



ควอซีนอร์มอลโหมดของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาของหลุมดำไรส์เนอร์
- นอร์คสตรอม แอนไท้ เดอ ซิตเตอร์ที่มีขนสเกลาร์ใน 4 มิติ

QUASINORMAL MODES OF ELECTROMAGNETIC POTENTIAL IN
4 DIMENSIONAL ANTI DE SITTER REISSNER-NORDSTRÖM BLACK HOLE
SPACETIME WITH SCALAR HAIR

พนาพล กาญจนเพิ่มชม

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2563

ควอซีนอร์มอลโหมดของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาของหลุมดำไรส์เนอร์

- นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ที่มีขนสเกลาร์ใน 4 มิติ



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปีการศึกษา 2563

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

QUASINORMAL MODES OF ELECTROMAGNETIC POTENTIAL IN
4 DIMENSIONAL ANTI DE SITTER REISSNER-NORDSTRÖM BLACK HOLE
SPACETIME WITH SCALAR HAIR



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of MASTER OF SCIENCE
(Physics)

Faculty of Science, Srinakharinwirot University

2020

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

ควอซีนอร์มอลโหมดของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาของหลุมดำไรส์เนอร์

- นอร์คัสตรอม แอนโท เดอ ซิตเตอร์ที่มีขนสเกลาร์ใน 4 มิติ

ของ

พนาพล กาญจนเพิ่มชม

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

..... ที่ปรึกษาหลัก ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ) (อาจารย์ ดร.สุภคชัย พงศ์เลิศสกุล)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.วาสุเทพ หลวงทิพย์)

ชื่อเรื่อง	ควอซีนอร์มอลโหมดของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาของหลุมดำไรส์เนอร์ - นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ที่มีขนสเกลาร์ใน 4 มิติ
ผู้วิจัย	พนาพล กาญจนเพิ่มชม
ปริญญา	วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต
ปีการศึกษา	2563
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ มุศิริ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาคำนวณหาควอซีนอร์มอลโหมดด้วยวิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์ของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาของหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีขนสเกลาร์ใน 4 มิติ โดยหลุมดำมีการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างสนามสเกลาร์กับความโค้งปริภูมิเวลา การคำนวณทำโดยรบกวนสมการแมกซ์เวลล์ และคำนวณหาศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาที่หลุมดำมีการเปลี่ยนแปลงแล้ว หรือเรียกว่าหลุมดำมีขนสเกลาร์แล้ว เพื่อให้ทำการคำนวณเพอร์เทอร์เบชันแบบเชิงวิเคราะห์ได้ทำการประมาณให้มวลของหลุมดำมีขนาดน้อยกว่ารัศมีแอนไท เดอ ซิตเตอร์ มาก ๆ ซึ่งผลเฉลยของสมการคลื่นในปริภูมิเวลาที่มีหลุมดำอยู่ ต้องมีเงื่อนไขขอบเขตตามอิทธิพลของหลุมดำ เรียกผลเฉลยนี้ว่า ควอซีนอร์มอล-โหมด โดยความถี่ควอซีนอร์มอล เป็นจำนวนเชิงซ้อนและมีค่าไม่ต่อเนื่อง ผลการคำนวณในงานวิจัยนี้ ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบกับงานวิจัยของโคซุมบัส และคณะ ที่ใช้วิธีการคำนวณและประมาณที่แตกต่างกัน โดยมีผลงานวิจัยทั้งสองมีความสอดคล้องกัน เมื่อใช้พารามิเตอร์ในขอบเขตเดียวกัน การศึกษาการเปลี่ยนแปลงของหลุมดำ สามารถหาได้โดยผ่านการคำนวณหาควอซีนอร์มอลโหมด และความถี่ควอซีนอร์มอล ก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลง โดยงานวิจัยนี้ ได้นำเสนอวิธีการประมาณและคำนวณเชิงวิเคราะห์ ด้วยวิธีการรบกวน และสามารถทำการคำนวณหาควอซีนอร์มอลโหมดของหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีขนสเกลาร์ใน 4 มิติ ด้วยวิธีการเพอร์เทอร์เบชัน

คำสำคัญ : ควอซีนอร์มอลโหมด, หลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์

Title QUASINORMAL MODES OF ELECTROMAGNETIC POTENTIAL
IN
4 DIMENSIONAL ANTI DE SITTER REISSNER-NORDSTRÖM
BLACK HOLE
SPACETIME WITH SCALAR HAIR

Author PANAPOL KANJANAPHOMCHOM

Degree MASTER OF SCIENCE

Academic Year 2020

Thesis Advisor Assistant Professor Suphot Musiri , Ph.D.

