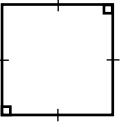
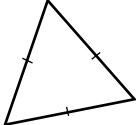
การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย

ในงานวิจัยเรื่อง การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ GUTIERREZ และ JAIME ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย ประกอบด้วย งานปฏิบัติ (TASK) เรื่องการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม จำนวน 30 ข้อ โดยแบ่งออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ การตระหนักรูปร่าง จำนวน 6 ข้อ บทนิยาม จำนวน 12 ข้อ การจัดหมวดหมู่ จำนวน 6 ข้อ และการพิสูจน์จำนวน 6 ข้อ แบบสัมภาษณ์และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ ผู้วิจัยได้นำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยไปเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาหลัก อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมและผู้ทรงคุณวุฒิที่มีความเชี่ยวชาญทางด้านเรขาคณิตจำนวน 2 ท่าน และพิจารณาร่วมกับผู้วิจัย รวมทั้งหมด 5 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ปรับปรุงแก้ไข และคัดเลือกงานปฏิบัติ (Task) โดยใช้วิธีการประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) ดังตารางต่อไปนี้

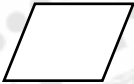
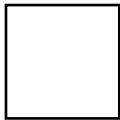
ตาราง 26 งานปฏิบัติ (Task) เรื่องการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
ด้านการตระหนักรูปร่าง	
1. จากรูปที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3	คัดเลือกและปรับแก้ดังนี้ 1) แก้ไขรูปหมายเลข 2 ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เปิดตรงมุม 1 มุม 2) แก้ไขรูปหมายเลข 3 ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมปิดที่มีมุม 1 เพิ่มมา 1 มุมตรงด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม
2. จากรูปที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3	คัดเลือกและปรับแก้ดังนี้ 1) แก้ไขรูปหมายเลข 1 ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ 2) แก้ไขรูปหมายเลข 2 ให้ลดความโค้งลง 3) แก้ไขรูปหมายเลข 3

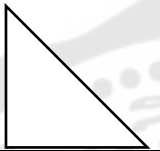
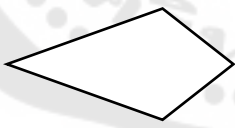
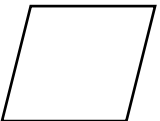
ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
	ให้เปิดมุมทั้ง 4 มุมเพียงเล็กน้อย
3. จากรูปที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3	ไม่ผ่านการคัดเลือก
4. จากรูปที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3	ไม่ผ่านการคัดเลือก
5. จากรูปที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยม และหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3	คัดเลือกลงและปรับแก้ไขคำถามให้มีความชัดเจนขึ้น
6. จากรูปที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยม และหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ  หมายเลข 1  หมายเลข 2  หมายเลข 3	ไม่ผ่านการคัดเลือก

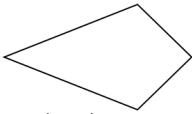
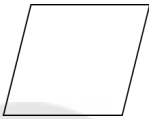
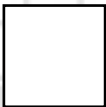
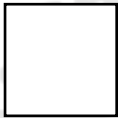
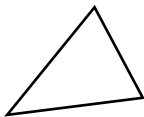
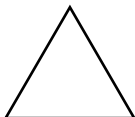
ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
ด้านบทนิยาม (การใช้บทนิยาม)	
1. กำหนดบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมดังนี้ บทนิยาม 1 คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านคู่ขนานกัน 2 คู่ บทนิยาม 2 คือ ผลรวมของมุมสองมุมใด ๆ ที่อยู่ติดกัน เป็น 180 องศา ในการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน นักเรียนใช้เพียงบทนิยามที่กำหนดให้ข้างต้นได้หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงเหตุผลประกอบ 	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ 1) ปรับให้เหลือ 1 บทนิยาม 2) กำหนดสิ่งที่จำเป็นในการพิสูจน์ว่ารูปที่กำหนดให้เป็นรูปที่สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดหรือไม่ 3) แก้ไขคำถามให้มีความชัดเจนขึ้น
2. กำหนดบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมดังนี้ บทนิยาม 1 คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน บทนิยาม 2 คือ มุมแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมมีขนาด 60 องศา ในการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า นักเรียนใช้เพียงบทนิยามที่กำหนดให้ข้างต้นได้หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงเหตุผลประกอบ 	ไม่ผ่านการคัดเลือก
3. กำหนดบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมดังนี้ บทนิยาม 1 คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านทุกด้านมีความยาวเท่ากัน บทนิยาม 2 คือ มุมแต่ละมุมของรูปสี่เหลี่ยมมีขนาด 90 องศา ในการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นักเรียนใช้เพียงบทนิยามที่กำหนดให้ข้างต้นได้หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงเหตุผลประกอบ 	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ 1) ปรับให้เหลือ 1 บทนิยาม 2) กำหนดสิ่งที่จำเป็นในการพิสูจน์ว่ารูปที่กำหนดให้เป็นรูปที่สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดหรือไม่ 3) แก้ไขคำถามให้มีความชัดเจนขึ้น

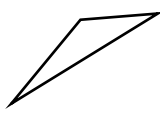
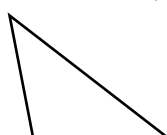
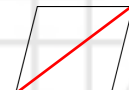
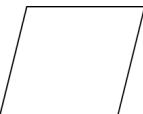
ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
4. กำหนดบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมดังนี้ บทนิยาม 1 คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน บทนิยาม 2 คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมฉาก 1 มุม ในการพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว นักเรียนใช้เพียงบทนิยามที่กำหนดให้ข้างต้นได้หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงเหตุผลประกอบ 	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ 1) ปรับให้เหลือ 1 บทนิยาม 2) กำหนดสิ่งที่จำเป็นในการพิสูจน์ว่ารูปที่กำหนดให้เป็นรูปที่สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดหรือไม่ 3) แก้ไขคำถามให้มีความชัดเจนขึ้น
5. กำหนดบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมดังนี้ บทนิยาม 1 คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก บทนิยาม 2 คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านติดกันยาวเท่ากัน 2 คู่ ในการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว นักเรียนใช้เพียงบทนิยามที่กำหนดให้ข้างต้นได้หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงเหตุผลประกอบ 	ไม่ผ่านการคัดเลือก
6. กำหนดบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมดังนี้ บทนิยาม 1 คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก บทนิยาม 2 คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน ในการพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน นักเรียนใช้เพียงบทนิยามที่กำหนดให้ข้างต้นได้หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงเหตุผลประกอบ 	ไม่ผ่านการคัดเลือก

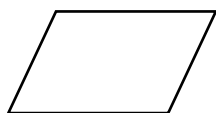
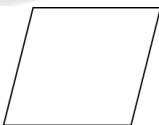
ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
ด้านบทนิยาม (การกำหนดบทนิยาม)	
1. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงกำหนดบทนิยามสำหรับรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว แล้วพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่กำหนดให้ ถือเป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวหรือไม่ เพราะเหตุใด  รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ 1) แก้ไขคำถามให้เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปที่กำหนดให้ 2) ลดจำนวนรูปให้เหลือเพียง 1 รูป คือ รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว
2. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงกำหนดบทนิยามสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้วพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ ถือเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ เพราะเหตุใด  รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก  รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	ไม่ผ่านการคัดเลือก
3. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงกำหนดบทนิยามสำหรับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน แล้วพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้ ถือเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนหรือไม่ เพราะเหตุใด  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน  รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	ไม่ผ่านการคัดเลือก
4. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงกำหนดบทนิยามสำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม แล้วพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่กำหนดให้ ถือเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหรือไม่ เพราะเหตุใด  รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม  รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	ไม่ผ่านการคัดเลือก

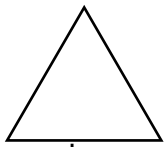
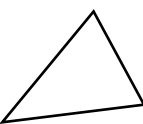
ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
5. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงกำหนดบทนิยามสำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน แล้วพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่กำหนดให้ ถือเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหรือไม่ เพราะเหตุใด  รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน  รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ 1) แก้ไขคำถามให้เป็นการระบุสมบัติทั้งหมดของรูปที่กำหนดให้ 2) ลดจำนวนรูปให้เหลือเพียง 1 รูป โดยนำมารวมกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว
8. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงกำหนดบทนิยามสำหรับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วพิจารณาว่าเมื่อลากเส้นทแยงมุม 1 เส้น ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน เพื่อแบ่งรูปออกเป็น 2 ส่วน ดังรูปที่กำหนดให้ แล้วรูปสามเหลี่ยมที่ได้ถือเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหรือไม่ เพราะเหตุใด  รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ 1) กำหนดบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2) แก้ไขคำถามโดยกำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแล้วให้แสดงผลว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีมุมเท่ากัน 3 มุม
ด้านการจัดหมวดหมู่	
1. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จงตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	คัดเลือก ไม่ปรับแก้ไข

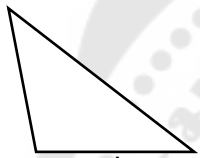
ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
2. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงตอบ ไม่ผ่านการคัดเลือก คำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า  รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า  รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	
3. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จง ไม่ผ่านการคัดเลือก ตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน  รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	

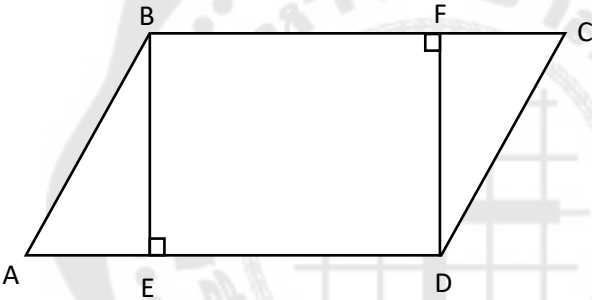
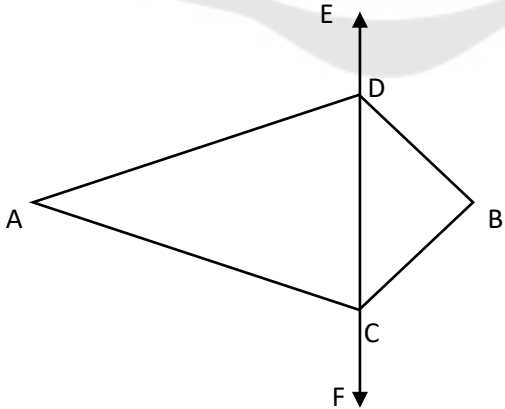
ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
4. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จงตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค้ในรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค้ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว  รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว  รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	คัดเลือกและปรับแก้ไขรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีด้านที่ไม่ใช่ด้านคู่ขนาน มีความยาวเท่ากัน 2 ด้าน
5. กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม จงตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค้ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค้ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม	คัดเลือกและปรับแก้ไขรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมนำจั่ว

ตาราง 26 (ต่อ)

งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
6. กำหนดรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน จง ตอบคำถามต่อไปนี้ 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมหน้า จั่วและรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแต่ ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมป้านแต่ ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน	ไม่ผ่านการคัดเลือก
ด้านการพิสูจน์	
1. จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่าผล มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาด 360 องศา 	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ 1) กำหนดชื่อมุมและชื่อของ รูปสี่เหลี่ยมให้มีความชัดเจน ขึ้น 2) เปลี่ยนจากรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนานเป็นรูปสี่เหลี่ยม คางหมู
2. จากรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน 	คัดเลือกและปรับแก้ไขโดย กำหนดชื่อมุมและชื่อของรูป สี่เหลี่ยมให้มีความชัดเจนขึ้น
3. จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่ามุมตรงข้าม ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน 	ไม่ผ่านการคัดเลือก

ตาราง 26 (ต่อ)

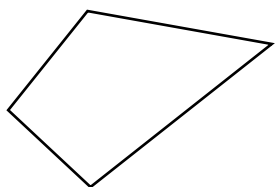
งานปฏิบัติ (Task) ที่ใช้ในการประชุมกลุ่มย่อย	ข้อคิดเห็น
4. จากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาวเท่ากัน 	ไม่ผ่านการคัดเลือก
5. กำหนดให้ รูป $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $AD = BC, AB = CD, \overline{BE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AD}$ และ $\overline{DF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 	
6. จากรูปที่กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่ $AD = AC$ และ $BC = BD$ แล้วลาก $\overline{EF}$ ตัดจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ 	คัดเลือกและปรับแก้ไขดังนี้ - กำหนดให้มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ - ปรับคำถามให้มีความชัดเจนมากขึ้น



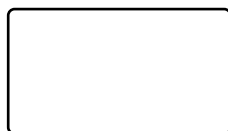
ภาคผนวก ค
งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

ด้านการตระหนักรูปร่าง

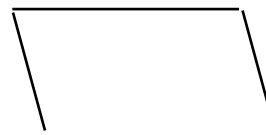
1. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



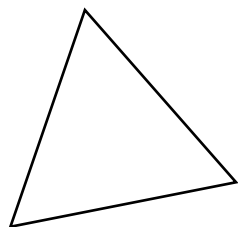
หมายเลข 2



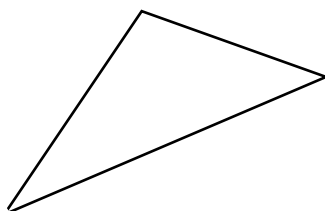
หมายเลข 3



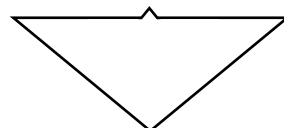
2. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



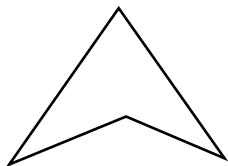
หมายเลข 2



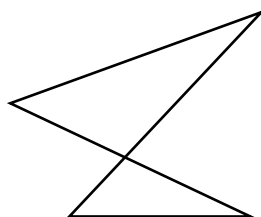
หมายเลข 3



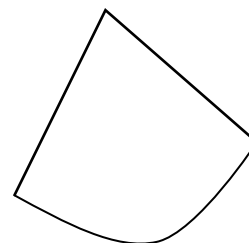
3. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

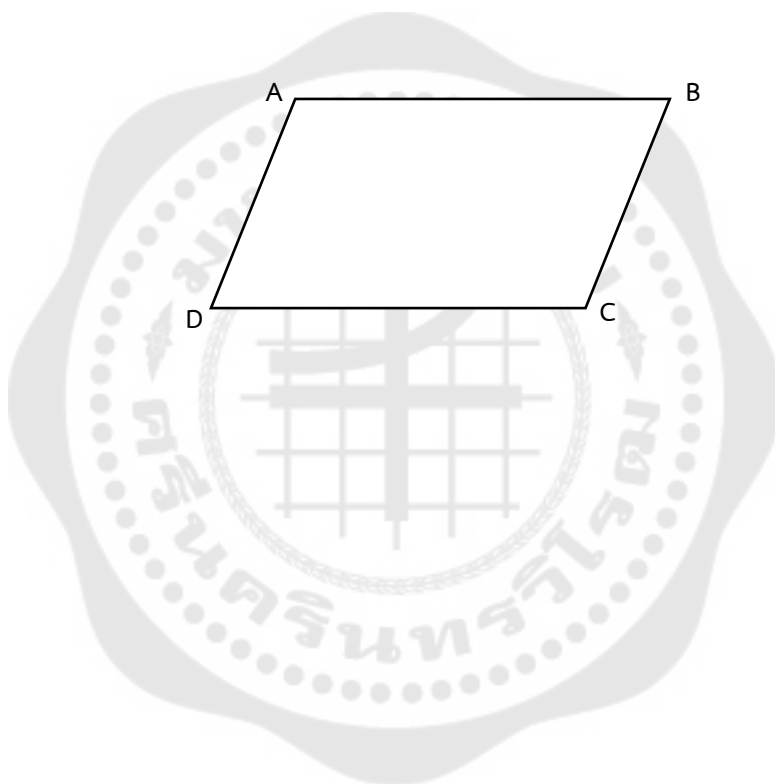


ด้านบทนิยาม แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ประกอบด้วย การใช้บทนิยามและการกำหนดบทนิยาม

การใช้บทนิยาม

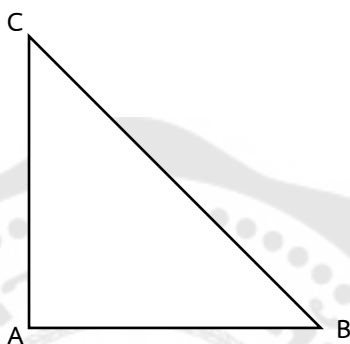
1. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



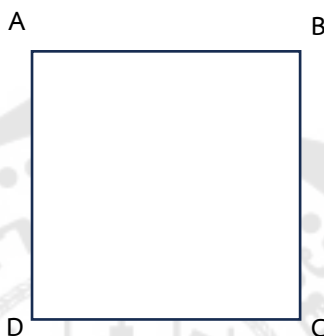
2. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\angle B = \angle C = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



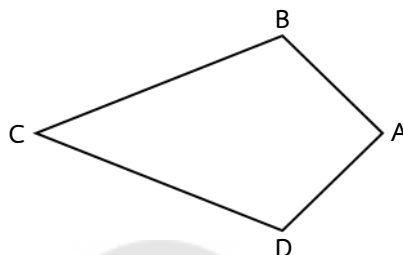
3. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\hat{A}\hat{B}C = \hat{B}\hat{C}D = \hat{A}\hat{D}C = \hat{B}\hat{A}D$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ

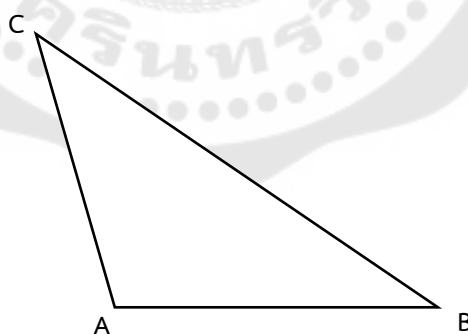


การกำหนดบทนิยาม

1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

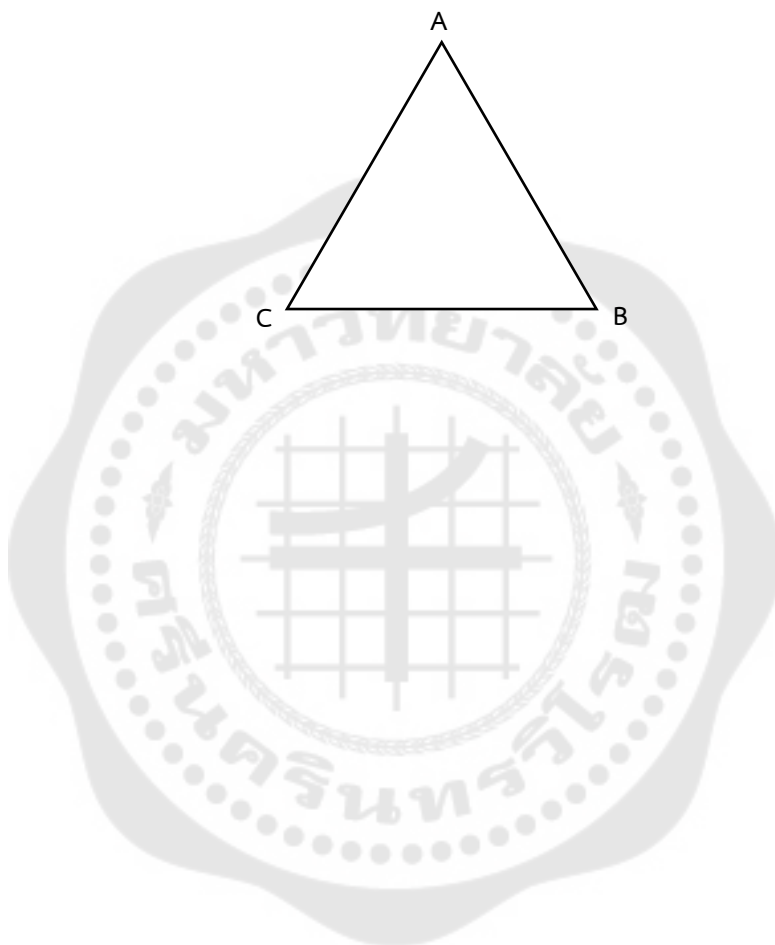


2. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว



3. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

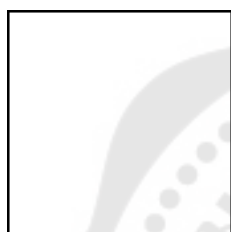
กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



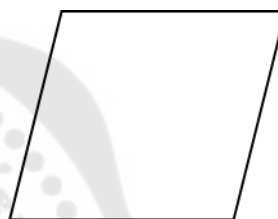
ด้านการจัดหมวดหมู่

1. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



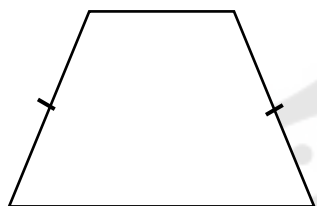
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

2. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

3. กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมน้ำจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

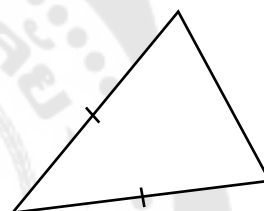
1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมน้ำจั่ว

2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมน้ำจั่ว

3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมน้ำจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



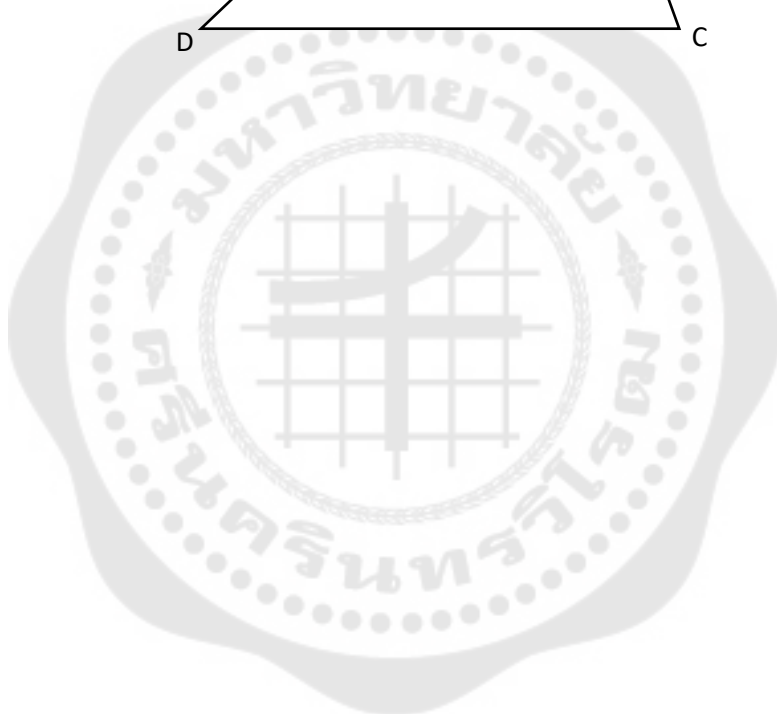
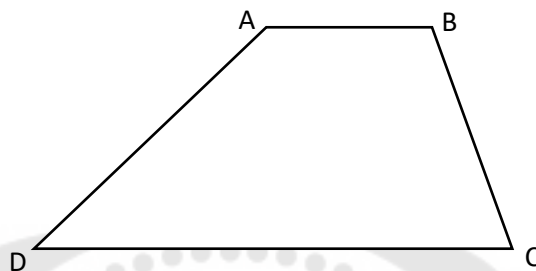
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



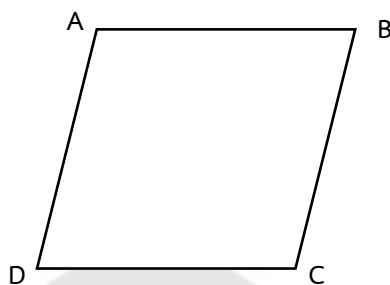
รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมน้ำจั่ว

ด้านการพิสูจน์

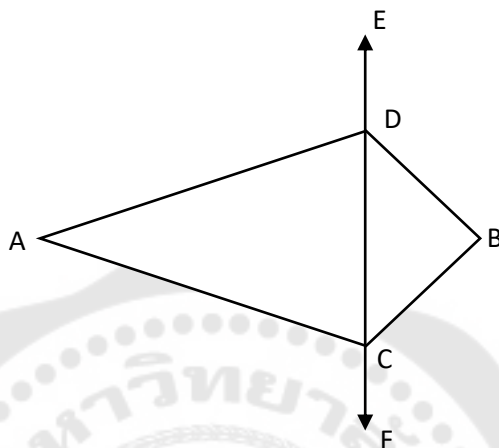
1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



2. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



3. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



ภาคผนวก ง

การวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

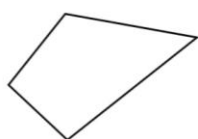
การวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

การวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแนวคิดของ Gutierrez และ Jaime เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 ด้าน ประกอบด้วย ด้านการตระหนักรูปร่าง ด้านบทนิยาม ด้านการจัดหมวดหมู่และด้านการพิสูจน์ และการสัมภาษณ์เชิงลึกแบบใช้งานปฏิบัติเป็นฐาน (Task base interview) ของนักเรียนเป้าหมายจำนวน 9 คน ประกอบด้วย นักเรียนที่เป็นตัวแทนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์สูงจำนวน 3 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ปานกลางจำนวน 3 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำจำนวน 3 คน ดังนี้

1. ผลการวิเคราะห์การวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มสูง
ด้านการตระหนักรูปร่าง

ข้อที่ 1 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

1. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม พร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

: รูปสี่เหลี่ยมคือรูปทรงทางเรขาคณิตที่มีด้าน 4 ด้านที่เป็นส่วนของเส้นตรง และมีมุม 4 มุม

- หมายเลข 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม

- หมายเลข 2 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะ ไม่สามารถนับได้ว่ามี 4 ด้าน

- หมายเลข 3 ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม เพราะ ไม่มีมุมหรือเส้นเหล่านั้นไม่ชนกัน

ภาพประกอบ 2 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 1 ของบันปัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า บัณฑิตพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” “การเป็นรูปปิด” และ “บทนิยาม” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2)

บทสัมภาษณ์ของบัณฑิต

ครู: สวัสดีครับ จะขออนุญาตสอบถามนะครับ ในแต่ละอัน ข้อที่ 1 แต่ละรูปเป็นสี่เหลี่ยมหรือไม่เป็น หนูใช้อะไรในการพิจารณา

นักเรียน: หนูใช้จากนิยามว่า รูปสี่เหลี่ยมเกิดจากส่วนของเส้นตรง 4 เส้นมาชนกันแล้วมีมุม 4 มุมภายในรูป

ครู: รูปที่ 1 แบบนี้เป็นไหมลูก ?

นักเรียน: เป็นค่ะ เพราะว่าเส้น 4 เส้น มุม 4 มุม

ครู: แล้วรูปที่ 2 ทำไมถึงไม่เป็น ?

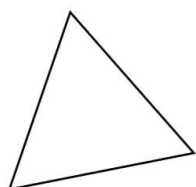
นักเรียน: หนูมองว่าไม่เป็นเพราะมันไม่สามารถนับด้านได้ ก็เลยไม่รู้ว่ามีมุมมันเป็นยังไง เพราะมุมมันจะ มน ๆ

ครู: แล้วอันที่ 3 ละลูก

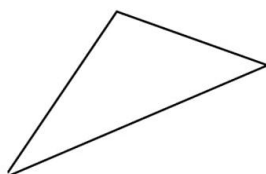
นักเรียน: อันนี้เส้นมันไม่ชนกัน ก็เลยไม่เกิดมุมค่ะ

ข้อที่ 2 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

2. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

: รูปสามเหลี่ยมคือรูปทรงทางเรขาคณิตที่มีด้าน 3 ด้านที่เป็นส่วนของเส้นตรง และมีมุม 3 มุม

- หมายเลข 1 เป็นรูปสามเหลี่ยม

- หมายเลข 2 ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม เพราะ เส้นไม่ชนกัน

- หมายเลข 3 ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม เพราะ มีด้าน 6 ด้าน และมีมุม 6 มุม

ภาพประกอบ 3 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 2 ของบันบัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า บันบันพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” “การเป็นรูปปิด” และ “บทนิยาม” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2)

บทสัมภาษณ์ของบันบัน

ครู: ข้อที่ 2 เราใช้หลักอะไรในการพิจารณาว่าแต่ละรูปเป็นสามเหลี่ยมหรือไม่เป็นสามเหลี่ยม ?

นักเรียน: หนูใช้คล้าย ๆ กับข้อที่แล้วเลยคะ ก็คือเป็นรูปที่มี 3 ด้านที่เกิดจากส่วนของเส้นตรง แล้วก็เกิดมุม 3 มุม

ครู: รูปที่ 1 เป็นไหมลูก ?

นักเรียน: เป็นค่ะ

ครู: รูปที่ 2 เป็นไหมลูก ?

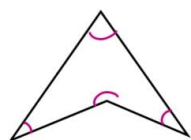
นักเรียน: ไม่เป็นค่ะ เพราะเส้นมันไม่ชนกัน

ครู: แล้วรูปที่ 3 ละลูก ?

นักเรียน: เพราะมันมีหยักขึ้นมาหน่อยนึง(ทำมือเป็นลักษณะสามเหลี่ยม) พอเรานับด้านมันจะได้ 6 ด้าน แล้วก็นับมุมก็นับได้ 6 มุม

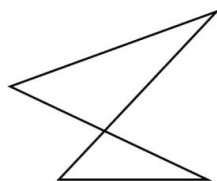
ข้อที่ 3 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

3. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่ใช้ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ



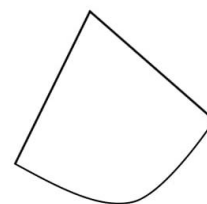
หมายเลข 1

เป็นรูป 4 เหลี่ยม เพราะ
ประกอบด้วยด้าน 4 ด้าน
ซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรง
และมุม 4 มุม



หมายเลข 2

เป็นรูปสามเหลี่ยม
2 รูป แต่ละรูป
ประกอบด้วยด้าน
3 ด้าน ซึ่งเป็นส่วนของ
เส้นตรง และ มุม 3 มุม



หมายเลข 3

ไม่ใช่ทั้งสองรูป เพราะ
มีด้านหนึ่งที่ไม่ใช่ส่วนของ
เส้นตรง

ภาพประกอบ 4 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 3 ของบันปัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า บันปันพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่ใช้ทั้งสองรูป โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” “ขนาดของมุม”

และ “บทนิยาม” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2) และพิจารณาจาก “ลักษณะของเส้น” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (RL 1)

บทสัมภาษณ์ของปิ่นปิ่น

ครู: แล้วอย่างข้อที่ 3 มันมีรูปปนกัน หนูมองภาพอย่างไรบ้างว่าอันไหนเป็น สามเหลี่ยมอันไหนเป็นสี่เหลี่ยม หรือไม่เป็น เช่นรูปที่ 1 ?

นักเรียน: รูปที่ 1 หนูมองเป็นสี่เหลี่ยมค่ะ เพราะมันมีด้าน 4 ด้าน มุมมันก็ 4 มุม เหมือนกัน(ทำมือเป็นลักษณะสามเหลี่ยม) อันนี้มันจะเกิน 180 องศา แต่หนูก็ถือว่าเป็น

ครู: แล้วอย่างรูปที่ 2 หนูมองภาพอย่างไรลูก ?

นักเรียน: หนูมองว่ามันเป็นสามเหลี่ยม 2 อันติดกันอยู่

ครู: แล้วอันที่ 3 ละลูก ?

นักเรียน: ไม่เป็นทั้งสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม เพราะมันมีด้านที่ไม่ได้เกิดจาก เส้นตรง แต่เกิดจากเส้นโค้ง

ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การใช้บทนิยามและการกำหนดบทนิยาม

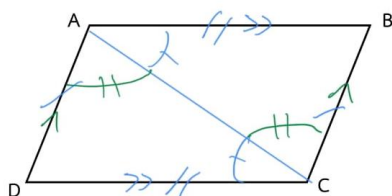
การใช้บทนิยาม

ข้อที่ 1 (ด้านการใช้บทนิยาม)

การใช้บทนิยาม

1. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



กำหนดให้ $AB = CD, BC = AD$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ ลาก $\overline{AC}$

เนื่องจาก $AD = BC$ (กำหนดให้)

และ $AB = CD$ (กำหนดให้)

และ $AC = AC$ (ตัวร่วม)

จะได้ $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ (สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ แบบ ด.ด.ด.)

และ $\angle DAC = \angle BCA$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ)

ดังนั้น $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เป็นสลับภายใน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

และ $\angle DAC = \angle BCA$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ)

ดังนั้น $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เป็นสลับภายใน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่)

ภาพประกอบ 5 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 1 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งร่วมกับมุมคู่ที่สมนัยกันในการแสดงว่าด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ แล้วจึงสรุปได้

อย่างสมเหตุสมผลว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยสอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้อย่างสมเหตุสมผลและเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: อันนี้ด้านตรงของเรามันจะยาวเท่ากัน แล้วเขาให้พิจารณาว่าอันนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไหม โดยบทนิยามของสี่เหลี่ยมด้านขนานเขาจะนิยามว่าด้านตรงข้ามมันขนานกัน ครูเห็นว่าเรามีการลากเส้นแบ่งด้วย ลากเส้นแบ่งเสร็จ แล้วเราพิสูจน์ว่าเป็นความเท่ากันทุกประการแบบด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วเราพิสูจน์ให้มันขนานกัน เราใช้อย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: ใช้มุมแย้งค่ะ

ครู: ก็คือสี่ฟ้ากับ ?

นักเรียน: สี่เขียวค่ะ

ครู: ก็คือสี่ฟ้าก็จะแย้งกับสี่ฟ้า ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ครู: พอมุมแย้งมันเท่ากันแล้วมันจะเป็นอย่างไร ?

นักเรียน: ด้านมันก็จะขนานกันค่ะ

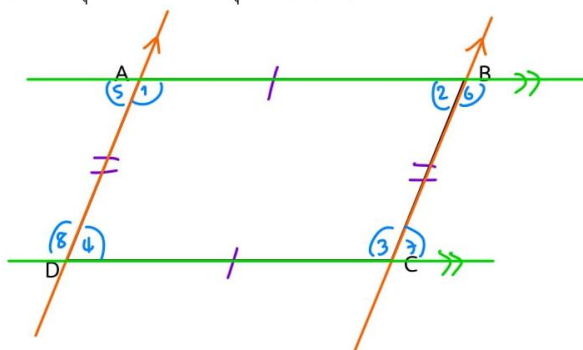
ครู: เป็นการให้ทฤษฎีบทเข้ามาช่วย ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ข้อที่ 1 (ด้านการใช้บทนิยาม) ที่ไม่เกิดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

1. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



กำหนดให้ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ และ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{2} = \hat{4}$

$\hat{5} = \hat{2}$; มุมภายใน - นอก ข้างซ้าย เกือบกันของเส้นตัด

$\hat{5} = \hat{4}$; มุมแย้ง

$\hat{2} = \hat{4}$; รวมข้อเท็จจริงที่กล่าว

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$

$\hat{1} = \hat{6}$; มุมภายใน - นอก ข้างซ้าย เกือบกันของเส้นตัด

$\hat{6} = \hat{3}$; มุมแย้ง

$\hat{1} = \hat{3}$; รวมข้อเท็จจริงที่กล่าว

$\therefore$ ได้เป็น เพราะรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แต่ไม่เท่ากันหัว 4 ด้าน

และมีมุมตรงข้ามเท่ากันแต่ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก (ทฤษฎีบท 22)

ภาพประกอบ 6 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 1 ของโพกัส

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า โพกัส พิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แต่ไม่เท่ากันทั้ง 4 ด้าน และมีมุมตรงข้ามเท่ากันแต่ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก โดยกำหนดให้ด้านที่อยู่ตรงข้ามกัน ขนานกันแล้วแสดงว่ามุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากันโดยนำสมบัติของเส้นขนานมาใช้ แต่พบว่ามีความเข้าใจผิดในสิ่งที่ต้องให้

เหตุผล ดังนี้ รูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ยังไม่สามารถเริ่มต้นด้วยการบอกได้ว่าด้านตรงข้ามขนานกันแต่กำหนดเพียงแค่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน สิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือการพิสูจน์ว่าด้านตรงข้ามขนานกัน แต่ในสิ่งที่ทำเป็นการพิสูจน์ว่ามุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน เนื่องจากเข้าใจโจทย์ผิดและจำบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานผิดแต่ในลักษณะการเขียนให้เหตุผลพบว่าการใช้ทฤษฎีบทของเส้นขนานและการต่อเส้นเพื่อให้เหตุผล จึงสรุปได้ว่านักเรียนไม่เกิดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตตามกรอบแนวคิดในข้อนี้

บทสัมภาษณ์ของโพกัส

- ครู: ข้อนี้เราจะให้รูปสี่เหลี่ยมมา แล้วบอกว่าให้ด้านที่มันยาวเท่ากันมา แล้วสี่เหลี่ยมที่เราให้มา มันจะถือว่าเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ เพราะอะไร ? แล้วเขาบอกว่าถ้าจะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานได้มันจะต้องมีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ อย่างนี้ที่เราให้เหตุผลมา หนูเริ่มจากอย่างไรก่อน ?
- นักเรียน: หนูกำหนดให้ AD ขนานกับ BC ก่อน แล้วก็ให้ AB ขนานกับ CD (ชี้ไปที่ด้าน AD BC AB และ CD) แล้วหนูไล่มุมตามเลขนี้ค่ะ 1 2 3 4 5 6 7 8 แล้วก็หนูจะพิสูจน์ให้ มุมตรงข้าม ข้างในของสี่เหลี่ยมด้านขนานมันต้องเท่ากันใช่ไหมคะ ? หนูก็จะพิสูจน์ให้มุมตรงข้ามมันเท่ากันก็คือพิสูจน์ว่ามุม 2 เท่ากับมุม 4 หนูก็จะพิสูจน์จากให้มันขนานกัน แล้วมันก็จะมีมุมภายนอก มุมภายใน ให้มุม 5 เท่ากับมุม 2 เพราะว่าเป็นมุม ภายในภายนอกบนข้างเดียวกันของเส้นตัด แปลว่า 2 มุมนี้ก็จะเท่ากัน มุม 5 เท่ากับมุม 4 เพราะว่าเป็นมุมแย้งค่ะ แล้วก็ให้มุม 2 เท่ากับมุม 4 เพราะว่าเป็นสมบัติการเท่ากันค่ะ ต่อมาก็พิสูจน์คล้าย ๆ เดิมเลยคะ พิสูจน์ให้มุม 1 เท่ากับมุม 3 ค่ะ ก็พิสูจน์จาก เอมุม 1 กับมุม 6 เท่ากัน เพราะว่าเป็นมุมภายใน ภายนอก บนข้างเดียวกันของเส้นตัด แล้วก็มุม 6 จะเท่ากับมุม 3 เพราะว่าเป็นมุมแย้ง แล้วก็ มุม 1 เท่ากับมุม 3 ค่ะ เพราะว่าเป็นสมบัติการเท่ากัน แล้วก็สรุปว่าเป็นคะ เพราะว่ารูปลี่เหลี่ยม

ด้านขนานมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แต่ไม่เท่ากันทั้ง 4 ด้าน และมีมุมตรง
ข้ามยาวเท่ากันแต่ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉากตามทฤษฎีบทที่ 22

ครู: แต่ข้อนี้จู้ ๆ เราสมมติว่ามันขนานเลยใช่ไหม ?

นักเรียน: (พยักหน้า) กำหนดค่ะ (ยิ้ม)

ครู: สมมติว่ามันขนานเลย แล้วตรงด้านที่มันเท่ากัน เราเอาไปใช้อย่างไร
บ้าง ?

นักเรียน: ด้านเท่ากัน หนูเขียนไม่ครบ แต่มันมีทฤษฎีที่บอกว่า ถ้าด้าน มุม อ้ออัน
นั้นมันสามเหลี่ยม อ้อ เขากำหนดให้ค่ะ ว่า $AB = CD$ แล้วก็ $BC = AD$ ก็
สรุปได้เลยว่ามีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน จากที่กำหนดให้

ครู: แล้วด้านตรงข้ามขนานกันอย่างไร ก็คือเรากำหนดขึ้นมาเลย ?

นักเรียน: ใช่ กำหนดขึ้นมาค่ะ

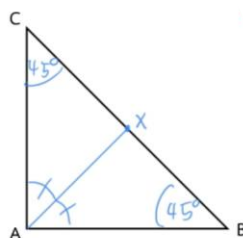
ครู: ก็คือถ้าเรากำหนดด้านตรงข้ามเราขนานกับปุ๊บ ก็เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน
เลยหรือลูก ?

นักเรียน: จากที่เขียนมาก็น่าจะใช่ค่ะ (หัวเราะ)

ข้อที่ 2 (ด้านการใช้บทนิยาม)

2. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านและมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{A}BC = \hat{A}CB = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



กำหนดให้ $\hat{A}BC = \hat{A}CB = 45^\circ$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว

พิสูจน์ ลาก AX ในแบ่งครึ่ง BC

เนื่องจาก $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ (กำหนดให้)

และ $B\hat{A}X = C\hat{A}X$ (กำหนดให้)

และ $AX = AX$ (ตัวร่วม)

จะได้ $\triangle ACX \cong \triangle ABX$ (สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ แบบ ม.ม.ด)

และ $AC = AB$ (ด้านคู่ที่สมนัยสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ)

ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (สามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน)

และ $45 + 45 + B\hat{A}C = 180^\circ$ (มุมภายในรวม $\triangle$)

ดังนั้น $B\hat{A}C = 90^\circ$ (จากสมการ)

ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(สามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านและมีมุมฉาก 1 มุม)

ภาพประกอบ 7 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 2 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยใช้การลากส่วนของเส้นตรงไปแบ่งครึ่งมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน เพื่อแสดงว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันมาใช้ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยม สิ่งที่เจเจกำหนดมาใช้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม เพื่อให้สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้อย่างสมเหตุสมผล และเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

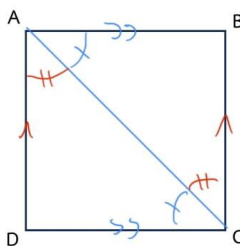
ครู: เราให้สามเหลี่ยมมา มันมีมุมเท่ากัน 2 มุม คือมุม B กับมุม C มุมละ 45 องศา แล้วข้อนี้ถ้าจะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วได้ มันจะต้องมีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม ทีนี้เรามองว่าอย่างไรดี เราจะพิสูจน์มุมฉากก่อนหรือเราจะพิสูจน์ด้านที่มันยาวเท่ากัน 2 ด้านก่อน ?

นักเรียน: หนูพิสูจน์เป็นสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป ค่ะ เป็นมุม - มุม - ด้าน ก็จะได้ว่า แขน AC กับ AB เท่ากัน ก็จะได้เป็นหน้าจั่ว แล้วหนูก็ไปดูต่อที่มุมภายในของสามเหลี่ยมที่เป็น 180 องศา เขาบอกมาให้ว่า มุม C มุม B มี 45 องศา หนูก็เข้าสมการ $45 + 45 + \text{มุม A}$ ที่เรายังไม่รู้ เท่ากับ 180 ก็จะได้ A เป็น 90 ค่ะ ก็คือมุมฉาก

ข้อที่ 3 (ด้านการใช้บทนิยาม)

3. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



กำหนดให้ $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
พิสูจน์ จาก $\overline{AC}$

เนื่องจาก $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (มุมแย้ง)

และ $AC = AC$ (ด้านร่วม)

และ $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$ (มุมแย้ง)

จะได้ $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ (สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ แบบ ม.ด.ม)

และ $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{ADC} + \widehat{BAD} = 360^\circ$ (มุมภายในสี่เหลี่ยม = 360°)

และ $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$ (กำหนดให้)

จะได้ $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ (สมบัติการเท่ากัน)

ดังนั้น $AD = BC$ (ด้านคู่ที่สมนัยสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ)

ดังนั้น $AB = DC$ (ด้านคู่ที่สมนัยสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ)

ดังนั้น $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

(รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก)

ภาพประกอบ 8 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 3 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปและแบ่งครึ่งมุม แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่เท่ากันทุกประการ มุม - ด้าน - มุม โดยนำนันทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมแย้งและสิ่งที่โจทย์กำหนดมาใช้ในการให้เหตุผล จึงได้ว่าด้านตรงข้ามมีความยาวเท่ากัน และใช้ผลรวม

มุมภายในรูปสี่เหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดงว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก เพื่อให้สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้ แต่การลงข้อสรุปว่าด้านทุกด้านมีความยาวเท่ากันยังขาดความสมเหตุสมผล เนื่องจากในขั้นตอนแรกของการพิสูจน์นักเรียนพิสูจน์ได้เพียงว่าด้านตรงข้ามมีความยาวเท่ากันแต่ไม่ได้แสดงว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันอย่างไร ซึ่งการพิสูจน์นี้เป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ขั้นต้น (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: ข้อนี้เกี่ยวกับสี่เหลี่ยมที่มุม 4 มุมมันเท่ากันหมดเลย แล้วด้านตรงข้ามขนานกัน แล้วถามว่าสี่เหลี่ยมนี้มันจะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสไหม ถ้าเป็นจัตุรัสแสดงว่าทุกด้านมันจะต้องยาวเท่ากันและมุมทุกมุมมันจะต้องเป็นมุมฉาก หนูเริ่มต้นจากการลากเส้น แล้วหลังจากนั้นหนูได้เป็นมุมแย้ง แล้วอย่างไรต่อ ?

นักเรียน: มุมแย้งมันก็จะมีความยาวเท่ากัน แล้วมันก็จะขนานกันค่ะ

ครู: ที่นี้รูปกับรูปล่างมันเท่ากันทุกประการเลยไหม ? (ชี้ไปที่สามเหลี่ยม ACB และสามเหลี่ยม CAD)

นักเรียน: เท่ากันทุกประการค่ะ เป็นแบบ มุม - ด้าน - มุม

ครู: แล้วอย่างไรต่อ แล้วเราจะได้ว่าด้านมันเป็นอย่างไกันบ้าง ?

นักเรียน: ด้านมันก็เท่ากัน จากด้านคู่ที่สมนัยกันค่ะ

ครู: ที่นี้มุม แต่มุมมันเท่ากันตรงมุมฉาก มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก หนูมองอย่างไร ?

นักเรียน: หนูมองว่ามุมแต่ละมุมที่หนูได้มาจากสามเหลี่ยมมันก็จะมีความยาวเท่ากัน ค่ะ พอเอามาวกกันก็จะเป็นเหมือนแบบ สมมติให้เป็นตัวแปร x ตัวนี้มันเหมือน $x + x + x + x$ 4 ตัว เท่ากับ 360 แล้ว x ตัวนี้ก็เท่ากับ 90 ก็ได้มุมแต่ละมุมเป็น 90

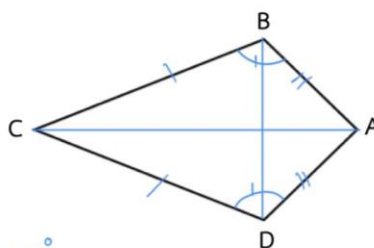
ครู: ดั่งนั้นมันก็เลยเป็นจัตุรัส ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

การกำหนดบทนิยาม

ข้อที่ 1 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



- คุณสมบัติ
1. มุมภายในรวม 360°
 2. ด้านที่ประชิดกันมีขนาดเท่ากัน
 3. เส้นทแยงมุมยาวไม่เท่ากัน แต่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน
 4. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
 5. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่
 6. มีแกนสมมาตร 1 แกน

ภาพประกอบ 9 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 1 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ ระบุสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวโดยพิจารณาจากการพิสูจน์อย่างง่ายและกำหนดบทนิยามที่มีความจำเป็นและเพียงพอ ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (FL3) และมีการพิจารณาจากสิ่งที่เรียนมาและการเชื่อมโยงกับสูตรการหาพื้นที่และมีการใช้การลากเส้น ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (FL2)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: ข้อนี้จะเป็นลักษณะของการที่หนูมองรูปสี่เหลี่ยมนี้แล้วหนูสามารถบอกสมบัติได้ อย่างเช่นการที่หนูบอกว่ามุมภายในของเรารวมกันได้ 360 องศา ด้านประชิดมีขนาดเท่ากัน แต่ละอันเราพิจารณาจากอย่างไรบ้าง เราใช้การวัด หรือเราใช้บทนิยามที่เราเคยรู้มา ?