The aim of this research is to analytically calculate the quasinormal modes (qnm) of the perturbed electromagnetic potential in the four-dimensional spacetime of the Reissner-Nordström (RN) anti-de Sitter (AdS) black holes, which are dressed with scalar hair. The black hole phase transition occurs when the black hole is perturbed by a coupled scalar field to the curvature. The Maxwell equations are perturbed and their solutions in the scalar-haired black hole spacetime are calculated. To simplify the problem and to be able to perform an analytical perturbation, the black hole mass is approximated to be much smaller than the AdS radius. The solutions, quasinormal modes, to the wave equation have to satisfy the boundary conditions at the horizon and far away from the black hole. The quasinormal frequencies are a set of an infinite number of discrete complex numbers. The results of this work are in agreement with Koutsoumbas et al, in terms of approximated analytical work and the same range of parameters. Black hole phase transition can be studied through calculations of quasinormal modes and their frequencies before and after phase transition. This work offers another method of approximation and analytical calculation qnm form RN-AdS black hole through perturbation methods.

Keyword : quasinormal modes, Reissner-Nordström anti-de Sitter black holes

กิตติกรรมประกาศ

This work was partially supported by the Office of the Higher Education Commission, the Thailand Research Fund, the Office of the Higher Education Commission, and Srinakharinwirot University.

พนาพล กาญจนเพิ่มชม



สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญรูปภาพ	ญ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง	1
1.1 ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ.....	1
1.2 พลศาสตร์ไฟฟ้าเชิงสัมพัทธภาพ	3
1.3 ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป	4
1.4 หลุมดำชวาร์ซชิลด์.....	8
1.5 หลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม	9
1.6 หลุมดำที่มีค่าคงตัวของจักรวาล	9
1.7 หลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอมที่มีค่าคงตัวของจักรวาล	10
1.8 เทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำ	10
1.9 ทฤษฎีหลุมดำมีขนและไม่มีขน.....	12
1.10 ควอนตัมฮอโลโมต	14
ความมุ่งหมายงานวิจัย.....	14
ความสำคัญของการวิจัย	15
ขอบเขตของงานวิจัย	15

ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย.....	15
บทที่ 2 ทบทวนวรรณกรรม.....	16
2.1 ควอซีนอร์มอลโหมดในปริภูมิเวลาที่มีค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์.....	16
2.2 ควอซีนอร์มอลโหมดในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์.....	17
2.3 ทอพอโลยีและการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำที่มีขนเนื่องจากสนามสเกลาร์.....	18
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย.....	27
3.1 สมการอนุพันธ์ของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า.....	27
3.2 ผลเฉลยที่ค่าคงตัวของการแยกตัวแปรเป็นศูนย์.....	28
3.3 ผลเฉลยที่ค่าคงตัวของการแยกตัวแปรไม่เป็นศูนย์.....	30
3.3.1 ผลเฉลยที่ทำการประมาณที่ไกล ๆ.....	30
3.3.2 ผลเฉลยที่สมการไม่ได้ประมาณ.....	32
บทที่ 4 ผลการศึกษา.....	36
บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	42
5.1 สรุปงานวิจัย.....	42
5.2 อภิปรายผลของงานวิจัย.....	43
5.3 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับงานวิจัย.....	44
บรรณานุกรม.....	45
ภาคผนวก.....	49
ประวัติผู้เขียน.....	54