นักเรียน: อย่างวาดก็ได้ค่ะว่า สามเหลี่ยมอันหนึ่งเป็น 180 ก็ได้เป็นสามเหลี่ยม 2 รูป ทำไมสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 ก็เกิดจากเส้นขนานค่ะ

ครู: อย่างด้านประชิดมีขนาดเท่ากัน เราดูจากสมบัติหรือเราวัด หรืออย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: ก็จากที่รู้มา ถ้าเกิดด้านประชิดมีขนาดเท่ากันแล้วเราแบ่งเส้นซิดกลางเรา ก็จะได้ว่าสามเหลี่ยม 2 รูปมันเท่ากัน ก็น่าจะเป็น ด้าน – ด้าน – ด้าน ถ้าด้านประชิดเท่ากันก็จะเป็น ด้าน ๆ หนึ่ง ด้าน ๆ หนึ่ง แล้วก็ด้านรวมที่เกิดจากการขีดเส้นอีกอันค่ะ

ครู: โดยรวมก็เหมือนเป็นการลากเส้นด้วยแล้วก็ ?

นักเรียน: ลากเส้นด้วย อาจจะมีคุณสมบัติที่รู้อยู่แล้วบ้าง

ครู: พิจารณาจากสิ่งที่รู้อยู่แล้วก็คือ 1 ลากเส้นก่อน แล้วก็ไปเชื่อมโยงกับสิ่งที่รู้พวกสมบัติที่รู้ ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

ครู: หนูมีจะเพิ่มเติมอะไรใน 6 ข้อนี้ไหม มีแกนสมมาตร 1 แกน มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันก็อัน ?

นักเรียน: เส้นเดียวค่ะ

ครู: เส้นทแยงมุมยาวไม่ยาวไม่เท่ากัน แต่ตั้งฉากกัน อันนี้ตั้งฉากกันเราจะด้วยสายตาหรือเราลองวัด หรืออย่างไร ?

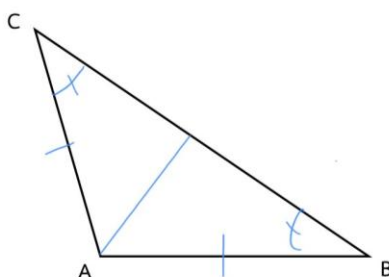
นักเรียน: ก็ประมาณว่ามันเป็นสี่เหลี่ยมที่สูตรมันเป็น $1/2 \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม ก็จะเป็นอันที่เส้นทแยงมุมมันฉากกัน

ครู: ก็คือดูจากสูตรการหาพื้นที่ ก็ดูว่าถ้ามีผลคูณของเส้นทแยงมุมก็แสดงว่าเส้นทแยงมุมมันตั้งฉากกัน

นักเรียน: ใช่ค่ะ (พยักหน้า)

ข้อที่ 2 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

2. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว



คุณสมบัติ 1. ประกอบด้วย มุมแหลม 2 มุม มุมป้าน 1 มุม
 2. มีผลรวมมุมภายในเท่ากับ 180°
 3. มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน
 4. มีมุมฐานขนาดเท่ากัน 1 คู่
 5. มีแกนสมมาตร 1 แกน

ภาพประกอบ 10 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 2 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ ระบุสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากการพิสูจน์อย่างง่ายและกำหนดบทนิยามที่มีความจำเป็นและเพียงพอ ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (FL3)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

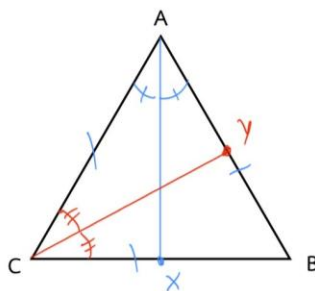
ครู: อย่างข้อ 2 อันนี้เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน เราพิจารณาอย่างไรบ้าง
 อย่างเช่นเป็นมุมแหลม 2 มุม มุมป้าน 1 มุม แล้วผลรวมมุมภายในรวมได้
 180 องศา มีความยาวด้าน 2 ด้านเท่ากันมุมที่ฐานขนาดเท่ากัน 1 คู่ มี
 แกนสมมาตร 1 แกน เราพิจารณาอย่างไรลูก เราใช้การลากเส้น การวัด
 หรือบทนิยาม ?

นักเรียน: ก็จะมีอย่างทีมุมที่ฐานเท่ากันก็จะมีจากการพิสูจน์ ส่วนด้านที่แขน 2 ข้าง
 ยาวเท่ากันก็จะเป็นสมบัติของหน้าจั่วอยู่แล้ว ส่วนถ้าจะพิสูจน์ว่ามุมที่
 ฐาน 2 มุมทำไมถึงเท่ากัน ขอคิดสดแปะนะคะ เป็นด้าน – มุม – ด้าน ค่ะ
 แบ่งครึ่งตรง A (ชี้ไปที่มุม A) สมมติลากเส้นให้มันแบ่งครึ่งมุม หนูก็จะได้
 ว่าด้านนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน AB และ AC) เพราะว่าเป็นหน้าจั่ว มุมนี้กับ
 มุมนี้เท่ากันเพราะหนูกำหนดให้ (ชี้ไปที่มุม A) และด้านตรงนี้เท่ากัน
 เพราะเป็นด้านร่วม (ชี้ไปที่ด้านที่ถูกลากเส้นเพิ่ม) หนูจะได้ว่า 2 อันนี้มัน
 เท่ากันทุกประการ เพราะฉะนั้นมุมนี้ที่เป็นมุมคู่ที่สมนัยกันก็จะมีขนาด
 เท่ากันด้วย (ชี้ไปที่มุม B และ D)

ข้อที่ 3 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

3. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



กำหนดให้ $AB = BC = AC$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

พิสูจน์ ลาก AX ในแนวดิ่ง BC

เนื่องจาก $AB = AC$ (กำหนดให้)

และ $\hat{B}AX = \hat{C}AX$ (กำหนดให้)

และ $AX = AX$ (ด้านร่วม)

จะได้ $\triangle BAX \cong \triangle CAX$ (สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ แบบ ด.ข.ด.)

ลาก CY ในแนวดิ่ง AB

เนื่องจาก $BC = AC$ (กำหนดให้)

และ $\hat{A}CY = \hat{B}CY$ (กำหนดให้)

และ $CY = CY$ (ด้านร่วม)

จะได้ $\triangle ACY \cong \triangle BCY$ (สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ แบบ ด.ข.ด.)

ดังนั้น $\hat{A} = \hat{B}$ (มุมที่สัมพันธ์กันของ $\triangle BAX \cong \triangle CAX$)

ดังนั้น $\hat{A} = \hat{C}$ (มุมที่สัมพันธ์กันของ $\triangle ACY \cong \triangle BCY$)

ดังนั้น $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ (สมบัติการเท่ากัน)

ภาพประกอบ 11 แสดงผลการทำนงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 3 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม โดยให้การลากเส้นแบ่งครึ่งมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วได้ว่ามุมคู่ที่สมนัยกัน มีขนาดเท่ากัน แล้วพิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีกครั้ง จึงได้ว่า $\hat{A}BC = \hat{A}CB = \hat{B}AC$ ซึ่งการพิสูจน์นี้เป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: อย่างข้อนี้ น่าสนใจมากเลย เป็นเหมือนเราให้สามเหลี่ยมด้านเท่ามาแล้ว ที่นี้บทนิยามข้างต้น เราอยากทราบว่า จากสามเหลี่ยมด้านเท่านี้ หนูมองอย่างไรว่ามุม 3 มุมมันจะเท่ากันไหม เพราะอะไรถึงเท่ากัน ถ้าบทนิยามของสามเหลี่ยมด้านเท่าคือเราให้มาว่า มีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน แต่เราจะพิสูจน์มุม จะพิสูจน์อย่างไรดี เพราะของเราที่ทำมา เหมือนมีการลากเส้นแบ่งก่อน หนูแบ่งครึ่งมุมไหม ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

ครู: แล้วหนูก็พิสูจน์ว่ามันเท่ากันทุกประการแบบด้าน - มุม - ด้าน แล้วหนูก็ได้มุมแต่ละมุมมา มุมที่ฐานก็เลยเท่ากัน ใช่ไหมลูก ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ (พยักหน้า)

ครู: แล้วพอเสร็จแล้ว พอมุมที่ฐานมันเท่ากัน หนูก็จะทำแบบนี้กับอีกเส้นหนึ่ง พอลากมาก็เหมือนกัน พอหนูได้มุมที่ฐานมาแล้ว มุม A กับมุม B เท่ากัน อันที่ 2 หนูได้ มุม B กับมุม C เท่ากัน ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ (พยักหน้า)

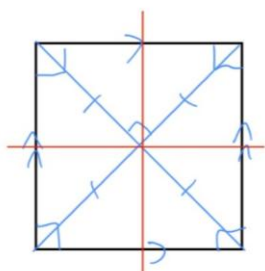
ครู: แล้วก็เชื่อมโยงกันว่า A B C มันเท่ากันเลย ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ สมบัติการเท่ากัน

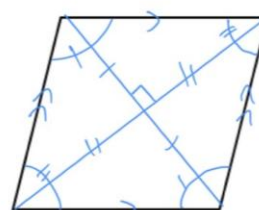
ด้านการจัดหมวดหมู่

ข้อที่ 1 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

- กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้
 - จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 - จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 - จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

- ① สมบัติทั้งหมดยกเว้น 2 สมบัติ
 - ↳ มีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่
 - ↳ มีด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน
 - ↳ เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก
 - ↳ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
- ② สมบัติทั้งหมดยกเว้น 2 สมบัติในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 - ↳ มุม 4 มุมมีขนาดเท่ากัน มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
 - ↳ เส้นทแยงมุมมีขนาดเท่ากัน
 - ↳ มีแกนสมมาตร 4 แกน
- ③ สมบัติทั้งหมดยกเว้น 2 สมบัติในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 - ↳ มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน 2 คู่
 - ↳ เส้นทแยงมุมมีขนาดไม่เท่ากัน
 - ↳ มีแกนสมมาตร 2 แกน

ภาพประกอบ 12 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 1 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยพิจารณาจาก “การพับรูป” “การลากเส้น” และสมบัติที่เคยเรียนรู้มา ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตใน

ระดับที่ 2 (CL2) ทำให้ได้ "สมบัติที่จำเป็นและเพียงพอ" ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น (CL3)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: ครูให้จัดรูปกับเปียกปูนมา หนูมองเห็นไหมว่าอะไรที่มันเป็นสมบัติที่เหมือนกัน หนูพิจารณาสิ่งที่มันเหมือนกันอย่างไรบ้าง หนูมองจากตรงไหน อย่างเช่นด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ อันนี้เราวัดหรือจ๋า มา ?

นักเรียน: มันก็เป็นสมบัติอยู่แล้วนะคะ

ครู: แล้วก็ด้านยาวเท่ากัน 4 ด้าน เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉากและเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันแล้วตรงนี้ก็เหมือนเป็นสมบัติที่รู้กันมา ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

ครู: ที่นี้ข้อที่ 2 มันมีสมบัติของจัตุรัสอย่างเดียวมันมีแกนสมมาตร 4 แกน เส้นทแยงมุมมีขนาดเท่ากัน มุม 4 มุมมีขนาดเท่ากัน มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก อันนี้ก็ดูจากสมบัติใหม่ หรือเรามีการลากเส้นเพิ่มหรือเรามีการพับรูปหรืออย่างไรไหม ?

นักเรียน: ถ้าการพับรูปก็จะเป็นของแกนสมมาตร พับสนิทก็จะได้ 4 แกน

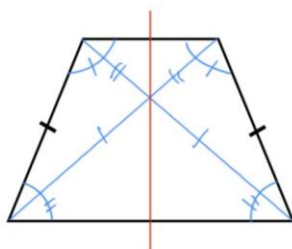
ครู: แล้วอย่างอันที่ 3 เปียกปูนอันนี้ก็คือเหมือนกันไหม ?

นักเรียน: เปียกปูนได้แกนสมมาตร 2 แกน พับรูปเอา

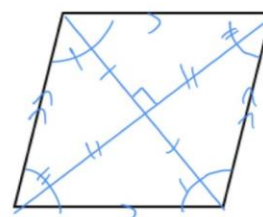
ข้อที่ 2 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

2. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

- ① สมบัติทั้งหมดที่เหมือนกัน
 ↳ มีมุมที่ขนาดเท่ากัน 2 คู่
- ② สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู (เน้นว่า)
 ↳ มีเส้นทแยงมุมขนาดเท่ากัน 1 คู่
 ↳ เส้นทแยงมุมไม่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
 ↳ เส้นทแยงมุมตัดกันไม่เป็นมุมฉาก
 ↳ มีด้านขนานกัน 1 คู่
 ↳ มีด้านที่ขนานกัน 1 คู่
 ↳ มีแกนสมมาตร 1 แกน
- ③ สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 ↳ มีเส้นทแยงมุมขนาดไม่เท่ากัน
 ↳ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
 ↳ เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก
 ↳ มีด้านขนานกัน 2 คู่
 ↳ มีด้านทุกด้านขนานเท่ากัน
 ↳ มีแกนสมมาตร 2 แกน

ภาพประกอบ 13 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูป
 สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 2 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยพิจารณาจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (CL1) พิจารณาจาก “การลากเส้น” “ทฤษฎีบท” และสมบัติที่เคยเรียนรู้อยู่มา ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (CL2) ทำให้ได้ “สมบัติที่จำเป็นและเพียงพอ” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น (CL3)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: ข้อนี้เป็นคางหมูกับเปียกปูน สิ่งที่เหมือนกันของทั้งคู่คืออะไร อย่างที่เราได้มาว่า มันมีมุมมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ หนูมองภาพอย่างไร ?

นักเรียน: อย่างรูปที่ให้มา เปียกปูนมีมุมที่มีขนาดเท่ากัน 2 คู่อยู่แล้ว ส่วนคางหมูมันมีเส้นที่อาจารย์กำหนดมาให้อยู่แล้ว (ชี้ไปที่ด้านที่ถูกระบุว่าเท่ากัน 2 ด้านในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู) น่าจะเป็นคางหมูหน้าจั่ว หนูก็เลยคิดว่าถ้าเป็นคางหมูหน้าจั่วก็เลยมุมสองมุมนี้ที่เท่ากัน (ชี้ไปที่มุมคู่ด้านบนของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู)

ครู: ก็คือมีการลากเส้นด้วย ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ ลากเส้น

ครู: แล้วสมบัติที่มีในคางหมูอย่างเดียว ที่เรามองภาพว่าเป็นคางหมูหน้าจั่ว บอกว่า เส้นทแยงมุมมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ อันนี้เส้นทแยงมุมเท่ากัน ?

นักเรียน: ค่ะ

ครู: แล้วมันก็ไม่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันด้วย อันนี้เรามองภาพ มาจากการลากเส้น หรือเป็นสมบัติที่เราจำอยู่แล้ว ?

นักเรียน: ก็มีลากเส้นบ้าง แล้วก็มองรูปบ้าง อย่างเช่น ที่รู้ว่ามันด้านคู่หนึ่งที่ขนานกันก็มองด้วยตาเพราะเป็นเรื่องที่จำอยู่แล้วค่ะ

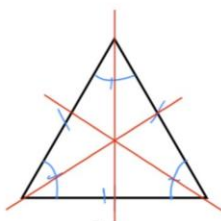
ครู: แสดงว่าบางอย่างมันก็มาจากพหุคูณหรือสมบัติที่เราเคยเรียนมาแล้ว
ใช่ไหม ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

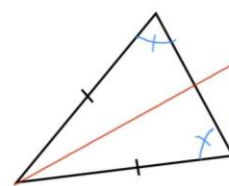
ข้อที่ 3 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

3. กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

- ① สมบัติทั้งหมดที่เหมือนกัน
 - ↳ มุมภายใน = 180°
 - ↳ มีมุม 3 มุม ด้าน 3 ด้าน
- ② สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
 - ↳ มีด้าน 3 ด้านเท่ากัน
 - ↳ มีมุม 3 มุมขนาดเท่ากัน = 60°
 - ↳ มีแกนสมมาตร 3 แกน
- ③ สมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 - ↳ มีด้าน 2 ด้านเท่ากัน
 - ↳ มีมุมที่ฐานขนาดเท่ากัน 2 มุม
 - ↳ มีแกนสมมาตร 1 แกน

ภาพประกอบ 14 แสดงผลการทำนปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูป
สามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 3 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกัน เกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจาก “การพับรูป” และ สมบัติที่เคยเรียนรู้มา ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (CL2) ทำให้ได้ “สมบัติที่จำเป็นและเพียงพอ” และ “พิสูจน์อย่างง่าย” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (CL3)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: สามเหลี่ยมด้านเท่าที่มันเหมือนกันกับมุมแหลมหน้าจั่ว หนูพิจารณาโดยที่หนูลากเส้น หรืออย่างไร ในสิ่งที่มันเหมือนกัน เช่น มุมภายในของรูป อันนี้ น่าจะเป็นทฤษฎีหรือบทนิยามที่เราารู้อยู่แล้ว ?

นักเรียน: มุมภายใน เหมือนมันมีวิธีพิสูจน์ คือหนูพิสูจน์แล้วหนูจำได้ ก็เลยเอามาใช้เลยค่ะ

ครู: แล้วถ้าเกิดในสามเหลี่ยมด้านเท่าอย่างเดียว มีด้าน 3 ด้านยาวเท่ากัน มุม 3 มุมมีขนาดเท่ากัน มีแกนสมมาตร 3 แกน แต่ละอันมาจากการที่เราพิจารณาอย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: อย่างด้าน 3 ด้านเท่ากัน มุม 3 มุมมีขนาดเท่ากัน เราก็เคยพิสูจน์ไปแล้ว รอบนี้ จากข้อด้านบนที่เป็นนิยามที่เขาให้มา ส่วนมุมเราก็ได้พิสูจน์ไปแล้ว แกนสมมาตรเราพับเขาก็ได้

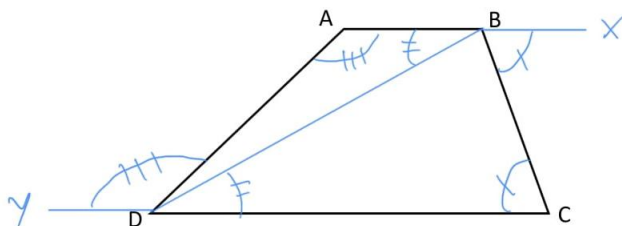
ครู: แล้วสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วล่ะลูก ?

นักเรียน: อันนี้มีด้านที่เท่ากัน ที่เป็นด้านประกอบ เป็นคุณสมบัติที่เราารู้อยู่แล้ว ส่วนมุมก็จะเป็นผลมาจากการพิสูจน์ที่ผ่านมาก็ได้ แกนสมมาตรก็พับเขาก็ได้

ด้านการพิสูจน์

ข้อที่ 1 (ด้านการพิสูจน์)

1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็น $\square$ คางหมู
 ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$
 พิสูจน์ จาก BD
 เนื่องจาก $\angle BCD + \angle CDB + \angle CBD = 180^\circ$ (ผลรวมมุมภายในสามเหลี่ยม = 180°)
 และ $\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB = 180^\circ$ (ผลรวมมุมภายในสามเหลี่ยม = 180°)
 จะได้ $(\angle BCD + \angle CDB + \angle CBD) + (\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB) = 360^\circ$ (สมบัติการเท่ากัน)
 $(\angle BCD + \angle ABD) + \angle CDB + (\angle CBD + \angle BDA) + \angle DAB = 360^\circ$
 ดังนั้น $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็น $\square$ คางหมู
 ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$
 พิสูจน์ จาก BD , ต่อเส้น AX, CY
 เนื่องจาก $AX \parallel CY$ (เส้นเชื่อมด้านขนานมีด้านตรงข้ามที่ขนานกัน 1 คู่)
 และ $\angle ABD = \angle CBD$ (มุมแย้ง)
 และ $\angle BCD = \angle BCX$ (มุมแย้ง)
 และ $\angle DAB = \angle ADY$ (มุมแย้ง)
 และ $\angle ABD + \angle BDC + \angle BCX = 180^\circ$ (มุมตรง)
 จะได้ $\angle ABD + \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ$ (สมบัติการเท่ากัน)
 และ $\angle CDB + \angle BDA + \angle ADY = 180^\circ$ (มุมตรง)
 จะได้ $\angle CDB + \angle BDA + \angle DAB = 180^\circ$ (สมบัติการเท่ากัน)
 ดังนั้น $(\angle ABD + \angle BDC) + (\angle BCD) + (\angle CDB + \angle BDA) + (\angle DAB) = 180 + 180$
 ดังนั้น $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

ภาพประกอบ 15 แสดงผลการทำนงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 1 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยแบ่งออกเป็น 2 วิธีได้แก่ วิธีที่ 1 เป็นการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละรูป โดยนำทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมาใช้ในการให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (PL3) วิธีที่ 2 เป็นการต่อเส้นขนานเพื่อใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับที่เกี่ยวกับมุมแย้งและมุมตรงในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเป็น 360 องศาได้อย่างสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: ข้อนี้หนูมองผลรวมมุมภายในได้ 360 องศา อันนี้เป็นการพิสูจน์มาให้ 2 แบบเลย ?

นักเรียน: หนูชอบแบบอันล่างมากกว่า (แบบที่ 2) แต่หนูไม่อยากลบอันบน หนูก็เลยใส่มาด้วยค่ะ

ครู: อันบนคืออะไรคะ หนูแบ่งรูป ?

นักเรียน: แบ่งรูปเป็น สามเหลี่ยม 2 อัน

ครู: อันละ 180 แล้วบวกกัน ?

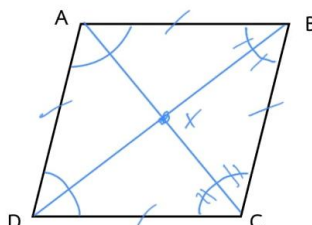
นักเรียน: ใช่ค่ะ

ครู: ส่วนอันล่างก็คือเป็นการต่อเส้นแล้วก็หามุมแย้งใช่ไหมลูก ?

นักเรียน: ค่ะ หามุมแย้ง เอมุมุมแย้งที่ได้แล้วก็ ออกมาในรูปของมุมตรง มุมตรงก็เป็น 180 องศาแล้ว พอมุมตรง 2 อันก็เป็น 360 ค่ะ

ข้อที่ 2 (ด้านการพิสูจน์)

2. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูป $\square$ ขนมเปียกปูน

ต้องการพิสูจน์ว่า $AX = CX$, $BX = DX$

พิสูจน์ ลาก $\overline{AC}$ ใน $\triangle ABC$

เนื่องจาก $AB = BC$ (สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านทุกด้านยาวเท่ากัน)

และ $\angle BAX = \angle BCX$ (กำหนดให้)

และ $BX = BX$ (ด้านร่วม)

จะได้ $\triangle ABX \cong \triangle CBX$ (สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ แบบ ด.ข.ด.)

ดังนั้น $AX = CX$ (สมมติสมนัยของ $\triangle ABX \cong \triangle CBX$)

ลาก $\overline{AC}$ ใน $\triangle BCD$

เนื่องจาก $BC = CD$ (สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนด้านทุกด้านยาวเท่ากัน)

และ $\angle CBX = \angle CDX$ (กำหนดให้)

และ $CX = CX$ (ด้านร่วม)

จะได้ $\triangle BCX \cong \triangle DCX$ (สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ แบบ ด.ข.ด.)

ดังนั้น $BX = DX$ (สมมติสมนัยของ $\triangle BCX \cong \triangle DCX$)

ภาพประกอบ 16 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 2 ของเจเจ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เจเจ พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็น 4 รูป แล้วนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมาใช้ในการให้เหตุผล เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับรูปสามเหลี่ยมอีก 2 รูป จึงทำให้ทราบว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกัน ซึ่งเป็นการให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล มีการพิสูจน์หลายขั้นตอน และแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

บทสัมภาษณ์ของเจเจ

ครู: ส่วนข้อ 2 นี้เป็นเหมือนกับว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มันแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แล้วเราเริ่มต้นอย่างไรบ้าง เราลากเส้นทแยงมุมใหม่ หรือเราแบ่งครึ่งมุมเลย ?

นักเรียน: ลากเส้นให้แบ่งครึ่งมุมเลย

ครู: แล้วเป็นอย่างไร พอแบ่งครึ่งมุม ?

นักเรียน: เราก็กำหนดให้ว่า สมมติเราลากเส้นให้มันแบ่งครึ่งมุม เราก็จะได้ว่ามุมที่มันมีขนาดเท่ากัน แล้วหนูก็เอามันมาพิสูจน์เป็น ด้าน - มุม - ด้าน ค่ะ

ครู: ก็คือ พอเราลากเส้น ได้ตรงส่วนที่มันเท่ากัน แล้วเราก็เอาไปทำให้มันเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ครู: พอมันเท่ากันแล้วด้านที่เหลือมันก็จะเท่ากัน ?

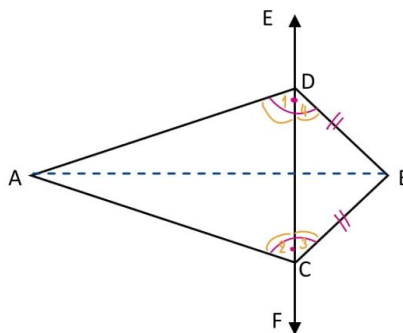
นักเรียน: ด้านที่สมนัยกันค่ะ

ครู: มันก็เลยกลายเป็นว่า เส้นทแยงมุมมันก็เลยแบ่งครึ่งกันใช่ไหมลูก ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ข้อที่ 3 (ด้านการพิสูจน์)

3. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



• $\triangle CBD$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $\overline{BD} = \overline{BC}$ (กำหนดให้)

$$\therefore \hat{3} = \hat{4}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} \text{ (กำหนดให้)} \quad \hat{1} + \hat{4} = \hat{2} + \hat{3}$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{1} = \hat{2}$$

• มุมบนเส้นตรง = 180°

$\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D (กำหนดให้) $\therefore C$ และ D อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

$$\widehat{ADE} = 180^\circ - \hat{1}$$

$$\widehat{ACF} = 180^\circ - \hat{2}$$

$$\hat{1} = \hat{2}$$

$$\therefore \widehat{ADE} = \widehat{ACF} \quad \#$$

ภาพประกอบ 17 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 3 ของบันบัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า บันบัน พิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ โดยการนำนิยามที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาให้ร่วมกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วจะได้ว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากันจากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วแสดงว่ามุมที่ต้องการพิสูจน์มีขนาดเท่ากัน โดยนำมุมที่กำหนดให้ซึ่งอยู่บน

เส้นตรงและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับมุมตรงมาใช้ในการให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล มีการพิสูจน์หลายขั้นตอน ซึ่งถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

บทสัมภาษณ์ของปิ่นปิ่น

ครู: เราเริ่มจากอย่างไรก่อนนะลูก ?

นักเรียน: หนูเริ่มจาก เขาบอกว่า มี $BC = BD$ (ลากเส้น BC และ BD) ให้ตรงนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ครู: เพราะมีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

ครู: มองว่าเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วปั๊บ เราก็จะได้มุม 3 กับมุม 4 เท่ากันแสดงว่าหนูใช้บทนิยามเข้ามาช่วย ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

ครู: แล้วหนูก็ไปพิสูจน์มุมที่เราต้องการอย่างไรลูก ?

นักเรียน: หนูก็ไปแสดงว่ามุม 1 และมุม 2 มีขนาดเท่ากันจากมุมที่เรากำหนดมาให้ แล้วก็ใช้สมบัติของมุมตรงมาใช้ในการพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$

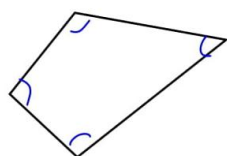
2. ผลการวิเคราะห์การวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มปานกลาง

ด้านการตระหนักรูปร่าง

ข้อที่ 1 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

ด้านการตระหนักรูปร่าง

1. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม พร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

หมายเลข 1 : เป็นสี่เหลี่ยม เนื่องจากมีมุมภายใน 4 มุม ดัง 4 ด้าน

หมายเลข 2 : ไม่เป็นสี่เหลี่ยม เพราะ ไม่สามารถนับได้ว่ามีกี่ด้าน เนื่องจากเป็นเส้นโค้ง

หมายเลข 3 : ไม่เป็นสี่เหลี่ยม เพราะ ไม่มีส่วนประกอบของมุมและด้าน

ภาพประกอบ 18 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 1 ของอิงค์

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า อิงค์พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” “การเป็นรูปปิด” “ผลรวมมุมภายใน” และ “บทนิยาม” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2)

บทสัมภาษณ์ของอิงค์

ครู: ข้อที่ 1 การที่หนูมองว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมหนูมองยังไงลูก

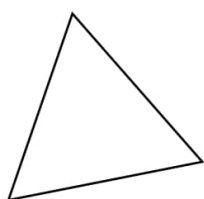
นักเรียน: จากที่หนูดูตอนแรกถ้าแบบมองโดยรวมมันก็จะคล้าย ๆ สี่เหลี่ยม (ทำมือในเป็นสี่เหลี่ยม) แต่พอไปดูแล้วมันจะมีมุม เช่น หมายเลข 1 เส้นทุกเส้นจะตัดกันเป็นมุมหมดเลย (ทำมือเป็นรูปมุม) พอไปดูก็จะได้มุมทั้งหมด 4 มุม ส่วนหมายเลข 2 ก็มีความคล้ายคล้ายค้ำค้ำว่าจะเป็นสี่เหลี่ยม แต่พอไปดู ตรงมุมมันก็จะเป็นส่วนโค้ง (ทำมือเป็นรูปส่วนโค้ง) มันก็เลยไม่นับเป็นมุม ส่วนหมายเลข 3 เส้นมันไม่โดนกันเลย ก็ดูแล้วว่าไม่ใช่

ครู: แล้วเห็นว่ามีเขียนเกี่ยวกับด้าน คืออย่างไรบ้างลูก ?

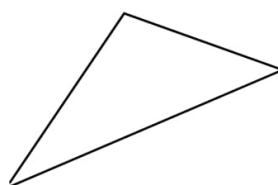
นักเรียน: หนูไปดูบทนิยามของสี่เหลี่ยม ก็คือจะมีด้านทั้งหมด 4 ด้าน มีมุมทั้งหมด 4 มุม ภายในรูปสี่เหลี่ยมมีมุมรวมกันได้ 360 องศา

ข้อที่ 2 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

2. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

หมายเลข 1 ใช่ เพราะ มันมีมุม 3 มุมด้าน มุมรวมได้ 180°
 หมายเลข 2 ใช่ เพราะ มันมี 3 มุม
 หมายเลข 3 ไม่ใช่ มันมีมุม 3 มุม แต่ด้านมันไม่ครบ มุมรวม $\neq 180^\circ$

ภาพประกอบ 19 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 2 ของได้

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า โต พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือไม่ เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” “การเป็นรูปปิด” และ “สมบัติ” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2)

บทสัมภาษณ์ของโต

ครู: อันนี้จะคล้าย ๆ กับข้อเมื่อกี้ เป็นการที่เราดูรูปสามเหลี่ยม 3 รูป 3 หมายเลข แล้วให้เราบอกว่า เป็นสามเหลี่ยมหรือไม่เป็นสามเหลี่ยม เพราะอะไร ซึ่งหนูตอบมาว่าหมายเลข 1 เป็น เพราะมีด้าน 3 ด้าน มีมุม 3 มุม มุมรวมได้ 180 องศา ทำไมเราถึงเลือกให้เหตุผลนี้ ?

นักเรียน: เพราะว่าสมบัติของ รูปสามเหลี่ยม

ครู: เป็นสมบัติของรูปสามเหลี่ยม เรายังไปที่สมบัติเลย ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

ครู: แล้วส่วนหมายเลข 2 ที่เราบอกว่าไม่เป็นเพราะมุมไม่ถึง 3 มุมคืออย่างไร ?

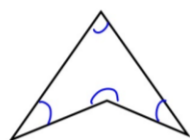
นักเรียน: มันเปิดไปฝั่งนึง (ชี้ไปที่ฝั่งเปิด)

ครู: ส่วนหมายเลข 3 มันไม่เป็น เพราะว่า มีมุมมากกว่า 3 และด้านมากกว่า 3 มุมรวมกับไม่เท่ากับ 180 องศา ทำไมเราถึงเลือกให้เหตุผลนี้ ?

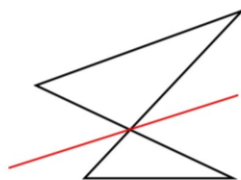
นักเรียน: เพราะมีด้าน 1 2 3 4 5 6 ด้าน (ชี้ไปที่ด้านของรูปหมายเลข 3) แล้วก็มุม 6 มุม

ข้อที่ 3 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

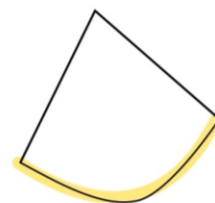
3. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่ใช้ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

หมายเลข 1 : เป็นรูป $\square$ เพราะประกอบด้วย 4 ด้าน และ 4 มุม

หมายเลข 2 : เป็นรูป Δ เพราะเมื่อแบ่งครึ่งจากที่รูป Δ 2 รูป จึงได้รูปที่มี 3 ด้าน และ 3 มุม

หมายเลข 3 : ไม่ใช่ทั้งสองรูป เพราะทั้งสามด้านไม่เท่ากัน และมุมไม่เท่ากัน

ภาพประกอบ 20 แสดงผลการทำนงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 3 ของอิงค์

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า อิงค์ พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่ใช้ทั้งสองรูป โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” และ “จำนวนด้าน” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2) และพิจารณาจาก “ลักษณะของเส้น” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (RL 1)

บทสัมภาษณ์ของอิงค์

ครู: อันนี้ให้เรามองรูปไหนเป็นรูปสามเหลี่ยม รูปไหนเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือไม่ใช้ทั้งสองอัน หนูมองภาพอย่างไรดี ?

นักเรียน: ตอนแรกหนูคิดว่าถ้าเราลองลากเส้นมันจะได้เป็นสามเหลี่ยม 2 รูปหรือเปล่า แต่แบบลองดูที่มุมก่อนก็เลยได้ว่ารูปแรกดูแล้วพิจารณาได้ว่าเป็น

สี่เหลี่ยม เพราะว่ามีมุมข้างในได้ทั้งหมด 4 มุม แล้วก็มีด้านทั้งหมด 4 ด้าน

ครู: แล้วอย่างข้อ 2 เราลองว่าเป็นแบ่งครึ่ง คือ เหมือนมี 3 เหลี่ยม 2 รูปใช่ไหม ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ ก็คือ ตอนแรกก็เห็นเป็นเหมือนสามเหลี่ยม 2 อันที่ไม่เท่ากันในการแบ่ง แต่พอลองตัดด้วยเส้นสีแดง จะได้เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่แยกออกจากกัน

ครู: แล้วข้อ 3 ก็คือ ?

นักเรียน: ข้อสามตอนแรกก็แบบ ใช่สามเหลี่ยมเหลี่ยมหรือเปล่า แต่มันก็มีส่วนโค้งที่ปลายด้วย (วาดนิ้วเป็นส่วนโค้ง) ก็เลยไม่ใช่ทั้งคู่

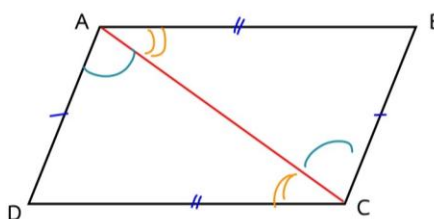
ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การใช้บทนิยามและการกำหนดบทนิยาม

การใช้บทนิยาม

ข้อที่ 1 (ด้านการใช้บทนิยาม)

1. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



ลาก $\overline{AC}$

$AB = CD, BC = AD$; กำหนดให้

$\angle BAC = \angle DCA$; ด้านร่วม

จึงได้ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (จ.ก.ก.)

∴ $\angle BCA = \angle DAC$ และ $\angle BAC = \angle DCA$

; มุมคู่ที่สมทบกันหรือมุมสลับที่เท่ากัน
ทุกประการ จึงมีขนานต่อกัน

∴ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

; เส้นตรงขนานแบ่งตัดเส้นตรงคู่ขนาน

ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงจะขนานกัน

แสดงว่า $\square ABCD$ เป็นรูป $\square$ ด้านขนาน เพราะมีด้านขนานกัน 2 คู่ #

ภาพประกอบ 21 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 1 ของอิงค์

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม อิงค์ บันปันพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วใช้สมบัติที่เกี่ยวข้องกับเส้น

ขนานและมุมแย้งร่วมกับมุมคู่ที่สมนัยกันในการแสดงว่าด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ แล้วจึงสรุปได้อย่างสมเหตุสมผลว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยสอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้อย่างสมเหตุสมผลและเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของอิงค์

ครู: อันนี้เป็นการมองภาพว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไหมแต่เขาจะให้แค่ว่าด้านตรงข้ามมันยาวเท่ากัน จากบทนิยามของสี่เหลี่ยมด้านขนานก็คือเป็นรูปที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ หนูพิสูจน์อย่างไรบ้างนะลูก เริ่มต้นจากหนูลากเส้นก่อนไหมลูก ?

นักเรียน: ใช่ค่ะหนูลากเส้น

ครู: แล้วเราพิสูจน์ว่ามันเท่ากันทุกประการแบบไหนลูก

นักเรียน: เป็น ด้าน - ด้าน - ด้าน ค่ะ

ครู: หลังจากนั้นเราได้อะไรมาต่อ ?

นักเรียน: เราจะได้ว่ามุมภายในมีขนาดเท่ากัน ก็คือมุมแย้งของมันจะมีขนาดเท่ากัน

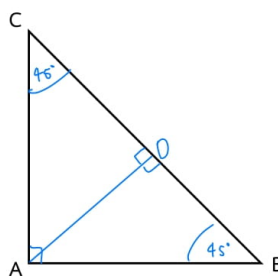
ครู: หนูดูแค่มุมแย้งใช่ไหมลูกในการสรุป

นักเรียน: ใช่ค่ะ แล้วก็ได้ว่ามันมีความเท่ากันทุกประการ แล้วก็เลยสรุปได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมนี้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ข้อที่ 2 (ด้านการใช้บทนิยาม)

2. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านและมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\angle B = \angle C = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



กำหนด $\angle B = \angle C = 45^\circ$ จ्ञน รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วได้ 1 มุม จ्ञน ได้ $\angle B + \angle C + \angle A = 180^\circ$ $45^\circ + 45^\circ + \angle A = 180^\circ$ $\angle A = 90^\circ$	จ्ञน $AD \perp BC$ นึนจึน $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ $\angle B = \angle C = 45^\circ$; กึนจึนได้ $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$; จ्ञน $AD \perp BC$ $AD = AD$; ด้านจึน $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ จึนจึน มุม-มุม-ด้าน จ्ञน ได้ $AB = AC$
--	---

$\therefore \triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว เพราะ 2 ด้านยาวเท่ากัน และมี 1 มุมฉาก

ภาพประกอบ 22 แสดงผลการท้งานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 1 ของได้

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า ได้พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยใช้การลากส่วนของเส้นตรงไปแบ่งครึ่งมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน เพื่อแสดงว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันมาใช้ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยม สิ่งที่โจทย์กำหนดมาใช้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม เพื่อให้สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้อย่างสมเหตุสมผล และเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของโต

ครู: อันนี้เกี่ยวกับการที่เรามของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเขาให้มาว่าแต่ละมุมเป็นมุมละ 45 องศา (ชี้ไปที่มุม B และมุม C) แล้วเราบอกว่สามเหลี่ยม ABC นั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าใหม่ ซึ่งการจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วได้ ก็จะต้องอ้างอิงบทนิยามที่บอกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วก็คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุมฉาก 1 มุม แล้วเราให้เหตุอย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: หามุม A ว่ามันได้ 90 หรือเปล่า แล้วจากนั้นก็ลากเส้น AD ให้เป็นเส้นตั้งฉาก เพื่อหาว่า AB เท่ากับ AC ไหม

ครู: แล้วเรารู้ได้อย่างไรว่าผลรวมมุมภายในต้องได้เป็น 180 องศา ?

นักเรียน: สมบัติของรูปสามเหลี่ยม

ครู: แล้วมีทฤษฎีอะไรไหม ที่บอกเกี่ยวกับว่ามุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา ?

นักเรียน: เคยวัดครับ (ยิ้ม)

ครู: แล้วที่เราพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการ เราบอกว่ามันเท่ากันทุกประการแบบมุม - มุม - ด้าน ทำไมมันถึงเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน ?

นักเรียน: เพราะว่าเขาให้มุม B กับ C (ชี้ไปที่มุม B และมุม C) ซึ่งเท่ากับ 45 แล้วที่เราลากเส้นมาตั้งฉากจะได้มุม ADC กับมุม ADB เท่ากันคือ 90 องศา แล้วอันนี้ AD เป็นด้านร่วม (ชี้เส้นไปที่ด้าน AD) ก็เลยเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน

ครู: แล้วตรง AC กับ AD ที่มันเท่ากัน เหตุผลเพราะมันเป็นอะไรลูก ?

นักเรียน: เพราะมันเท่ากันทุกประการแล้ว แล้วด้านนี้จากรูปมันคือด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก (ชี้ไปที่ด้าน AB แล้วด้าน AC)

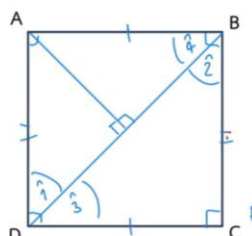
ครู: แล้วเราก็เลยสามารถสรุปได้เลยใช่ไหม ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว เมื่อมีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน มีมุมฉาก 1 มุม

นักเรียน: (พยักหน้า)

ข้อที่ 3 (ด้านการใช้บทนิยาม)

3. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{AD} // \overline{BC}$
จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



จากมุมของ $\square$ บอกได้ 3 90°
 $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD} = x$
 $4x = 360^\circ$
 $x = 90^\circ$
 จ: ได้ $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$

ทบทวน
 พิจารณา $\triangle ABD \cong \triangle CDB$
 $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$; มุมแนว
 $\widehat{BAD} = \widehat{DCB} = 90^\circ$; มุมฉาก
 $BD = BD$; ด้านร่วม
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB$ แบบ มุม-มุม-ด้าน
 จ: ได้ $AB = CD, AD = BC$

พิจารณา
 พิจารณา $\triangle ABC \cong \triangle CDA$
 $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90^\circ$; มุมฉาก
 $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$; มุมแนว
 $AC = AC$; ด้านร่วม
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ แบบ มุม-มุม-ด้าน
 จ: ได้ $AB = CD, BC = AD$

สรุป: ได้ เพราะ ได้ 4 มุมฉาก และ 4 ด้านเท่ากัน

ภาพประกอบ 23 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 3 ของโต

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า โตพิจารณาว่า $\square ABCD$ ไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม – มุม – ด้าน และพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับสามเหลี่ยมอีกฝั่งที่ได้จากการลากเส้นทแยงมุมแล้วจึงได้ว่าด้านตรงข้ามมีความยาวเท่ากัน และใช้ผลรวมมุมภายในรูปสี่เหลี่ยมและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดงว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก

เพื่อให้สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้ แต่ข้อมูลที่กำหนดให้ไม่เพียงพอในการสรุปได้ว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากัน จึงไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งการพิสูจน์นี้เป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของโต

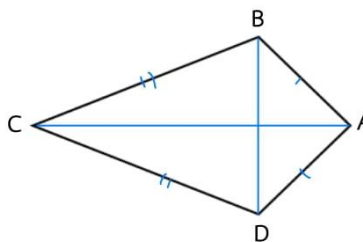
ครู: เขาให้สี่เหลี่ยม ABCD มา แล้วเขามุมแต่ละมุมมาว่ามุมทุกมุมมีขนาดเท่ากันและด้านตรงข้ามขนานกัน เขาอยากรู้ว่าสิ่งที่เขาให้มา มันเพียงพอไหมที่จะสรุปได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งถ้าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ เราก็จะต้องอิงตามบทนิยามที่เขาให้มาว่า มันคือรูปสี่เหลี่ยมที่ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน แล้วมุมทุกมุมมันก็ต้องเป็นมุมฉากด้วย ซึ่งสุดท้ายเราสรุปว่ามันเป็นไม่ได้ เพราะไม่รู้่ว่าทุกด้านมันยาวเท่ากันไหม แล้วเราทำอย่างไรบ้างในขั้นแรก ?

นักเรียน: ขั้นแรกหาว่าทุกมุมคือ 90° หมด เขาให้ว่าทุกมุมเท่ากัน ซึ่งมีทั้งหมด 4 มุม แล้ว 4 มุมก็คือ 360 องศา จากทฤษฎีของรูปสี่เหลี่ยม แล้วก็ได้ทุกมุมเท่ากัน มุมทุกมุมเป็น 90 องศา แล้วจากนั้นก็ลากเส้น BD พิสูจน์สามเหลี่ยม จะได้ด้านตรงข้ามเท่ากัน (ไปที่ด้าน AB และด้าน CD) ซึ่งพอลากอีกเส้น (ลากเส้น AC) เราก็จะได้ว่าด้านตรงข้ามยาวเท่ากันเหมือนเดิม ซึ่ง มันไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าด้านที่อยู่ติดกัน มันยาวเท่ากันไหม

การกำหนดบทนิยาม

ข้อที่ 1 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



1. เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก และ มีเส้นทแยงมุมหนึ่งเส้นแบ่งครึ่งอีกเส้นหนึ่ง
2. ด้านที่อยู่ติดกัน ขาวเท่ากัน 2 คู่
3. มุมฉากในมุม 90°

ภาพประกอบ 24 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 1 ของโต

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า โต ระบุสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวโดยพิจารณาจากการพิสูจน์อย่างง่าย ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น (FL3) และมีการพิจารณาจากการวัดความยาวด้าน ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (FL2)

บทสัมภาษณ์ของโต

ครู: ข้อนี้เป็นการที่เรามองว่าสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว แล้วมันมีสมบัติอะไรบ้างที่มันเกี่ยวกับสี่เหลี่ยมรูปว่าว ซึ่งเราบอกมาว่า อันที่ 1 คือ เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก และมีเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งแบ่งครึ่งอีกเส้นหนึ่ง อันนี้เรารู้ได้อย่างไรว่ามันเป็นแบบนี้ ?

นักเรียน: อย่างแรกเลยวัดตรงนี้ จะเท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน AB และด้าน AD) แล้วก็วัดตรงนี้ จะเท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน CB และด้าน CD) จากนั้นเราก็ลากเส้นแบ่ง

ครึ่ง (ลากเส้น AC) จะได้ว่ามันเท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
จะได้ว่าตรงนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน BD ที่ถูกแบ่งครึ่ง)

ครู: ข้อที่ 2 ที่บอกว่าด้านอยู่ติดกัน ยาวเท่ากัน 2 คู่ คืออย่างไร ?

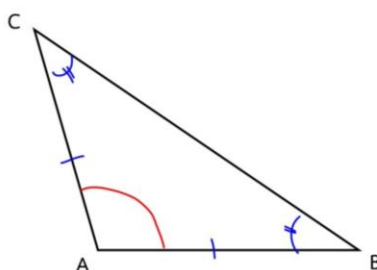
นักเรียน: ด้านนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน AB และด้าน AD) กับด้านนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน CB และด้าน CD) ที่ได้มาจากการวัด

ครู: แล้วมุมภายในรวมกันได้ 360 องศาละ

นักเรียน: พอเรลากตรงนี้ (ลากเส้น AC) จะเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ก็จะได้รูปสามเหลี่ยมรูปละ 180 (เขียนมุม 180 องศาไปที่รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม ADC) บวกกันก็จะได้ 360

ข้อที่ 2 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

2. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว



- มุมหน้าจั่วเป็นมุมป้าน
- มุมหน้าจั่ว 2 มุม
- ด้านประกอบมุมจั่ว (2 มุมที่เท่ากัน) มีความยาวเท่ากัน

ภาพประกอบ 25 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 2 ของอิงค์

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม อิงค์ ระบุสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมบ้านหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากบทนิยาม ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (FL2)

บทสัมภาษณ์ของอิงค์

ครู: เขาบอกว่ารูปสี่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมบ้านหน้าจั่ว เราเห็นอะไรเกี่ยวกับมุมบ้านหน้าจั่วไหมลูก

นักเรียน: ตอนแรกก็คิดว่าน่าจะมุมบ้านก่อนว่าอยู่ตรงไหนได้บ้าง ถ้าหน้าจั่วก็มีมือมีมุมเท่ากัน 2 มุม มีด้านเท่ากัน 2 ด้าน ก็เลยให้มุมที่มีขนาดค่าที่สุด (ทำมือเป็นรูปมุมที่กางแบบบ้าน) เป็นมุมบ้านก่อน แสดงว่ามุมที่ฐานที่เหลือก็จะมีขนาดเท่ากัน ก็จะได้ว่ามีด้านเท่ากัน คือด้านประกอบมุมยอดที่ A มีขนาดเท่ากัน

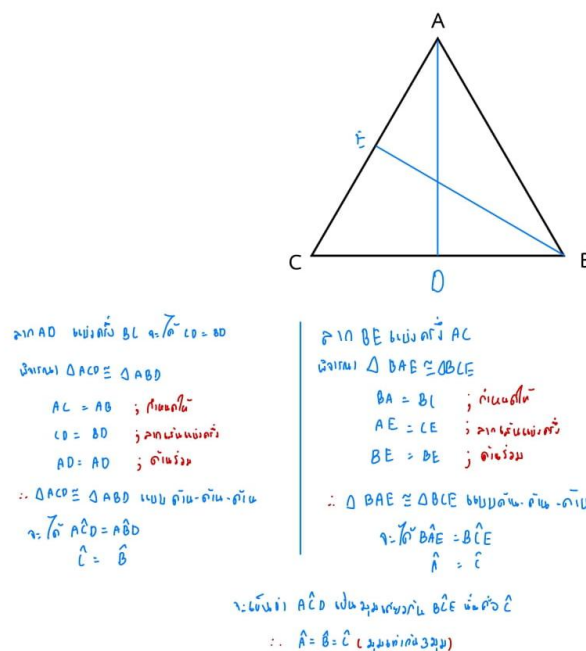
ครู: การที่รู้ว่าหน้าจั่วต้องมีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน หรือมุมเท่ากัน 2 มุม หนูทราบจากไหนลูก

นักเรียน: จากบทนิยามค่ะ

ข้อที่ 3 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

3. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



ภาพประกอบ 26 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 3 ของได้

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า ได้ พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม โดยให้การลากเส้นมัธยฐานแบ่งครึ่งด้านเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แล้วได้ว่ามุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วพิสูจน์ในทำนองเดียวกันอีกครั้ง จึงได้ว่า $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ ซึ่งการพิสูจน์นี้เป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของโต

ครู: ส่วนข้อนี้เขาระบุมาให้เลยว่าเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วเขาก็ให้บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามาว่า เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน แล้วเขาถามว่า สามเหลี่ยมด้านเท่าจะมีมุมเท่ากัน 3 หรือไม่ เพราะเหตุใด ?

นักเรียน: อย่างแรก ลาก AD มาแบ่งครึ่ง BC ก็จะได้อันนี้ (ชี้ไปที่ด้าน BD) กับอันนี้ (ชี้ไปที่ด้าน CD) จากนั้นก็พิสูจน์สามเหลี่ยมที่มันเท่ากันทุกประการ ก็จะได้เท่ากันทุกประการ ก็จะได้มุมตรงนี้ (ชี้ไปที่มุม C) เท่ากับมุมตรงนี้ (ชี้ไปที่มุม B)

ครู: แล้วพอเราได้ว่ามุม C กับมุม B เท่ากันแล้ว หนูไปพิสูจน์ว่าอันต่อมาก็คือมุม A กับมุม C ก็ทำแบบเดิม ?

นักเรียน: (พยักหน้า) ทำแบบเดิม

ครู: สุดท้ายแล้วมันเชื่อมโยงกันอย่างไรได้ว่ามุม 3 มุมมันเท่ากัน ?

นักเรียน: จากที่มีมุม 4 มุม ก็เลยโยงเป็น A เท่ากับ B เท่ากับ C เลย (ชี้ไปที่มุมที่เท่ากันซึ่งได้มาจากการพิสูจน์ข้างต้น)

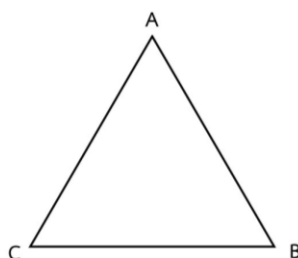
ครู: ก็คือการที่เราเอามุมเป็นตัวเชื่อม ?

นักเรียน: (พยักหน้า)

ข้อที่ 3 (ด้านการกำหนดบทนิยาม) ที่ไม่เกิดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

3. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



ภาพประกอบ 27 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 3 ของวิวกะ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า วิวกะ พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม แต่ไม่ได้พิสูจน์ความสมมูลของบทนิยามที่กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แต่ใช้การพิจารณาจากบทนิยามที่เคยทราบมา และมีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เคยทราบมาว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเท่ากัน จึงสรุปได้ว่านักเรียนไม่เกิดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

บทสัมภาษณ์ของวิวกะ

ครู: แล้วข้อต่อมาหนูเว้นไว้ แต่ลองดูคร่าว ๆ ได้ไหมลูก เกี่ยวกับสามเหลี่ยมด้านเท่า มันมีแบบลักษณะอย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: (ชี้ไปที่ด้านในรูปทั้ง 3 ด้านเพื่อแสดงถึงความเท่ากันของด้าน) ด้านเท่ากัน 3 ด้าน มุมเท่ากัน 3 มุม มุมละ 60 (ชี้ไปที่มุมในรูปแต่ละมุมโดยใส่มุมละ 60 องศา)

ครู: แต่ที่นี้เขาอยากให้เราพิสูจน์ว่ามุมทั้ง 3 มุม ตรงนี้ (ชี้ไปที่มุมของรูปสามเหลี่ยม) มันเท่ากันหรือไม่ ?

นักเรียน: (ลบมุมที่เขียนในรูปออก)

ครู: แต่เราอาจจะบอกได้ว่ามันเท่ากัน แต่มันเท่ากันเพราะอะไร ? ในมุมมองของเรา ?

นักเรียน: มันเท่ากันเพราะเขาบอกว่า จากโจทย์จากว่าเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วนิยามของสามเหลี่ยมด้านเท่าก็คือ มุมเท่ากัน 3 มุมค่ะ (ชี้ดุม 3 มุมที่เท่ากัน)

ครู: มุมเท่ากัน 3 มุมด้วย ดูจากนิยาม ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

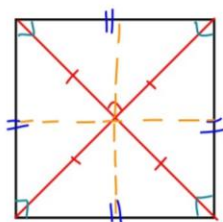


ด้านการจัดหมวดหมู่

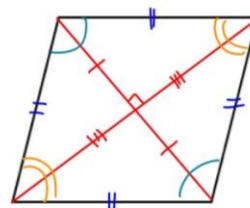
ข้อที่ 1 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

1. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

1)

- มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน
- ด้านตรงข้ามคู่ขนาน
- 1 เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก
- 1 เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งอีกเส้น
- มุมภายในรวมกัน 720°

2)

- มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
- 1 เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน
- มีแกนสมมาตร 4 แกน

3)

- มุมตรงข้าม มีขนาดเท่ากัน 2 คู่
- 1 เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน
- มีแกนสมมาตร 2 แกน

ภาพประกอบ 28 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 1 ของอิงค์

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า อิงค์ จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยพิจารณาจาก “บทนิยาม” และ “การพับรูป” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (CL2)

บทสัมภาษณ์ของอิงค์

ครู: จากรูปที่กำหนดให้เราลองว่ามันมีอะไรเหมือนกันบ้าง อย่างไรบ้างลูก ?

นักเรียน: ตอนแรกหนูมองจัตุรัสกับเปียกปูน ซึ่งมันก็มีด้าน 4 ด้านยาวดเท่ากันเลย ค่ะ แล้วก็ด้านตรงข้ามจะขนานกัน แล้วเส้นทแยงมุมของทั้ง 2 รูปจะตัดกันเป็นมุมฉาก(ทำมือเป็นกากบาทเพื่อแสดงถึงเส้นทแยงมุมตัดกัน) จากบทนิยาม แล้วเส้นทแยงมุมก็จะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน แล้วมุมภายในของทั้งสองรูปก็จะรวมกันได้ 360 องศา

ครู: แล้วอันที่มีในจัตุรัสมีอย่างไรบ้างลูก ?

นักเรียน: มุมทั้ง 4 จะเป็นมุมฉาก เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน มีแกนสมมาตร 4 แกน คือพับได้ 4 รอบ คือพับลงมาเป็นผืนผ้ากับพับตามเส้นทแยงมุม

ครู: แล้วอันที่มีเฉพาะเปียกปูนมีอย่างไรบ้างลูก ?

นักเรียน: มุมที่อยู่ตรงข้ามกันมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ แล้วเส้นทแยงมุม 2 เส้นยาวไม่เท่ากัน มีแกนสมมาตร 2 แกน

เราบอกว่ามันมีมุม 4 มุม มีด้าน 4 ด้าน มุมภายในรวมกันได้ 360 องศา
แต่ละอันมันมาจากไหน ?

นักเรียน: สมบัติของรูปสี่เหลี่ยม

ครู: แล้วมีอะไรจะเพิ่มเติมไหม ?

นักเรียน: ไม่มี

ครู: แต่สิ่งที่มันมีในคางหมูอย่างเดียวนั้นเราบอกว่า ด้านตรงข้าม 1 ด้าน ขนาน
กัน ด้านตรงข้ามที่ไม่ขนานกัน จะมีขนาดเท่ากัน มุมที่ฐานเดียวกัน
เท่ากัน เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน แต่ละอัน อย่างเช่นด้านตรงข้ามขนานกัน
1 อันคืออะไร ?

นักเรียน: ก็คือด้านตรงนี้ขนานกัน (ชี้ไปที่ด้านของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู) จากมุมแย้ง

ครู: แล้วด้านตรงข้ามที่ไม่ขนานกัน ยาวเท่ากัน เราดูจากตรงไหน ?

นักเรียน: เขาขีดมา (วงไปที่ด้านที่ยาวเท่ากันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู) ก็เลยได้ว่า
ยาวเท่ากัน

ครู: ต่อมา มุมที่ฐานเดียวกัน เท่ากันคืออะไร ?

นักเรียน: มุมที่ฐานเดียวกัน เท่ากันก็คือ ตรงนี้กับตรงนี้ (ชี้ไปที่มุมที่ฐาน 2 มุมของ
รูปสี่เหลี่ยมคางหมู) ตรงนี้เท่ากับตรงนี้ (ชี้ไปที่มุมด้านบน 2 มุมของรูป
สี่เหลี่ยมคางหมู)

ครู: แล้วเส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน เราดูอย่างไรว่ามันยาวเท่ากัน ?

นักเรียน: วัดครับ

ครู: แล้วสิ่งที่มีในขนมเปียกปูนอย่างเดียวนั้นเราบอกว่าด้านยาวเท่ากันทุกด้าน
มุมตรงข้ามเท่ากัน เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก แล้วด้านทุกด้านยาว
เท่ากันเรารู้ได้อย่างไร ?

นักเรียน: วัดด้าน (ชี้ไปที่ด้านทุกด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน)

ครู: แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน เราทราบได้อย่างไร ?

นักเรียน: มุมตรงข้าม ก็คือมุมตรงนี้กับมุมตรงนี้รวมกันมันได้ 180 องศา (ชี้ไปที่มุมที่ฐาน 2 มุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน) และมุมตรงนี้รวมกันได้ 180 (ชี้ไปที่มุมยอด 2 มุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน)

ครู: แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกันมันจะยาวเท่ากันได้อย่างไร (ชี้ไปที่มุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน) จากที่เรามอง ?

นักเรียน: (ชี้ไปที่รูปในข้อที่ 2 ด้านการพิสูจน์) พิสูจน์แล้วเราก็จะได้ อันนี้เท่ากับอันนี้ (ชี้ไปที่มุม ABD และมุม BDC) ซึ่งจะมีอันนี้เท่ากับอันนี้อีก (ชี้ไปที่มุม BAD และมุม BCD)

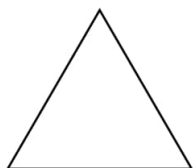
ครู: แล้วเส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก เราทราบได้อย่างไร ?

นักเรียน: เราวัด

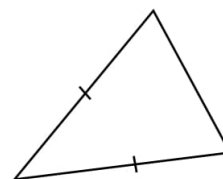
ข้อที่ 3 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

3. กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

- 1.) มุม 3 มุม, ด้าน 3 ด้าน, มุมภายใน 180°, มุมรอบนอก 360°
 2.) ด้านทุกด้านเท่ากัน, มุมทุกมุมเท่ากัน
 3.) ด้าน 2 ด้านยาวเท่ากัน, มุมหัวมุมยอดเท่ากัน/มุมที่ 2 ด้านเท่ากัน

ภาพประกอบ 30 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 3 ของโต

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า โต จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (CL1) พิจารณาจาก “สมบัติของรูปสามเหลี่ยม” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (CL2) และมีการ “พิสูจน์” ประกอบสมบัติที่ได้ ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 ขั้นต้น (CL3)

บทสัมภาษณ์ของโต

ครู: อันนี้เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แต่สามเหลี่ยมของเราจะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ากับรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว ซึ่งสิ่งที่มันมีเหมือนกันของสามเหลี่ยมทั้ง 2 อัน เราเรียกว่า มุม 3 มุม ด้าน 3 ด้าน มุมภายใน 180 องศา มุมแหลมเหมือนกัน ?

นักเรียน: มุมทุกมุมเป็นมุมแหลมเหมือนกัน

ครู: เราสังเกตอย่างไรลูก ?

นักเรียน: อย่างแรกเลยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มุมทุกมุมเป็น 60 องศาอยู่แล้ว จากสมบัติ

ครู: แล้วสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วล่ะ ?

นักเรียน: มุมแรกเป็นมุมแหลมแล้ว ซึ่งมุมแหลมมันก็น้อยกว่า 90 องศา ถ้าเราเอา 180 ไปลบ แล้วการด้วย 2 ก็ก็น้อยกว่า 90 องศาอยู่แล้ว ก็เลยจะได้ว่าเป็นมุมแหลมทุกมุม

ครู: แล้วสิ่งที่มีในด้านเท่าอย่างเดียว เราบอกว่า ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน มุมทุกมุมเท่ากัน คืออย่างไร ?

นักเรียน: ด้านทุกด้านตรงนี้ยาวเท่ากัน (ชี้ไปที่ด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า) จากสมบัติ แล้วมุมทุกมุมเท่ากันจากที่พิสูจน์ข้างบน

ครู: แล้วสิ่งที่มีในสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วเพียงอย่างเดียว ก็คือด้าน 2 ด้านยาวเท่ากัน มุมที่ฐานของด้านไม่เท่า ยาวเท่ากัน อันนี้หนูรู้ได้อย่างไรว่า 2 ด้านยาวเท่ากัน ?

นักเรียน: อันนี้บอกมาแล้ว (ชี้ไปที่ด้านที่ถูกขีดเหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว) แล้วก็ด้วยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มันก็เลยเท่ากัน

ครู: แล้วมุมที่ฐานของด้านที่ยาวไม่เท่ากัน เท่ากัน คืออย่างไรลูก ?

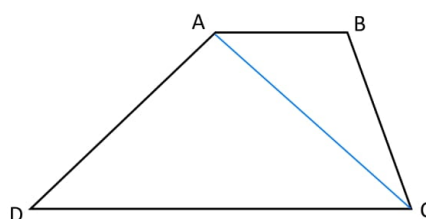
นักเรียน: จากการพิสูจน์ ลากเส้นตั้งฉาก (ลากเส้นตั้งฉาก) แล้วก็จะได้อาก - ด้าน - ด้าน แล้วก็จะได้อันนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยม มุมแหลมหน้าจั่ว)

ด้านการพิสูจน์

ข้อที่ 1 (ด้านการพิสูจน์) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3

ด้านการพิสูจน์

- กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



$\square ABCD$
 จ. ได้รูป $\triangle ABC$ และ $\triangle ADC$
 ซึ่ง มุมภายใน $= 180^\circ$
 $\therefore \angle D = 360^\circ$
 $\therefore$ มุมภายในของ $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360

ภาพประกอบ 31 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 1 ของโต

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า โต พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละรูป โดยนำสมบัติที่เกี่ยวข้องกับผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมาใช้ในการให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (PL3)

บทสัมภาษณ์ของโต

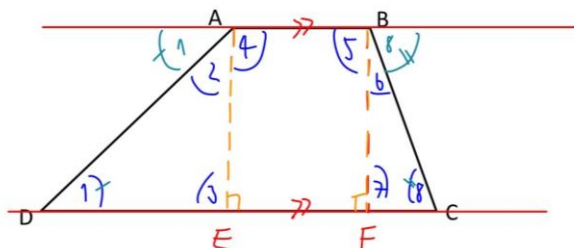
ครู: ข้อนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู เขาให้พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในได้ 360 องศา เราเริ่มต้นจากการขีดเส้น คืออย่างไร ?

- นักเรียน: คือลาก AC (ขีดเส้นทแยงมุม AC) มาให้เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป จากนั้น
มุมภายในรูปสามเหลี่ยมคือ 180 (เขียน 180 ในรูปสามเหลี่ยม ADC) กับ
180 (เขียน 180 ในรูปสามเหลี่ยม ABC) ก็บวกกันได้ 360 องศา
- ครู: ทำไมเราถึงรู้ว่ามุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา ?
- นักเรียน: จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยม



ข้อที่ 1 (ด้านการพิสูจน์) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4

1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



จากเส้นตรง 1 เส้นต่าง AB $\parallel$ DC
 " EF $\parallel$ AB $\parallel$ DC

จึงได้ว่า $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (มุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180°)

$\angle 5 + \angle 6 + \angle 4 = 180^\circ$ (มุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180°)

จากเส้น AE ตั้งฉากกับ DC

" BF ตั้งฉากกับ DC

จึงได้ว่า $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (มุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

$\angle 5 + \angle 6 + \angle 4 = 180^\circ$ (มุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

$\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$ (มุมแนวตั้ง)

$\angle 5 = \angle 6 = 90^\circ$ (มุมแนวตั้ง)

$$\begin{aligned} \text{แสดงว่า มุมภายในรูป } \square ABCD &= \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 4 \\ &= \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 4 \\ &= 180^\circ + 180^\circ \\ &= 360^\circ \# \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 32 แสดงผลการทำนงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 1 ของอิงค์

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า อิงค์ พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยการลากเส้นตรงผ่านด้านคู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และลากเส้นตั้งฉาก 2 เส้น แล้วใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวกับมุมตรง ทฤษฎีที่เกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้งมาใช้ มาใช้ในการให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

บทสัมภาษณ์ของอิงค์

ครู: ข้อนี้เรามีการต่อเส้นด้วยหนูพิสูจน์อย่างไรบ้างลูก

นักเรียน: หนูลากเส้นผ่านเส้นตรง AB และเส้นตรง CD ไปก่อน ทำให้เส้น AB ขนานกับเส้น CD แล้วกำหนดมุมภายในโดยก่อนกำหนดมุมภายในหนูลากเส้นจาก A ลงไปตั้งฉากกับเส้น CD และลาก B ลงไปตั้งฉากกับเส้น CD แล้วก็กำหนดมุมทั้งหมด 8 มุม มันจะมีมุมที่รวมกันได้ 180 องศา คือหนูใช้มุมแย้งในการดูตามเส้น(ทำมือลากเป็นตามแนวเส้น AB) ก็คือมุมที่ 1 แยกขึ้นไป เราจะได้ว่ามุมที่ 1 + 2 + 4 จะได้เท่ากับ 180 องศา จะได้เท่ากับว่าเป็นเส้นตรง ต่อไปเราก็จะดูมุมแย้งที่ฐานอีกมุมหนึ่งก็คือมุม 8 ก็จะแย้งกับอีกฝั่งหนึ่งของเส้นตรงที่มุม B ก็จะบวกกันได้ 180 เหมือนกัน

ครู: แล้วมุม 3 กับ 4 แยกกันไหมลูก ?

นักเรียน: แยกกันค่ะ

ครู: แล้วก็มีมุม ?

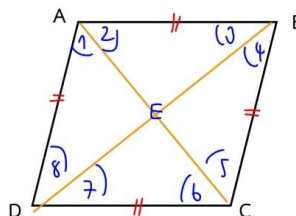
นักเรียน: มุม 5 กับมุม 7 ค่ะ

ครู: แล้วทั้ง 2 อันก็เลยนำมารวมกัน ?

นักเรียน: รวมกันก็จะได้ 360 องศาค่ะ

ข้อที่ 2 (ด้านการพิสูจน์)

2. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (กำหนดให้)

$AB = CD$; กำหนดให้

$\hat{1} = \hat{3}$; มุมแย้ง

$\hat{6} = \hat{7}$; มุมแย้ง

(เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดขวางเส้นตรงคู่ขนาน)
ทำมุมแย้งเสมอเท่ากัน

จงได้ว่า $\triangle AEB \cong \triangle CED$ (ม.ด.บ.)

∴ $AE = EC$, $DE = BE$

แสดงว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

ภาพประกอบ 33 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 2 ของอิงค์

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า อิงค์ พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุม เพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็น 4 รูป แล้วนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และทฤษฎีที่เกี่ยวกับมุมแย้งและเส้นขนานมาใช้ในการให้เหตุผล เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม – ด้าน – มุม จึงทำให้ทราบว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกัน ซึ่งเป็น การให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล มีการพิสูจน์หลายขั้นตอน และแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

บทสัมภาษณ์ของอิงค์

ครู: เราพิสูจน์อย่างไรดีกว่าเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเราแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน ?

นักเรียน: ตอนแรกเรากำหนดให้ AB ในสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านขนานกัน 2 คู่ เราก็เลยเขียนว่าด้าน AB ขนานกับด้าน CD และด้าน BC จะขนานกับ AB ค่ะ แล้วเราก็จะลากเส้น AC และลากเส้น BD เป็นเส้นทแยงมุม แล้วกำหนดมุมภายใน

ครู: มุมภายในที่ใส่เป็นเลข 1 – 8 ใช่ไหมลูก ?

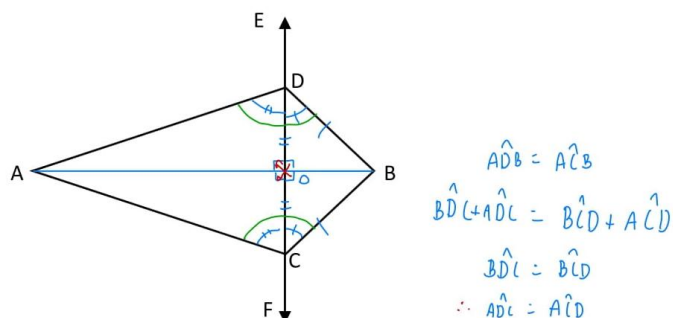
นักเรียน: ใช่ค่ะ แล้วก็ดูว่ามันเท่ากันทุกประการหรือเปล่า ก็ดูจากมุมแย้ง จะได้ว่ามุม 2 จะแย้งกับมุม 6 แล้วมุม 3 จะแย้งกับมุม 7 จะได้ว่าสามเหลี่ยมสองรูปนี้มันเท่ากัน จะได้ว่ามันเท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม

ครู: พอพิสูจน์ได้ว่ามันเท่ากันทุกประการแล้วมันจะบอกได้อย่างไร ?

นักเรียน: บอกได้ว่าเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

ข้อที่ 3 (ด้านการพิสูจน์)

3. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



ใน $\triangle ABC$ โดยที่ $BO \perp AC$

พิจารณา $\triangle BOD \cong \triangle BOC$

$\widehat{BOD} = \widehat{BOC}$; มุมตรงกัน

$\widehat{BDO} = \widehat{BCO}$; มุมแย้ง

$BD = CD$; กำหนดให้

$\therefore \triangle BOD \cong \triangle BOC$ แบบมุม-มุม-ด้าน
 $\therefore OD = OC$

พิจารณา $\triangle AOC \cong \triangle AOD$

$\widehat{AOC} = \widehat{AOD} = 90^\circ$; มุมฉาก

$OC = OD$; จากกรณี $\triangle BOD \cong \triangle BOC$

$\widehat{AOC} = \widehat{AOD} = 90^\circ$; มุมตรงกัน

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle AOD$ แบบด้าน-มุม-ด้าน

$\therefore \widehat{OAC} = \widehat{OAD}$

จาก มุมตรงกัน $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$

$\widehat{OAC} + \widehat{ADE} = \widehat{OAC} + \widehat{ACF}$

$\therefore \widehat{ADE} = \widehat{ACF}$

ภาพประกอบ 34 แสดงผลการทํางานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 3 ของโต

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า โต พิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ โดยการลากเส้นตั้งฉากเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปแล้วใช้สิ่งที่กำหนดให้และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน แล้วลากเส้นตั้งฉากอีกครั้งในรูปสามเหลี่ยม ACD เพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน แล้วจะได้ว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยม ACD

มีขนาดเท่ากัน แล้วแสดงว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยนำทฤษฎีบทของมุมตรงมาใช้ในการให้เหตุผล แต่การแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่เกิดจากการแบ่งรูปสามเหลี่ยม ACD นั้น เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน ยังขาดความสมเหตุสมผลเนื่องจากนักเรียนลากเส้นตั้งฉากต่อไปยังจุดยอดมุม แล้วพิจารณาว่าเส้นทั้ง 2 ต่อกันเป็นเส้นตรง จึงใช้สมบัติของมุมตรงข้ามในการให้เหตุผล ซึ่งเส้นที่วาดต่อกันอาจจะไม่เป็นเส้นตรง โดยการพิสูจน์ในครั้งแรกที่แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม BOD และรูปสามเหลี่ยม BOC เท่ากันทุกประการในขั้นตอนแรกก็เพียงพอต่อการแสดงว่ามุม OCA และมุม ODA มีขนาดเท่ากันและจะมีความสมเหตุสมผลมากกว่า ซึ่งมีการพิสูจน์หลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ขั้นต้น(PL4)

บทสัมภาษณ์ของโต

ครู: สี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เขาไม่ได้ระบุประเภทว่าเป็นสี่เหลี่ยมแบบไหน แต่ระบุว่าเป็นสี่เหลี่ยมใด ๆ แล้วเขาให้มาว่า ด้าน BC กับด้าน BD มันมีความยาวเท่ากัน ต่อมาเขาก็ให้เส้นตรง EF ลากผ่านจุด C และจุด D เขาให้เราพิสูจน์ว่ามุม ADE กับมุม ACE มันมีขนาดเท่ากัน อันนี้เราเริ่มต้นจากการที่เราพิสูจน์ก่อน เห็นว่าเราลากเส้นตั้งฉากด้วย แล้วมันเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน อันนี้มาจากไหน ?

นักเรียน: มาจากการลากเส้น BO มาตั้งฉากกับ CD แล้วก็พิสูจน์ให้สามเหลี่ยม 2 รูปนี้ (วงกลมสามเหลี่ยม BOD และสามเหลี่ยม BOC) ให้มันเท่ากันทุกประการ

ครู: แล้วทำไมเราถึงบอกว่ามุม BDO กับมุม BCO มีขนาดเท่ากัน ?

นักเรียน: เพราะว่า เขาให้ด้าน 2 ด้านนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน BD และด้าน BC) ถ้าเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็คือ ด้าน 2 ด้านนี้ยาวเท่ากัน มุมตรงนี้ก็เลยเท่ากัน (ชี้ไปที่มุม BDO กับมุม BCO)

ครู: แล้วเราก็เลยได้ว่ามันเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน เสร็จแล้วเราก็จะได้มาว่าด้าน OD กับ OC ยาวเท่ากัน แล้วเราก็ไปพิสูจน์ต่อว่า

สามเหลี่ยม AOB กับ AOC เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน คือ
อย่างไร ?

นักเรียน: ลาก AO มาตั้งฉากกับ CD แล้วจะได้ AO เป็นด้านร่วม แล้ว OC จะ
เท่ากับ OD จากที่พิสูจน์ตอนแรก เลยจะเท่ากันทุกประการแบบ
ด้าน - มุม - ด้าน

ครู: ที่นี้เราก็จะได้ว่ามุม ODA กับมุม OCA เท่ากัน แล้วสุดท้ายเราไปจบว่า
มุมที่เราต้องการเท่ากันได้อย่างไร ?

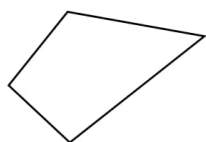
นักเรียน: จากที่ตรงนี้นั้นเท่ากันแล้ว (ชี้ไปที่มุม ACO และมุม ADO) แล้วมุมตรง
รวมกันได้ 180 (ชี้ไปที่มุม EDO และมุม OCF) ถ้าวัดออกก็คือลบอันนี้
ออก 2 อัน (ชี้ไปที่มุม ACO และมุม ADO) แล้วมุมที่เหลือจะเท่ากัน

3. ผลการวิเคราะห์การวิเคราะห์การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม อยู่ในกลุ่มต่ำ

ด้านการตระหนักรูปร่าง

ข้อที่ 1 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

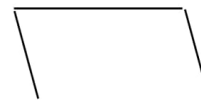
1. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม พร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

① : ใช่ ☐ เพราะ มีด้านทั้ง 4 ด้าน และ สุ่มทั้ง 4 สุ่ม

② : ไม่ใช่ ☐ เพราะ มีด้านทั้ง 4 ก็จริง แต่ สุ่มมุม เช่น สุ่มทั้ง 3 มุม
เลยไม่ได้ว่าใช่ ☐

③ : ไม่ใช่ ☐ เพราะ มีด้านทั้ง 4 จริง แต่ สุ่ม มุม ไม่ ได้ เชื่อมกัน อยู่
เลยดู มุม ทั้ง 3 มุม 4 มุม แล้ว ดูว่า ปิด ไม่ ปิด แบบ รูป ☐

ภาพประกอบ 35 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 1 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” และ “การเป็นรูปปิด” ซึ่ง

แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2) และมีการพิจารณาว่ามีความ “โค้ง มน” และพิจารณาจาก “ลักษณะภายนอก” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (RL 1)

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: ข้อที่ 1 เป็นเกี่ยวกับการพิจารณาว่ารูปไหนเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม แต่ละข้อในการที่เราให้เหตุผล เรามีหลักการอย่างไรบ้างในการบอกว่า ข้อที่ 1 เป็น หรือข้อที่ 2 ข้อที่ 3 ไม่เป็น เราดูจากไหน ?

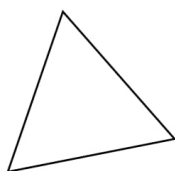
นักเรียน: ตอนแรกเลยผมมองที่รูป จากรูปแรกมันมี 4 ด้าน ด้านทั้ง 4 มีมุมอยู่ 4 มุม ก็เลยคิดว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมเลย เพราะดูจากรูปที่ 2 แล้ว ส่วนมุมมันค่อนข้างจะเป็นส่วนโค้ง ผมก็เลยตีว่ามันไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยม เพราะมันเป็นโค้ง ๆ (ชี้ไปที่ส่วนโค้งในรูปที่ 2) ส่วนรูปที่ 3 ผมเห็นว่ามันเป็นส่วนของเส้นตรง 4 เส้นเลย มุมของแต่ละรูปมันไม่ติดกัน มันไม่เชื่อมกัน ผมก็เลยให้มันไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมครับ

ครู: อันนี้หลักเกณฑ์ในการพิจารณาของเรา เราเอามาจากไหน เราดูที่มุม ดูที่รูปหรือเราใช้ทฤษฎีช่วย ?

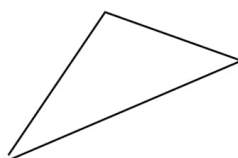
นักเรียน: ผมไม่ได้ใช้ทฤษฎีเลย ผมใช้แต่การมองเห็นเลยครับ

ข้อที่ 2 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

2. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

①: ใช่ Δ เลข 1 มีด้าน 3 ด้าน ยาว 3 ยาว

②: ไม่ใช่ Δ เลข 2 รูป 2 ที่ 1 ด้าน มี เลข 2 ยาว 2 ยาว รูป 2 ไม่ใช่รูปปิด

③: ไม่ใช่ Δ เลข 3 ด้าน 3 ด้าน ยาว 3 ด้าน มี 6 ด้าน 6 ยาว/ยาว
จึงไม่ใช่ Δ

ภาพประกอบ 36 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 2 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” และ “การเป็นรูปปิด” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2)

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: ข้อที่ 2 การที่เรามองว่าแต่ละรูปเป็นสามเหลี่ยมหรือไม่เป็นสามเหลี่ยม เรามีหลักการในการมองอย่างไรบ้างลูก ?

นักเรียน: จากการมองก็จะเห็นว่ารูปที่ 1 มีด้าน 3 ด้าน มีมุม 3 มุม ก็เลยจัดเป็นรูปสามเหลี่ยม

ครู: แล้วรูปที่ 2 ละดู ?

นักเรียน: จะเห็นว่ามียูบปลาย ๆ หนึ่งทีมันไม่ติดกันครับ มันเหมือนเป็นรูปเปิด

ครู: เป็นรูปเปิดคือไม่ได้ ?

นักเรียน: ใช่ครับ

ครู: แล้วอย่างรูปที่ 3 ละดู

นักเรียน: ถ้านับด้านนับมุมจริง ๆ ผมนับได้ 6 ด้านครับ มันมียอดออกมาเล็ก ๆ น้อย ๆ ตรงกลาง

ครู: อย่างนี้เรามองภาพอย่างไรในการพิจารณาว่าเป็นสามเหลี่ยมหรือไม่เป็นสามเหลี่ยม เราใช้อะไรในการพิจารณา ใช้การสังเกต การมองรูป หรือใช้หลักทฤษฎีต่าง ๆ เข้ามาช่วย ?

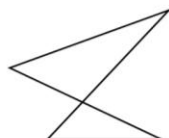
นักเรียน: ใช้การสังเกต การมองรูปครับ

ข้อที่ 3 (ด้านการตระหนักรูปร่าง)

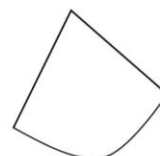
3. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและหมายเลขใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่ใช้ทั้งสองรูปพร้อมให้เหตุผลประกอบ



หมายเลข 1



หมายเลข 2



หมายเลข 3

หมายเลข 1 : รูปสามเหลี่ยม เพราะมี 3 ด้าน, 4 มุม, 4 จุดยอด

หมายเลข 2 : รูปสามเหลี่ยม เพราะ มีแค่เส้นเชื่อมรูปสามเหลี่ยม
2 รูปประกอบกัน

หมายเลข 3 : ไม่ใช่ทั้งสอง เพราะรูปไม่ได้มีจุดตั้งเส้นตรง

ภาพประกอบ 37 แสดงผลการทำนปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการตระหนักรูปร่าง ข้อที่ 3 ของต้นข้าว

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า ต้นข้าว พิจารณาว่าหมายเลขใดเป็นรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมหรือไม่ใช้ทั้งสองรูป โดยพิจารณาจาก “จำนวนมุม” “จำนวนด้าน” และ “จำนวนจุดยอด” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (RL 2) และพิจารณาจาก “ลักษณะภายนอก” ที่มีความคุ้นเคย “ลักษณะของเส้น” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (RL 1) แต่มีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับประเภทของเส้น

บทสัมภาษณ์ของต้นข้าว

ครู: อันนี้คือการแบบมองภาพว่าอันไหนเป็นสามเหลี่ยมหรือเป็นสี่เหลี่ยมอันไหนไม่เป็น เช่นรูปแรกอย่างลูกเอาจมองว่าเป็นรูปอะไร

นักเรียน: ผมมองว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมครับ

ครู: ดูยังไงว่าเป็นสี่เหลี่ยม

นักเรียน: มีสี่ด้านครับหนึ่ง สอง สาม สี่ (นักเรียนชี้ด้านแต่ละด้าน) แล้วมีจุดแล้วก็ปิดกันด้วยเส้นตรงครับ

ครู: แล้วอันนี้ลูกหนูมองว่าเป็นรูป ?

นักเรียน: เป็นสามเหลี่ยมสองรูปครับ

ครู: เราลองจากไหนลูก จากลักษณะหรือว่ายังไง

นักเรียน: นี่ครับ หนึ่ง สอง สาม (นักเรียนชี้นิ้วตามด้านในรูป) อันนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมหนึ่งอัน แล้วอันนี้เป็นอีกอันหนึ่ง (นักเรียนชี้นิ้วไปที่รูปด้านล่าง)

ครู: แล้วอันนี้จะลูก

นักเรียน: อันนี้ผมมองว่าไม่ใช่ทั้งสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม เพราะมันมีเส้นโค้ง (นักเรียนชี้ไปที่รูปตรงเส้นโค้ง) ไม่ตรง ซึ่งขัดกับบทนิยามที่ผมหามาทั้งสองอันเลยครับ

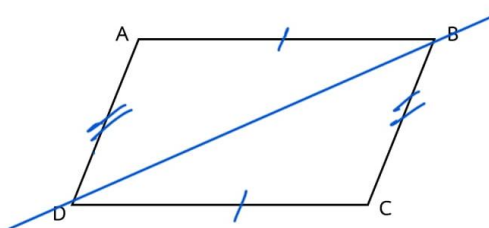
ด้านบทนิยามแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การใช้บทนิยามและการกำหนดบทนิยาม

การใช้บทนิยาม

ข้อที่ 1 (ด้านการใช้บทนิยาม) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3

1. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



๑๑๑ ผลการสอบของนักเรียน รูป ๓๑ จึงเห็นว่า สมบัติ ๑๖ อาจทำกับทุก/เกือบได้

ภาพประกอบ 38 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 1 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยใช้การลากเส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็น 2 รูป ก็จะสามารถใช้ความเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน แล้วสรุปว่าด้านตรงข้ามจะขนานกันเนื่องจากรูปที่แบ่งสามารถพลิกออกมาได้ แต่ไม่ได้แสดงว่าด้านตรงข้ามขนานกันอย่างไรโดยใช้ทฤษฎีหรือนิยามเข้ามาช่วย เป็นการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (RL 3)

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: เรามีรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ นี้มาให้ แต่ประเด็นคือสี่เหลี่ยมนี้ของเรา มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แล้วให้บอกว่ารูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไหมเพราะเหตุใด แต่การที่จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานได้เขาก็อิงจาก

บทนิยามว่า มันคือรูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามมันจะขนานกัน 2 คู่ นะ
 อย่างนี้ที่เราบอกว่า ลากเส้นทแยงมุมผ่าครึ่งรูปสี่เหลี่ยม ก็จะทำให้
 สามารถใช้การเท่ากันทุกประการได้ มันเป็นอย่างไบบ้าง พอช่วยขยาย
 ความได้ไหมลูก ?

นักเรียน: ผมก็ลองลากเส้นทแยงมุมผ่านใช้ไหมครับ ก็จะมีด้าน AD (ชี้ไปที่
 ด้าน AD) เท่ากับด้าน BC (ชี้ไปที่ด้าน BC) อยู่แล้ว โจทย์กำหนดมา
 และส่วน BC กับ AB ก็เท่ากันเหมือนกัน (ชี้ไปที่ด้าน BC กับ AB) ก็เลย
 หลักการเท่ากันทุกประการครับ

ครู: ถ้ามันเท่ากันทุกประการ หนูว่ามันจะเท่ากันทุกประการแบบไหนลูก ?

นักเรียน: ด้าน - ด้าน - ด้าน ครับ

ครู: ด้าน - ด้าน - ด้าน มีด้านไหนบ้างลูก ?

นักเรียน: มีด้าน AD (ชี้ไปที่ด้าน AD) กับ AB (ชี้ไปที่ด้าน AB) กับด้านนี้ครับ (ชี้ไป
 ที่เส้นทแยงมุม)

ครู: เราเรียกว่าด้านนี้คือด้านอะไรลูก ? (ชี้ไปที่เส้นทแยงมุม)

นักเรียน: ด้านร่วมครับ

ครู: แสดงว่ามันเท่ากันทุกประการแล้ว แล้วเราพิสูจน์ว่ามันขนานอย่างไรลูก
 มันมีตัวทฤษฎีหรืออะไรบ้างไหมที่มันสามารถบอกว่ามันจะขนานได้ หรือ
 เรามองแค่ว่ามันเท่ากันทุกประการ แล้วมันจะขนานเลย ?

นักเรียน: ผมมองเป็นแบบนี้ไปแล้ว

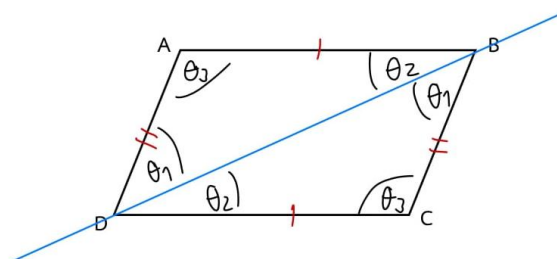
ครู: แบบนั้นไปแล้วคือถ้ามันเท่ากันทุกประการปั๊บ มันก็จะ ?

นักเรียน: ขนานกัน ผมมองว่ามันพลิกออกมาครับ

ข้อที่ 1 (ด้านการใช้บทนิยาม) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4

1. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $AB = CD, BC = AD$ จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



$$AB = CD$$

$$BC = AD$$

$$\triangle ABD \cong \triangle BCD$$

$$\textcircled{1} AB = CD \quad ; \text{ ฝั่งก้านนอก}$$

$$\textcircled{2} BC = AD \quad ; \text{ ฝั่งก้านนอก}$$

$$\textcircled{3} BD = BD \quad ; \text{ ด้านร่วม}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCD \text{ เท่ากันทุกประการ}$$

(ค.ค.ด)

θ_1, θ_2 ซ้ำกัน แสดงว่า $\square$ ด้านขนาน

ภาพประกอบ 39 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 1 ของเกรซ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรซ พิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน แล้วใช้สมบัติที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งร่วมกับมุมคู่ที่สมนัยกันในการแสดงว่าด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ แล้วจึงสรุปได้

อย่างสมเหตุสมผลว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยสอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้อย่างสมเหตุสมผลและเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของเกรซ

ครู: อันนี้เขาให้เราใช้บทนิยามที่ให้มา ในการพิจารณาว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไหม ซึ่งถ้าเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ เราต้องแสดงให้เห็นว่าด้านตรงข้ามของเรามีขนานกัน 2 คู่ เราพิสูจน์โดยลากเส้นก่อน ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ พิสูจน์ สี่เหลี่ยมด้านขนานของหนูคือด้านตรงข้ามมันต้องยาวเท่ากันด้วย หนูก็เลยพิสูจน์โดยแบ่งครึ่งด้วยเส้นทแยงมุมเป็นสามเหลี่ยมสองรูปเพื่อพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยม 2 รูปนี้ เท่ากัน โดยให้ด้านมันเท่ากัน เป็นด้านที่สมนัยกัน จึงพิสูจน์ด้วยสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ ก็จะพิสูจน์ออกมาได้ตามนี้ (ชี้ไปที่การพิสูจน์ของข้อนี้)

ครู: การที่มุมมันเท่ากันได้ หนูรู้ได้อย่างไรว่ามุมมันเท่ากันแล้วเส้นมันจะขนานกัน ?

นักเรียน: หนูคิดว่ามันน่าจะเกี่ยวกับกฎของมุมแย้งที่มันขนาน (ทำมือเป็นลักษณะเส้นที่มันขนานกัน) คือด้วยความที่พอเรารู้แล้วว่ามันเท่ากัน มันขนานกัน (ทำมือเป็นลักษณะเส้นที่มันขนานกัน) คือถ้าเราสร้างเส้นผ่านค่ะ (ลากมือเป็นเส้นผ่าน) มุมที่อยู่บนเส้น เรียกว่ามุมภายใน น่าจะเท่ากัน แบบเซต 1 และเซต 2 ก็จะแย้งกันแบบนี้ (วงไปที่มุมเซต 1 ทั้ง 2 อัน และเซต 2 ทั้ง 2 อัน) เมื่อมุมมันเท่ากันก็จะได้ว่ามันเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

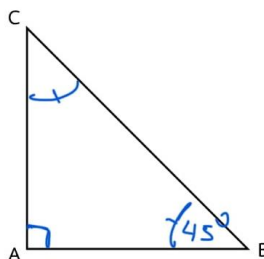
ครู: เหมือนเราใช้ทฤษฎีของมุมแย้งเข้ามาช่วย ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ข้อที่ 2 (ด้านการใช้บทนิยาม) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3

2. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านและมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



เป็น Δ มุมฉากหน้าจั่ว เนื่องจาก ผลรวมของ Δ คือ 180° มี มุม 45°

แล้ว 2 มุม 51 มุม จึงเป็น 90° จึงเป็น มุมฉาก

ภาพประกอบ 40 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 2 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุมโดยพิจารณาจากผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและมุมที่โจทย์กำหนดให้ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่ามีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน แต่จำได้เพียงแค่มุมที่ฐานเท่ากันแล้วสรุปว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว และมีการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (RL 3)

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: สิ่งที่เราอมอง เขาให้เราเป็นสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีมุมที่เท่ากัน คือมุมนี้ (ชี้ไปที่มุม C) กับมุมนี้ (ชี้ไปที่มุม B) ก็คือมุมละ 45 องศา แล้วทีนี้เขาให้พิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วไหม ? การจะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วได้จะต้องมีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมีมุม

จาก 1 มุม อันนี้หนูเริ่มต้นบอกว่าเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว
เนื่องจากผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยมคือ 180 มีมุมละ 45 อยู่ 2 มุม
แล้วหนูพิสูจน์ว่ามุมนี้เป็นมุมฉาก (ชี้ไปที่มุมฉาก) ทำไมหนูถึงมองว่ามุมนี้
เป็นมุมฉากนะลูก ?

นักเรียน: เพราะว่า ผมว่ามุมที่ฐานทั้งคู่ มีค่า 45 เท่ากัน ถ้ามุมรวมกันได้ 90 แล้ว
ผลรวมมันเป็น 180 แล้วมุมที่เป็นไปได้คือ 90

ครู: แล้วผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศาอันนั้นมันมา
จากไหนลูก ?

นักเรียน: เหมือนว่ามันจะมีสูตรไหมครับ ผมจำไม่ค่อยจะได้

ครู: มีทฤษฎีบทอะไรไหมที่เราจำมา ?

นักเรียน: เหมือนเคยเห็น แต่ผมจำไม่ค่อยได้

ครู: แต่ว่ามันรวมกันได้เท่าไหร่นะลูก ? (ชี้ไปที่มุมทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยม)

นักเรียน: 180

ครู: โอเค ทีนี้เรามีมุมฉาก 1 มุมแล้ว แต่ทีนี้เราจะพิสูจน์ว่ามันคือสามเหลี่ยม
หน้าจั่ว มองอย่างไรดีว่ามันเป็นหน้าจั่ว ?

นักเรียน: มุมที่ฐานมันเท่ากันหรือครับ ?

ครู: ด้านลูก ถ้าจะเป็นหน้าจั่วได้ เขาบอกว่าจะต้องมีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน
แล้วหนูว่าด้านไหนจะต้องยาวเท่ากันลูก ?

นักเรียน: ด้าน AC กับด้าน AB

ครู: แล้วมันจะต้องยาวเท่ากัน จะทำยังไงดีถึงบอกว่ามันยาวเท่ากันได้ เพราะ
ตอนนี้เรารู้ว่ามุมมันเท่ากัน แต่เราจะเชื่อมไปสู่ด้านที่มันยาวเท่ากันยัง
ได้บ้างลูก ?

นักเรียน: (หัวเราะ) เหมือนจะลืมครับ

ครู: ไม่เป็นไรลูก แต่ว่าเบื้องต้นเราได้ตัวของมูม แต่ว่าด้านอาจจะไม่แน่ใจถูกไหม ?

นักเรียน: ใช่ครับ

ครู: จริง ๆ คำว่าหน้าจั่ว คือเรามองแค่มุมอย่างเดียวไหม หรือเรามองด้านด้วย ในความรู้สึกเรา

นักเรียน: ที่เคยเรียนมาจำได้ว่ามันจะมี มุมที่ฐานกับด้านที่มันจะต้องเท่ากัน แต่ตอนนี้ผมจำได้แค่มุม

ครู: พอมุมมันเท่ากันนี่

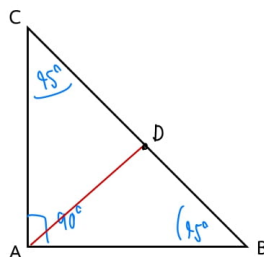
นักเรียน: มันก็จะเป็นหน้าจั่ว



ข้อที่ 2 (ด้านการใช้บทนิยาม) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4

2. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้านและมีมุมฉาก 1 มุม

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป มี $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ จงพิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



พิสูจน์
=

$$\triangle ACD \cong \triangle ABD$$

$$\textcircled{1} AD = AD ; \text{ด้านร่วม}$$

$$\textcircled{2} \angle ABC = \angle ACB ; \text{ตัวกำหนด}$$

$$\textcircled{3} CD = DB ; \text{แบ่งครึ่ง}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABD \quad (\text{บมบ ด.ม.ด.})$$

แสดงว่า

$$AC = AB ; \text{ด้านที่สมนัยกัน} \quad \checkmark$$

$$\angle CAD = 90^\circ ; \text{มุมภายใน } \triangle = 180^\circ \\ (180 - 45 - 45 = 90^\circ) \quad \checkmark$$

$\therefore$ สรุปได้ว่า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว #

ภาพประกอบ 41 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 2 ของเกรซ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรซ พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว โดยใช้การเส้นมัธยฐานไปแบ่งครึ่งเพื่อแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน เพื่อแสดงว่าด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันมาใช้ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมนี้มีด้านยาวเท่ากัน 2 ด้าน และนำทฤษฎีบท

เกี่ยวกับผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยม สิ่งที่โจทย์กำหนดมาใช้ในการแสดงว่ามีมุมฉาก 1 มุม เพื่อให้สอดคล้องกับบทนิยามที่กำหนดให้ แต่การลาก $\overline{AD}$ ไปแบ่งครึ่งยังขาดความสมเหตุสมผล ในการสรุปว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป เท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - มุม - ด้าน เนื่องจากมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันนั้น ไม่ได้อยู่ระหว่างด้านคู่ที่มีความยาวเท่ากัน ซึ่งในการกำหนดควรเลือกลากเส้นเพื่อแบ่งครึ่งมุม และการสรุปความเท่ากันทุกประการของ $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ ควรสรุปเป็นแบบ มุม - มุม - ด้าน เพื่อให้เกิดความสมเหตุสมผลที่สุด และในการพิสูจน์นี้มีการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ขั้นต้น (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของเกรซ

ครู: อันนี้มันเป็นสามเหลี่ยม ABC ที่เข้าให้มุมมา 2 มุม มุมละ 45 องศา แต่ที่นี้เขาให้พิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว แสดงว่าเราจะต้องมองภาพอย่างไรบ้าง หนูเริ่มอย่างไรบ้างนะลูก ?

นักเรียน: หนูเริ่มจากลากแบ่งครึ่ง (ทำมือเป็นลักษณะการลากเส้น) ตัวรูปใหญ่ก่อน ให้เรารู้ว่าด้าน 2 ด้านนี้เป็นสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ เพื่อให้เรารู้ว่าตัว ด้านประกอบมุมยอดมันเท่ากัน (ทำมือในลักษณะประกบกันให้เป็นมุม) ก็จะได้รู้แล้วว่ามันเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วด้วยทฤษฎีมุมภายในของสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา แล้วเขาบอกมาแล้วมุมอีก 2 มุมของสามเหลี่ยมนั้น 45 กับ 45 เท่ากัน ก็จะได้ว่า $180 - 45 - 45$ ก็จะเหลือ 90 เขาบอกว่ามุมสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก ก็แปลว่ามุมยอดจะเป็น 90 องศา ก็จะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก

ครู: การที่เราบอกว่ารูปสามเหลี่ยมมุมรวมกันได้ 180 องศา เรามองจากทฤษฎีบท ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ครู: แล้วการที่จะบอกว่าด้านที่เหลือ 2 ด้านมันจะเท่ากัน อันนี้เราก็มองจากการที่เราพิสูจน์มาใช้ไหมลูก ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

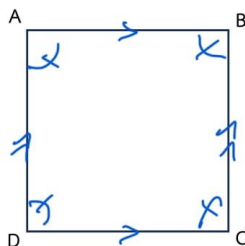
ครู: พิสูจน์มาแล้วก็แสดงว่ามันจะเป็นด้านคู่ที่สมนัยกัน ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ข้อที่ 3 (ด้านการใช้บทนิยาม) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3

3. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = \angle BAD$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



มุมทุกมุมเท่ากัน // มุมรวมของ 1] คือ 360°

// มุมทุกมุม เช่น 90° // แล้ว ด้าน ทุกด้านยังไม่ทราบว่าเท่ากัน หรือไม่ใช่

จึงสรุป ไม่ได้ ว่า สี่เหลี่ยม

ภาพประกอบ 42 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 3 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมาใช้ในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในเป็น 360 องศา และมุมแต่ละมุมมีขนาดเท่ากันตามที่โจทย์กำหนด จึงสรุปได้ว่ามุมแต่ละมุมมีขนาด 90 องศา แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าด้านแต่ละด้านมีความยาวเท่ากัน ทราบเพียงขนาดกัน จากสิ่งที่โจทย์กำหนด ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (RL 3)

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: ที่นี้ข้อต่อมาเกี่ยวกับสี่เหลี่ยม ซึ่งมุมทุกมุมมันเท่ากัน แล้วด้านตรงข้ามมันขนานกันหมดเลย ที่นี้เขาอยากให้เราพิสูจน์ว่าสี่เหลี่ยมนี้คือสี่เหลี่ยมจัตุรัสไหม ? ถ้าจะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ ด้านทุกด้านต้องยาวเท่ากัน มุมทุกมุมต้องเป็นมุมฉาก

นักเรียน: ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเป็น 360 องศา ทุกมุมมันเท่ากันหมด (ชี้ไปที่มุมของรูปสี่เหลี่ยม) ก็จะหาได้ว่าแต่ละมุมมันเท่ากับ 90 องศา คือมุมฉาก

ครู: มันมาจากไหนลูก 90 องศา เราลองอย่างไรดีว่าแต่ละมุมเป็น 90 องศา ?

นักเรียน: เพราะว่ามันเป็นรูปสี่เหลี่ยม มันมี 4 มุม แล้วผลรวมมุมภายในของมันเป็น 360 องศา ผมเลยเอา 4 ไปหารเลย

ครู: เอา 4 หาร 360 ?

นักเรียน: ใช่ครับ ผมเลยได้ค่าแต่ละมุมมา

ครู: พอมุมทุกมุมมันมีขนาดเท่ากับ 90 องศา แล้วเราบอกว่า แล้วด้านทุกด้านยังไม่ทราบว่ามันเท่ากันหมดหรือไม่จึงสรุปไม่ได้ว่าเป็นหรือไม่เป็น ?

นักเรียน: ผมนึกไม่ออกว่าจะหาว่าด้านแต่ละด้านมันจะเท่ากันอย่างไร

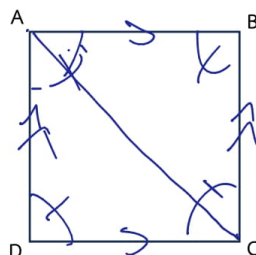
ครู: ก็คือเราไม่สามารถสรุปได้ว่ามันไม่มีอะไรที่จะเชื่อมโยงได้ว่าด้านแต่ละด้านมันยาวเท่ากัน ?

นักเรียน: ใช่ รู้แค่ว่ามันขนานกัน

ข้อที่ 3 (ด้านการใช้บทนิยาม) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4

3. บทนิยาม รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป มี $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
จงพิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมให้เหตุผลประกอบ



จากรูปจะเห็นว่า $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (อ.ม.ด.)

$$\widehat{B} = \widehat{D}, \widehat{BAC} = \widehat{DCA}, \overline{AC} = \overline{CA}$$

จึงทราบว่า $AB = DC, BC = AD$

• มุมแต่ละมุม = 90° เพราะ มุมภายใน $\square = 360$

$\therefore \square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ภาพประกอบ 43 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการใช้บทนิยาม ข้อที่ 3 ของต้นข้าว

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า ต้นข้าว พิจารณาว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการใช้การลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วแสดงความเท่ากันทุกประการแบบ มุม - มุม - ด้าน จะได้ว่าด้านที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน แล้วแสดงว่ามุมแต่ละมุมเป็นมุมฉากโดยใช้ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จึงสรุปได้ว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่นักเรียนไม่ได้แสดงว่าด้านทุกด้านมีความยาวเท่ากันอย่างไร โดยพิสูจน์เพียงแค่ด้านตรงข้ามมีความยาวเท่ากันเท่านั้น จึงทำให้ขาดความสมเหตุสมผลในการสรุปว่าแต่

ละด้านมีความยาวเท่ากัน ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบหลายขั้นตอน แสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 ขั้นต้น (RL 4)

บทสัมภาษณ์ของต้นข้าว

ครู: อันนี้เขาบอกว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสถูกไหมลูก สี่เหลี่ยมจัตุรัสคือรูปที่ด้านทุกด้านยาวเท่ากันแล้วมุมทุกมุมเป็นมุมฉากด้วย แล้วทีนี้เรามอยังไงบ้างที่พิสูจน์ว่าเป็นจัตุรัสไหม เขาให้อะไรมาบ้าง ?

นักเรียน: เขาให้ว่ามันขนานกันครับ (ชี้ไปที่ด้านที่ขนานกัน)

ครู: แล้วเราพิสูจน์อย่างไรลูกว่าเป็นจัตุรัส ?

นักเรียน: ผมเราจากการแบ่งก่อนครับ (ชี้ไปที่เส้น AC) แล้วเริ่มพิสูจน์ก่อนว่าสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันจริง (ชี้ไปที่ $\triangle ADC$ และ $\triangle CBD$) แบบ มุม - มุม - ด้าน ครับ พอรู้ว่าสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันแล้ว เมื่อรู้ว่ามุมแต่ละมุมมันเท่ากัน แล้วเรารู้ว่าในสี่เหลี่ยม มุมภายในคือ 360 องศา เราจึงนำ 360 มาหารด้วย 4 จะได้แต่ละมุมเท่ากับ 90 ครับ

ครู: แล้วการพิสูจน์ มุม - มุม - ด้าน หนูใช้มุมไหน ด้านไหนบ้างนะลูก ?

นักเรียน: มุมนี้ มุมนี้และด้านนี้ครับ (ชี้ไปที่มุม ADC และมุม DCA กับด้าน AC)

ครู: แล้วเรารู้ได้อย่างไรลูกว่ามุมนี้กับมุมนี้จะต้องเท่ากัน (ชี้ไปที่มุม ACD และมุม CAB)

นักเรียน: ผมคิดว่ามันน่าจะใช่ครับ

ครู: เราก็เลยได้อันนี้เป็น มุม - มุม - ด้าน ใช่ไหมลูก

นักเรียน: ใช่ครับ (พยักหน้า)

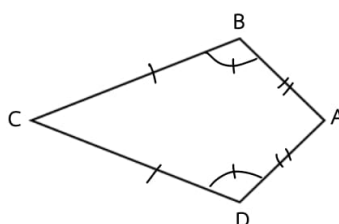
ครู: พอมันเท่ากันทุกประการแล้วเราก็เลยสรุปได้เลยใช่ไหม ว่าแต่ละด้านมันเป็นยังไงกัน ?

นักเรียน: เท่ากันครับ เท่ากันจากการที่รูปสามเหลี่ยมมันเท่ากันทุกประการ

การกำหนดบทนิยาม

ข้อที่ 1 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

- กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว



- มีด้านประชิดยาวเท่ากัน 2 คู่
- เส้นทแยงมุมตัดกัน เป็นมุมฉาก
- มุมที่อยู่บนหน้าทแยงมุมมีขนาดเท่ากัน

ภาพประกอบ 44 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 1 ของเกรซ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรซ ระบุสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวโดยพิจารณาจากสิ่งที่เคยเรียนมา ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (FL2)

บทสัมภาษณ์ของเกรซ

ครู: อันนี้เกี่ยวกับการกำหนดบทนิยาม เป็นลักษณะของการที่หนูมองรูปแล้วหนูเห็นอะไรบ้างจากตรงนี้ เราอาจจะมีการลากเส้นหรือใช้บทนิยามอะไรต่างๆ เข้ามาด้วย อย่างอันนี้ข้อที่ 1 เองเราระบุสมบัติว่ามีด้านประชิดยาว

เท่ากัน 2 คู่ เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก หรือมุมตรงข้ามแนทแยงมีขนาดเท่ากัน หนูใช้อะไรในการพิจารณาถูก ?

นักเรียน: หนูมองรูปอย่างเดียวนะคะ หนูลองแบ่งครึ่งตัวเส้นทแยงมุมก่อน (ลากเส้นทแยงมุม) จะได้แบบนี้ แล้วมันจะตัดกันเป็นมุมฉาก จะได้ว่า ด้านนี้กับด้านนี้ก็จะมีค่าที่เท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน CB กับ CD) ฝั่งนี้กับฝั่งนี้ก็เท่ากันด้วย (ชี้ไปที่ด้าน AB กับ AD) แล้วหนูรู้สึกว่ามันเท่ากัน ตรงนี้ก็น่าจะเป็นมุมที่เท่ากันด้วย (ชี้ไปที่มุม ABC และมุม ADC)

ครู: ก็คือว่าเราใช้การลากเส้นด้วยใช่ไหม ?

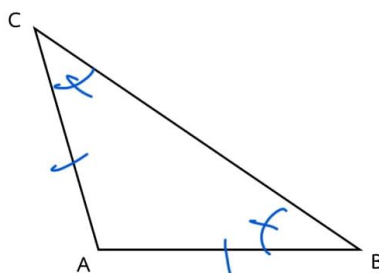
นักเรียน: ใช่ค่ะ

ครู: แล้วเรามีการใช้บทนิยามตรงไหนไหม ?

นักเรียน: ก็บ้างค่ะ ดูควบคู่กันไป

ข้อที่ 2 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

2. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่วตั้งรูป จงระบุสมบัติทั้งหมดของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว



- ๖ ขอบ
- ด้านสองด้านเท่ากัน
- มุมที่ฐานเท่ากัน ๕ มุม

ภาพประกอบ 45 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 2 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน ระบุสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว โดยพิจารณาจาก “สิ่งที่เคยเรียนมา” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (FL2)

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: อันนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว ถ้าให้เราระบุสมบัติที่เกี่ยวข้องเรามองภาพว่ามีมุมป้าน 1 มุม แล้วเรารู้ได้อย่างไรว่ามีมุมป้าน 1 มุม ?

นักเรียน: เนื่องจากโจทย์บอกว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหน้าจั่ว ดูในรูปก็เห็นว่ามุมไหนจะเป็นมุมป้าน แล้วคำว่าหน้าจั่ว มุมที่ฐานมันจะต้องเท่ากัน

ครู: ก็เลยตอบว่ามุมที่ฐานเท่ากัน 2 มุม แล้วด้าน 2 ด้านเท่ากันคืออย่างไร ?

นักเรียน: แบบที่เคยเรียนมาครับ

ครู: แบบที่เคยเรียนมา แล้วตรงไหนที่มันบอกบ่งบอกว่าด้าน 2 ด้านต้องยาวเท่ากัน ?

นักเรียน: เพราะเป็นรูปหน้าจั่วครับ

ครู: มีอะไรเพิ่มเติมไหมจากที่เราเห็น

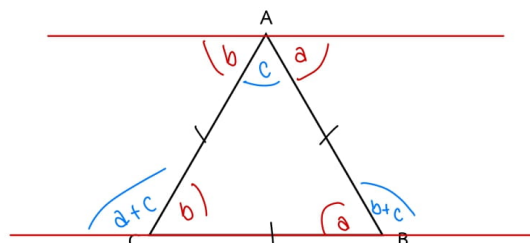
นักเรียน: ไม่ครับ



ข้อที่ 3 (ด้านการกำหนดบทนิยาม)

3. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



$$\text{บทสันตอง} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

จากทฤษฎีบท 1 หน้าจั่ว มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน

$$\begin{aligned} \text{ทศ } ① &= A \text{ เป็นจุดยอด} ; \hat{b} = \hat{c} \\ &= B \text{ เป็นจุดยอด} ; \hat{c} = \hat{a} \\ &= C \text{ เป็นจุดยอด} ; \hat{a} = \hat{b} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{สรุปได้ว่า} \\ \hat{a} = \hat{b} = \hat{c} \end{array}$$

$$\text{มุมภายใน} \quad \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} ; \hat{a} = \hat{b} = \hat{c} &= \frac{180}{3} \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 46 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 3 ของเกรซ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรซ พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม โดยการตีเส้นขนาน แล้วใช้ทฤษฎีบทของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่กล่าวว่า ถ้าจุดไหนเป็นจุดยอดมุมที่ฐานจะมีขนาดเท่ากัน จะได้ว่ามุมแต่ละมุมมีขนาดเท่ากัน แล้วนำไปหา

ขนาดของมุมแต่ละมุมโดยใช้ทฤษฎีบทของมุมแย้งในการหามุมที่มีขนาดเท่ากัน แล้วพิจารณา
ร่วมกับทฤษฎีของมุมตรง ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (FL4)

บทสัมภาษณ์ของเกรซ

ครู: เขาให้มาว่ามันเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า พอมันเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
มันมีด้านทั้ง 3 ด้านยาวเท่ากันแล้วมุม 3 มุมมันจะเท่ากันไหม ?

นักเรียน: หนูใช้หลักทฤษฎีบทของสามเหลี่ยมหน้าจั่วเข้ามาช่วยด้วย

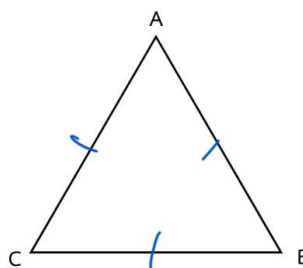
ครู: อย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: อันนี้หนูตีเส้นขนาน 2 เส้นก่อน (ชี้ไปที่เส้นขนานที่ลาก) เพื่อดูมุมแย้ง
ตรงไหนมันเป็นมุมอะไรยังงี้บ้าง ตอนแรกหนูคิดอยู่นานมากว่าจะพิสูจน์
อย่างไรให้มุมมันเท่ากัน หนูก็เลยพยายามดูทฤษฎีที่จะช่วยได้บ้าง ก็ได้
ว่าทฤษฎีบทของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าจัดไหนเป็นจุดยอด มุมที่ฐานจะมี
ขนานเท่ากัน หนูก็เลยแทนจุด A เป็นจุดยอด เราจะได้ว่ามุม b กับมุม a
จะมีขนาดเท่ากัน แล้วถ้าเราเปลี่ยน B เป็นจุดยอด ก็จะได้ว่า $c = b$ พอ
เราเปลี่ยน C เป็นจุดยอดก็จะได้ว่า $a = c$ เราสามารถใช้จุดไหนเป็นจุด
ยอดก็ได้เพราะด้วยความที่มันเท่ากันทุกด้าน (ทำมือเป็นลักษณะด้านของ
รูปสามเหลี่ยม) โจทย์บอกมาว่ามันเท่ากันทุกด้านเพราะว่ามันเป็น
สามเหลี่ยมด้านเท่า

ข้อที่ 3 (ด้านการกำหนดบทนิยาม) ที่ไม่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

3. บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสามด้านยาวเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป จากบทนิยามข้างต้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุมหรือไม่ เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ



เนื่องจาก มุมรวม Δ คือ 180° ด้านเท่ากันทุกด้าน

มุมจะเท่ากันทุกมุมด้วย

ภาพประกอบ 47 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการกำหนดบทนิยาม ข้อที่ 3 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิจารณาว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากัน 3 มุม โดยพิจารณาจากสิ่งที่เคยเรียนรู้มาก่อนเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าว่า ถ้ามีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน มุมจะมีขนาดเท่ากัน 3 มุม แต่ไม่สามารถแสดงการพิสูจน์ได้ว่ามุมแต่ละมุมมีขนาดเท่ากันอย่างไร จึงแสดงว่าไม่เกิดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: ข้อนี้เขาให้มาว่ามันคือสามเหลี่ยมด้านเท่า จากบทนิยามแล้วมุมมันจะเท่ากัน 3 มุมไหม ทำไมมุมถึงเท่ากัน จากที่เราตอบคือเรามองภาพว่ามันรวมกันได้ 180 องศา ถ้าด้านเท่ากันมุมก็จะเท่ากันด้วย ?

นักเรียน: ใช่ครับ

ครู: เรามองอย่างไรลูก ถ้าเป็นด้านเท่ากัน มุมก็จะเท่ากันด้วย ?

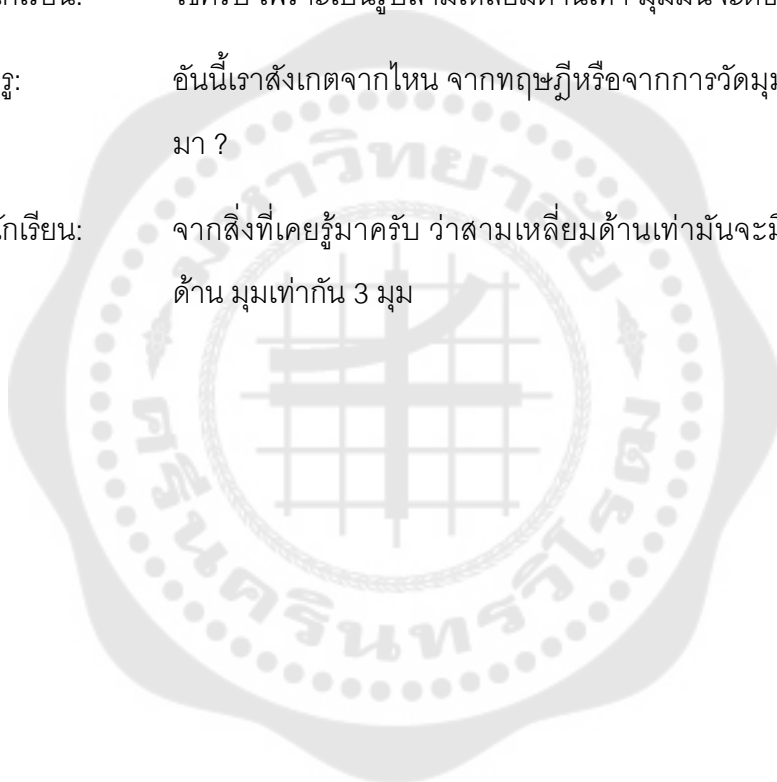
นักเรียน: เพราะว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าใช่ไหมครับ แล้วมุมรวมของมุมจะเท่ากับ 180 องศา ก็จะรู้ว่าแต่ละมุมมันเท่ากับ 60 องศา

ครู: ทำไมมุมแต่ละมุมต้องเป็น 60 องศา มุมมันเท่าด้วย ?

นักเรียน: ใช่ครับ เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มุมมันจะต้องเท่ากันหมด

ครู: อันนี้เราสังเกตจากไหน จากทฤษฎีหรือจากการวัดมุมหรือจากสิ่งที่เคยรู้มา ?

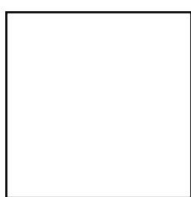
นักเรียน: จากสิ่งที่เคยรู้มาครับ ว่าสามเหลี่ยมด้านเท่ามันจะมีด้านยาวเท่ากัน 3 ด้าน มุมเท่ากัน 3 มุม



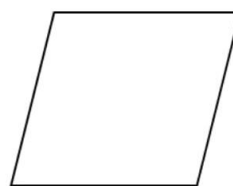
ด้านการจัดหมวดหมู่

ข้อที่ 1 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

- กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้
 - จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 - จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
 - จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

① : ด้านตรงข้ามเท่ากัน | ค. ขวาล้านเท่ากัน 4 ด้าน.
: มุมตรงข้ามเท่ากัน

② : ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน
: มุมฉาก 4 มุม

③ : ไม่มี

ภาพประกอบ 48 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 1 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยพิจารณาจาก “ความเียงของภาพ” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (CL1) แลพิจารณาจาก

“การวัดความยาว” และ “ทฤษฎีบท” ที่เคยเรียนรู้มา ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (CL2)

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: ข้อนี้สิ่งที่หนูเห็น เป็นการมองภาพว่ามันมีสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน แล้วอันที่มันเหมือนกันทั้ง 2 อัน เราเห็นว่ามีอะไรเหมือนกัน ซึ่งหนูตอบว่าด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามเท่ากัน อันนี้เราสังเกตอย่างไรบ้าง สังเกตจากการวัด ชิดเส้น หรือดูจากทฤษฎีที่เราเคยจำมา?

นักเรียน: มาดูจากทฤษฎีที่เราเคยจำมาด้วยและดูจากรูปด้วยครับ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะเห็นว่ามุมตรงข้ามมันก็ 90 เหมือนกัน เพราะแต่ละมุมก็ 90 องศาอยู่แล้ว ส่วนสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จะเห็นว่ามันก็ออกเป็นมุมแหลม ๆ (ชี้ไปที่มุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน) ก็เลยตีความว่าเป็นมุมตรงข้ามเท่ากัน

ครู: แล้วนอกจากนี้เราเห็นว่ามีอะไรเหมือนกันอีกไหมในสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับขนมเปียกปูน ?

นักเรียน: ไม่แน่ใจว่าด้านทุกด้านเท่ากันไหม

ครู: ถ้าจะดูว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากันไหม เราจะใช้วิธีการอย่างไรดี ?

นักเรียน: วัดได้ไหมครับ ?

ครู: วัดได้ลูก เราจะใช้อะไรวัดดี ใช้ไหมบรรทัดวัดไหม หรือมีอะไรพอจะกะวัดได้บ้าง ?

นักเรียน: (เอาไม้บรรทัดวัดความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ประมาณ 2.6 ครับ (เอาไม้บรรทัดวัดความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน) ขนมเปียกปูนด้านนี้ได้ 2.6 เหมือนว่าจะไม่เท่ากันครับ (มองเทียบความยาวของรูปสี่เหลี่ยมทั้ง 2 รูปที่ได้จากการวัด)

ครู: แต่ว่าความยาวด้านในรูปของมันเองมันเท่ากันไหมลูก ?

นักเรียน: (เอาไม้บรรทัดวัดความยาวด้านอีกครั้งที่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน)
เท่ากันครับ ก็คือในแต่ละรูปจะเท่ากัน

ครู: ก็คือความยาวด้านในแต่ละด้านมันเท่ากันด้วย ?

นักเรียน: ใช่ครับ

ครู: เท่ากันกี่ด้านลูก ?

นักเรียน: 4 ด้านครับ

ครู: แล้วสิ่งที่หนูเห็นที่มีแค่ในจัตุรัสอย่างเดียว หนูมองภาพอย่างไรบ้าง ซึ่งหนู
บอกว่าด้านทุกด้านยาวเท่ากัน เป็นมุมฉากเหมือนกัน อันนี้หนูสังเกต
อย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: ไม่มีในขนมเปียกปูน จะสังเกตเห็นว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสมันจะเป็นมุมฉาก
หมดแล้ว หมดทั้ง 4 มุม ส่วนสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเหมือนรูปมันโย้ไป
แล้ว มุมก็เลยเปลี่ยนไปเลย

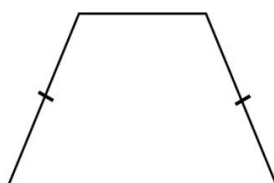
ครู: หนูก็เลยมองในมุมว่าถ้ามีแค่ในจัตุรัสอย่างเดียว มุมทุกมุมก็จะเป็นมุม
ฉาก ส่วน แต่ถ้ามีแค่ในเปียกปูนอย่างเดียวคือไม่มีมุมฉาก อันนี้หนูมอง
จากลักษณะของภาพว่ามีการโย้ ก็เลยไม่ฉากใช่ไหม ?

นักเรียน: ใช่ครับ

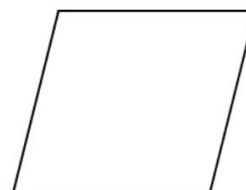
ข้อที่ 2 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

2. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแต่ไม่มีอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

- ① - มีด้านทั้ง 4 ด้านเท่ากัน
- ② - ถ้า 4 ด้าน 4 ด้านเท่ากัน แล้วจะบอกได้ว่า
- มีด้านคู่ขนาน 1 คู่
- ③ - ด้านทุกด้านของเท่ากัน
- ด้าน 2 ด้านขนานกัน 2 คู่

มีด้าน 4 ด้าน

✓

ภาพประกอบ 49 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 2 ของเกรซ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรซ จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยพิจารณาจาก “การลากเส้น” และ “สิ่งที่เคยเรียนรู้มา” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (CL2)

บทสัมภาษณ์ของเกรซ

ครู: อย่างข้อ 2 มันมีคางหมูกับเปียกปูนที่หนูมองเห็น สิ่งเหมือนกันคือด้านที่ขนานกัน มันมีด้านที่ขนานกันยังไหมบ้าง จากที่หนูมอง ?

นักเรียน: ใน 2 รูปนี้จะมีด้านที่ขนานกัน แต่จำนวนมันจะไม่เท่ากัน ก็คือถ้าเป็นสี่เหลี่ยมคางหมูมันจะมีแค่คู่เดียว แต่ถ้าเป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมันจะมี 2 คู่

ครู: อย่างอันนี้หนูมองจากลักษณะภายนอก มองด้วยตาหรืออย่างไร ?

นักเรียน: สิ่งที่เคยเรียนมาค่ะ

ครู: แล้วถ้ามีในแค่คางหมูอย่างเดียวล่ะ ?

นักเรียน: ถ้าคางหมูอย่างเดียว ด้านที่เป็น ระหว่างคู่ขนานจะเท่ากัน (ทำมือแสดงถึงด้านข้าง ๆ ที่เท่ากัน)

ครู: แล้วด้านบนล่างต้องเป็นอย่างไรกัน ?

นักเรียน: ขนานกัน 1 คู่

ครู: แล้วถ้าเป็นเปียกปูนอย่างเดียวล่ะ ?

นักเรียน: ด้านทุกด้านยาวเท่ากันหมดเลย

ครู: แล้วมีสมบัติอื่น ๆ ที่หนูมองเห็นเพิ่มเติมอีกไหม ? ที่เรารู้สึกว่าคล้าย ๆ กัน

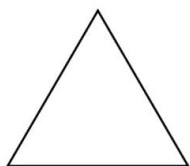
นักเรียน: หนูว่าเส้นทแยงมุมของคางหมูน่าจะตัดกันไม่เป็นมุมฉากแน่ ๆ ส่วนสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจะเป็นมุมฉากค่ะ

ครู: อันนี้ลากเส้น หรือมอง หรืออย่างไรดี ?

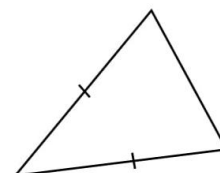
นักเรียน: ลากเส้นค่ะ

ข้อที่ 3 (ด้านการจัดหมวดหมู่)

3. กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้
- 1) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่เหมือนกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
 - 2) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว
 - 3) จงระบุสมบัติทั้งหมดที่มีแค่ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่วแต่ไม่มีอยู่ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว

- ① -มุมทุกมุมใน Δ มีขนาดพอๆกัน 90°
- ② -ด้านทุกด้านยาว เท่ากัน , มุมทุกมุม 3 มุม
- ③ -มีแกนเท่ากัน 2 ด้าน , มุม 2 มุม เท่า

ภาพประกอบ 50 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการจัดหมวดหมู่ ข้อที่ 3 ของเกรซ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรซ จำแนกความเหมือนและความแตกต่างกันเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมหน้าจั่ว โดยพิจารณาจาก “สัญลักษณ์ที่กำหนดให้” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 1 (CL1) และพิจารณาจาก “สิ่งที่เคยเรียนรู้มา” ซึ่งแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 (CL2)

บทสัมภาษณ์ของเกรซ

ครู: อย่างข้อนี้เอง สมบัติที่มันมีเหมือนกันทั้งด้านเท่าแล้วก็มุมแหลมหน้าจั่ว คืออย่างไรที่เรามองภาพ ?

นักเรียน: จากสิ่งที่เคยรู้มาเลยรู้ว่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและมุมแหลมหน้าจั่วจะมีขนาดน้อยกว่า 90 องศา

ครู: มุมแต่ละมุมใช่ใหมลูก ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ

ครู: แล้วถ้ามันมีแค่ในด้านเท่าอย่างเดียวล่ะลูก มาจากไหน ?

นักเรียน: ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน มุมทุกมุมเท่ากันหมดเลย มาจากสิ่งที่เคยรู้มาค่ะ

ครู: อย่างข้อ 3 ถ้ามีแค่ในมุมแหลมอย่างเดียวล่ะ ?

นักเรียน: ด้านประกอบมุมยอดเท่ากัน แล้วก็มุมที่ฐานเท่ากัน

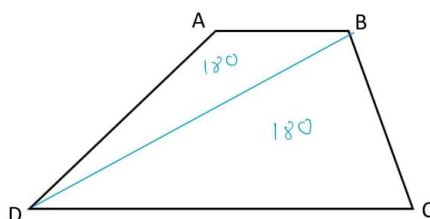
ครู: รู้ได้อย่างไรว่าด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน

นักเรียน: จากรอยขีดที่เขาให้มาค่ะ

ด้านการพิสูจน์

ข้อที่ 1 (ด้านการพิสูจน์) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3

1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



ภาพประกอบ 51 แสดงผลการทำทํานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 1 ของต้นข้าว

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า ต้นข้าว พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วพิจารณาว่ามุมภายในรูปสามเหลี่ยมแต่ละมุมมีขนาด 180 องศา ทำให้ทราบว่าผลรวมมุมภายใน เป็นการพิสูจน์แบบขั้นตอนเดียว และแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 3 (PL3)

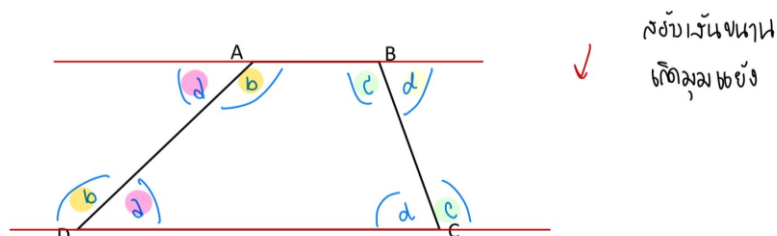
บทสัมภาษณ์ของต้นข้าว

ครู: ถ้าจะพิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในเป็น 360 องศาเราจะพิสูจน์อย่างไรดี ?

นักเรียน: ผมคิดว่าลากเส้นเพื่อแบ่งเป็นสามเหลี่ยม 2 รูป แล้วคิดทีละรูปได้ (ชี้ไปที่เส้น BD) แล้วมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมละ 180 แล้วมันจะรวมกันได้ 360 องศา

ข้อที่ 1 (ด้านการพิสูจน์) ที่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4

1. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป จงพิสูจน์ว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



$$\text{มุมบนเส้นตรง} = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{จากรูป} \quad \hat{a} + \hat{b} &= 180^\circ \\ \hat{c} + \hat{d} &= 180^\circ \end{aligned}$$

$$\text{มุมภายใน } \square \text{ คางหมู} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360^\circ$$

ภาพประกอบ 52 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 1 ของเกรซ

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรซ พิสูจน์ว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา โดยการสร้างเส้นขนานบนด้านขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแล้วพิจารณาร่วมกับทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับมุมแย้งเพื่อหามุมที่มีขนาดเท่ากัน และมุมตรงในการแสดงว่าผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีขนาด 360 องศา ซึ่งมาจากมุมตรง 2 มุมรวมกัน มีการพิสูจน์หลายขั้นตอน และแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

บทสัมภาษณ์ของเกรซ

ครู: ถ้าเป็นสี่เหลี่ยมคางหมู หนูพิสูจน์อย่างไรว่ามุมของเรามันรวมกันได้ 360 องศา ?

นักเรียน: หนูสร้างเส้นขนานต่อจากตัวสี่เหลี่ยมคางหมู ตัวด้านคู่ขนานมันเท่ากัน อยู่แล้ว ก็สร้างต่อไป แล้วเราก็กำหนดมุมในสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นมุม a b

c d แล้วเราก็ดูมุมแย้งค่ะ ก็จะเป็น a แฉงขึ้นไป (ชี้ไปที่มุม a) b แฉงลงมา (ชี้ไปที่มุม b) c แฉงลงมา (ชี้ไปที่มุม c) และ d แฉงขึ้นไป (ชี้ไปที่มุม d) แล้วพอเรามาดู มันจะมีทฤษฎีที่ว่า มุมตรงมีขนาด 180 องศา เราจะรู้ว่า a b รวมกันได้ 180 องศา (ชี้ไปที่มุม a กับ b) c d ก็รวมเป็น 180 องศา (ชี้ไปที่มุม c กับ d) พอเรามาดูที่เราแทนไว้ ตัว a b c d ก็คือมุมภายในของสี่เหลี่ยมคางหมูเหมือนกัน แล้วก็ไปเทียบกับตัวเส้นขนานบนเส้นตรงได้ ก็จะได้ว่าเป็นมุมบนเส้นตรง 2 คู่ เท่ากับ 180 ก็จะได้มุมภายในของสี่เหลี่ยมคางหมูเท่ากับ $180 + 180$ เป็น 360 องศา

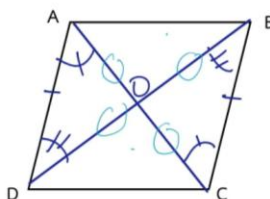
ครู: เราใช้ตัวทฤษฎีที่เกี่ยวกับผลรวมมุมภายในของมุมตรงเข้ามาช่วย ?

นักเรียน: ใช่ค่ะ



ข้อที่ 2 (ด้านการพิสูจน์)

2. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



พิสูจน์ว่า $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (ม.ด.ม.)

$$\hat{A} = \hat{C}, AD = CB, \vec{AO} = \vec{CO}$$

จึงได้ว่า $AO = CO$

และจากการพิสูจน์ข้างต้นจะได้ว่า $\triangle AOD \cong \triangle COB$ และ $\triangle AOB \cong \triangle COD$
จึงได้ว่า $BO = DO$

$\therefore$ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งกัน

ภาพประกอบ 53 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 2 ของต้นข้าว

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า ต้นข้าว พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 4 รูป แล้วเลือกพิจารณารูปสามเหลี่ยม 2 รูป โดยนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมแย้งและสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมาใช้ในการให้เหตุผล และแสดงความเท่ากันทุกประการแบบ มุม - ด้าน - มุม ซึ่งเป็นการให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล มีการพิสูจน์หลายขั้นตอน และแสดงถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

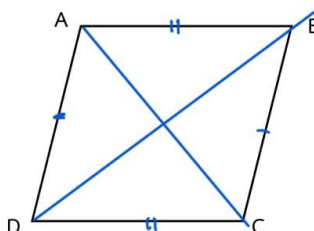
บทสัมภาษณ์ของต้นข้าว

ครู: อันนี้คือเรามองว่าอย่างไรบ้าง เขาให้พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน เราเริ่มต้นอย่างไรบ้าง ?

นักเรียน: จากสมบัติของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน กล่าวว่า ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน ผมจึงเริ่มลากเส้นทแยงมุมครับ ชีตเส้น (ชีตเส้น AC กับ BD) แล้วผมจึงเริ่มพิสูจน์ว่าด้านนี้กับด้านนี้ (ด้าน AD กับ BC) เท่ากันทุกประการ เลยใช้มุม - ด้าน - มุม ครับ มุมตรงนี้ (ชี้ไปที่มุม DAC ACB CBD และ BDA) แล้วก็ด้าน (ชี้ไปที่ด้าน AD กับ BC) มุม - ด้าน - มุม ตรงนี้ แล้วทำให้รู้ว่าด้านนี้กับด้านนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่ AO กับ OC) เพราะเป็นส่วนหนึ่งของเส้นทแยงมุมทั้งสอง เช่นเดียวกับตรงนี้ครับ ตรงนี้ กับตรงนี้ก็ต้องเท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน DO กับ OB) มันจึงแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

ข้อที่ 2 (ด้านการพิสูจน์) ที่ไม่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนดังรูป จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



ภาพประกอบ 54 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 2 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยการลากเส้นทแยงมุมเพื่อแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปแล้วแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แต่ไม่สามารถนำไปสู่การพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน จึงแสดงว่าไม่เกิดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: อันนี้การที่เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันหนูได้ใหมลูก ?

นักเรียน: ไม่ค่อยมั่นใจ

ครู: อย่างไรดีลูกในการให้เหตุผล ?

นักเรียน: ใช้การเท่ากันทุกประการได้ไหมครับ ?

ครู: ได้เลย มีความน่าสนใจมาก แล้วครูเห็นว่าเรามีการขีดด้วยว่าแต่ละด้านยาวเท่ากัน (ชี้ไปที่ด้านแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน) ?

นักเรียน: ลองขีดเส้นทแยงมุมดูแล้วมันเหมือนจะขนานกันด้วย แล้วก็มันจะเท่ากันด้วยครับ ก็เลยลองขีดดูว่ามันจะช่วยอะไรไหม ?

ครู: แล้วเป็นอย่างไรบ้าง

นักเรียน: แล้วถ้าใช้การเท่ากันทุกประการแบบที่เคยทำก่อนหน้านี้ได้ไหม ?

ครู: ได้เลย

นักเรียน: เป็น ด้าน - ด้าน - ด้าน หรือครับ ?

ครู: ลองโยงได้ไหมลูกว่ามีด้านไหนบ้าง ?

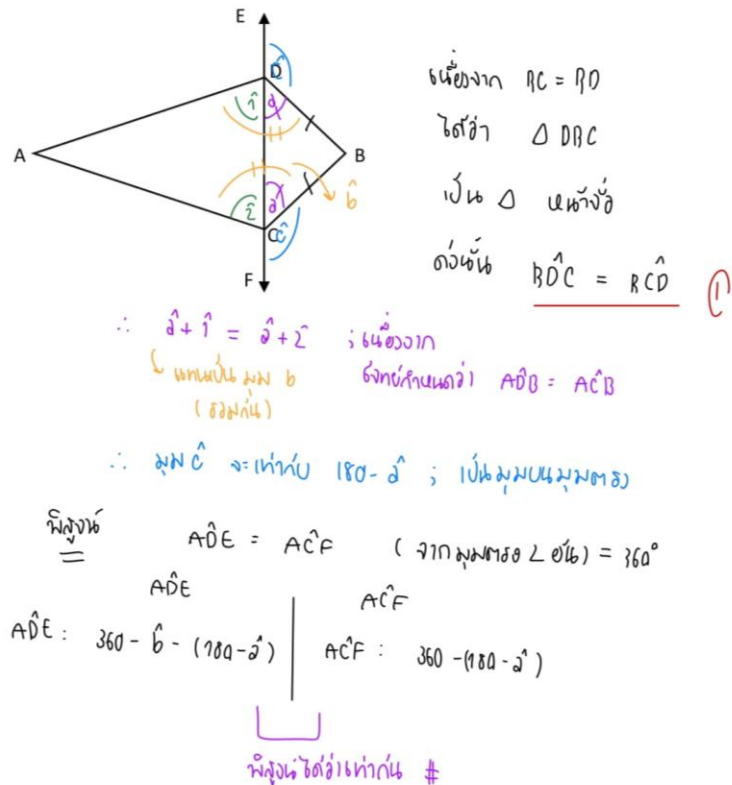
นักเรียน: ด้านนี้ (ชี้ไปที่ด้าน AD) เท่ากันกับด้านนี้ (ชี้ไปที่ด้าน BC) ด้านนี้ (ชี้ไปที่ด้าน AB) เท่ากันกับด้านนี้ (ชี้ไปที่ด้าน CD) ส่วนเส้นนี้จะเป็นด้านร่วม

ครู: แสดงว่าสามเหลี่ยม 2 รูปนี้เท่ากันทุกประการ (ชี้ไปที่รูปสามเหลี่ยม BAD และรูปสามเหลี่ยม DCB) แต่มันต้องการให้เส้นทแยงมุมมันแบ่งครึ่ง ถ้ามันจะแบ่งครึ่งกันได้ เราอาจจะต้องมองเป็นรูปเล็กลงหน่อยไหม แล้วมันมีมุมไหนที่มันเท่ากันบ้างไหมลูก ไล่เป็นตัวเลขก็ได้ ?

นักเรียน: (มองไปที่รูป) คิดไม่ออกครับ

ข้อที่ 3 (ด้านการพิสูจน์)

3. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ และ $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



ภาพประกอบ 55 แสดงผลการทำนงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 3 ของเกรท

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า เกรท พิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$ โดยการนำนิยามที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาให้ร่วมกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ในการแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วจะได้ว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากันจากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วแสดงว่ามุมที่ต้องการพิสูจน์มีขนาดเท่ากัน โดยนำมุมที่กำหนดให้ซึ่งอยู่บนเส้นตรง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับมุมตรงจำนวน 2 มุม มีขนาด 360 องศา มาใช้ในการให้เหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล มีการพิสูจน์หลายขั้นตอน ซึ่งถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับที่ 4 (PL4)

บทสัมภาษณ์ของเกรท

ครู: จากข้อนี้เราเริ่มต้นจากอย่างไรก่อนลูก ?

นักเรียน: หนูคิดว่า ด้วยความที่โจทย์กำหนดมาว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เขาไม่ได้กำหนดมาว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมอะไร หนูไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทอะไรช่วยได้เลย

ครู: แต่ว่ามี BC กับ BD มาให้ ว่าด้านนี้ยาวเท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน BC กับ BD)

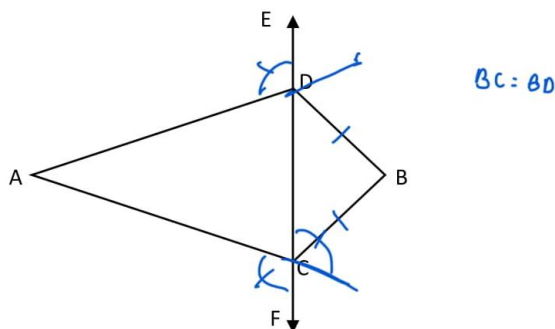
นักเรียน: ใช่ค่ะ ก็เลยคิดว่าสามเหลี่ยมนี้ก็เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วแล้ว (ลากเส้นรอบสามเหลี่ยม BDC) แปลว่ามุมที่ฐานก็ต้องเท่ากัน พอเราดูมุมที่ฐานเท่ากันแล้ว (ชี้ไปที่มุม a ที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว) พอเราดูอีกฝั่ง ก็จะเป็น $180 - a$ (ชี้ไปที่มุม BCF และมุม BDE) อันนี้ก็แทนเอาไว้ก่อน แล้วจากที่โจทย์กำหนดให้ จะได้ว่ามุม $a + 1$ มีขนาดเท่ากับมุม $a + 2$ หนูเลยกำหนดให้เป็นมุม b

ครู: แล้วเราทำอย่างไรต่อ ?

นักเรียน: หนูก็เลยเอาตัวแปรทั้งหมดมาลบกัน ก็จะได้ว่ามุมตรง 2 อันเป็น 360 ลบมุม b (ชี้ไปที่มุม b) ลบมุม a (ชี้ไปที่มุม a) ลบ $180 - a$ (ชี้ไปที่มุม $180 - a$) ก็เหลือเป็นมุมที่เราต้องการ (ชี้ไปที่มุม ADE) ก็จะได้ว่าเป็น $180 - b$ ส่วนอีกฝั่งหนึ่ง (ชี้ไปที่มุม ADE) ส่วนอีกฝั่งหนึ่งก็เหมือนกันค่ะ ก็จะเป็นมุมตรง 2 อันเป็น 360 ลบมุม b (ชี้ไปที่มุม b) ลบมุม a (ชี้ไปที่มุม a) ลบ $180 - a$ (ชี้ไปที่มุม $180 - a$) ก็เหลือเป็น $180 - b$ เท่ากัน (ชี้ไปที่มุม ACF) ก็เลยสรุปได้ว่ามุม ADE เท่ากับมุม ACF ก็คือมุมที่เราต้องการ

ข้อที่ 3 (ด้านการพิสูจน์) ที่ไม่แสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

3. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูป โดยที่ $BC = BD$ ให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ผ่านจุด C และ D จงพิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACF}$



ภาพประกอบ 56 แสดงผลการทำงานปฏิบัติ (Task) เรื่อง การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ด้านการพิสูจน์ ข้อที่ 3 ของกัปตัน

เมื่อทำการสัมภาษณ์เพิ่มเติม พบว่า กัปตัน พิสูจน์ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ โดยใช้การต่อเส้นเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างเส้นที่ต่อกับรูปที่กำหนดให้ โดยพิจารณาหามุมแย้งและเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่ไม่สามารถนำไปสู่การพิสูจน์ได้ว่า $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$ จึงแสดงว่าไม่เกิดระดับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

บทสัมภาษณ์ของกัปตัน

ครู: อันนี้เป็นสี่เหลี่ยม ABCD มันมีด้านที่เท่ากันให้มา แล้วให้มีเส้นตรง ตรงนี้ (ชี้ไปที่เส้นตรง EF) ลากผ่าน 2 จุดนี้ (ชี้ไปที่จุด C และจุด D) แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า มุมนี้กับมุมนี้เท่ากัน (ชี้ไปที่มุม ADE กับมุม ACF) ในมุมที่เรา มอง เรามองอย่างไรบ้างลูก ?

นักเรียน: ลองว่าเส้น BD กับ BC เท่ากัน (ชี้ไปที่ด้าน BC และด้าน BD) ผมก็ลองดูว่าจะมีมุมแย้งกันไหม ผมก็เลยลองต่อเส้นออกมา

ครู: แล้วเป็นอย่างไรบ้างพอต่อเส้นออกมา ทำไมถึงเลือกต่อเส้นตรงนั้น ?

นักเรียน: ก็เผื่อว่าจะสัมผัสอะไรกันใหม่

ครู: แล้วเกิดอะไรขึ้นใหม่ ?

นักเรียน: ไม่เกิดเลยครับ

ครู: แล้วข้อนี้มีการให้เหตุผลอื่น ๆ เพิ่มเติมไหม เราเลือกต่อเส้นเพราะมันจะเป็นมุมแย้งหรือเปล่า ?

นักเรียน: ใช่ เผื่อมันจะสัมผัสกันก็ได้

ครู: แล้วมีอะไรที่สัมผัสกันใหม่ ?

นักเรียน: ขออนุญาต (มองไปที่รูป) ไม่ได้ครับ



ประวัติผู้เขียน