สารบัญตาราง

หน้า

ตาราง 1 ควอซีเนอร์มอดโฮมดในค่า n และ m ต่าง ๆ41



สารบัญรูปภาพ

หน้า

ภาพประกอบ 1 ตัวอย่างของการเคลื่อนย้ายทางขนานในวงปิดบนผิวโค้งที่ส่งเวกเตอร์ที่ขนานกับจุด A ไปจุด N ไปจุด B และส่งกลับไปจุด A ซึ่งเวกเตอร์ขาไปจะทำมุมกับเวกเตอร์ขากลับเป็นมุมแอลฟา.....	6
ภาพประกอบ 2 กราฟการเปลี่ยนแปลงเฟสของของหลุมดำระหว่างผลต่างพลังงานอิสระกับอุณหภูมิซึ่งจะแสดงให้เห็นถึงค่าการเปลี่ยนแปลงเฟสในลำดับที่หนึ่งและลำดับที่สอง.....	23
ภาพประกอบ 3 กราฟการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำระหว่างอุณหภูมิกับพารามิเตอร์ของค่าคงตัวอันตรกิริยาของสนามสเกลาร์.....	24
ภาพประกอบ 4 กราฟเทียบควอซีนอลโหมดในวิจัยนี้กับงานวิจัยของโคซุมบัสและคณะในช่วงที่ n เท่ากับ 1 ถึง 10.....	38
ภาพประกอบ 5 กราฟเทียบควอซีนอลโหมดในวิจัยนี้กับงานวิจัยของโคซุมบัสและคณะในช่วงที่มีค่ามาก ๆ.....	39
ภาพประกอบ 6 กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริงของควอซีนอร์มอลโหมดกับค่า m	40
ภาพประกอบ 7 กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจินตภาพของควอซีนอร์มอลโหมดกับค่า n	40

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันได้มีการศึกษาหลุมดำได้ในหลากหลายแนวทาง ซึ่งหนึ่งในนั้นจะมุ่งงานวิจัยในเชิงทฤษฎี โดยทำการคำนวณความโค้งของปริภูมิเวลาจากสมการสนามของไอน์สไตน์ ผลเฉลยของสมการสนามที่ได้ออกมาจะมีบริเวณที่มีความโน้มถ่วงสูงมาก จนความเร็วหลุดพ้นมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับความเร็วแสง โดยจะเรียกบริเวณดังกล่าวว่า หลุมดำ จากการค้นพบหลุมดำ ทำให้เป็นจุดเริ่มต้นของการคำถามมากมายว่า บริเวณที่มีความโน้มถ่วงสูงนั้นทำให้ทฤษฎีฟิสิกส์เปลี่ยนแปลงหรือแตกต่างจากบริเวณอื่นอย่างไร

จากผลเฉลยสมการสนามของไอน์สไตน์ และการค้นพบเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำได้ มีการเสนอทฤษฎีหลุมดำไม่มีขน คือ หลุมดำนั้นจะขึ้นอยู่กับแค่สามพารามิเตอร์ ได้แก่ มวล ประจุ และโมเมนตัมเชิงมุมของหลุมดำ โดยข้อมูลของอนุภาคที่ตกลงไปในหลุมดำจะไปรวมกันที่จุดเอกฐาน เนื่องจากข้อมูลไม่สามารถเรียกกลับมาได้ ซึ่งขัดกับทฤษฎีควอนตัม จึงได้มีการเสนอแนวคิดที่ขัดแย้งกับหลุมดำไม่มีขนว่า หลุมดำไม่ได้ขึ้นแค่สามพารามิเตอร์ก่อนหน้าเท่านั้นแต่จะขึ้นกับพารามิเตอร์อื่น ๆ ด้วย และเรียกทฤษฎีนี้ว่า หลุมดำแบบมีขน ซึ่งเกิดจากหลุมดำเปลี่ยนสมบัติทางกายภาพไปหรือการเปลี่ยนเฟส โดยการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำนั้นเกิดจากการรบกวนได้หลายรูปแบบ เช่น สนามสเกลาร์ ผลของการรบกวนทำให้หลุมดำมีการเปลี่ยนแปลงสมบัติทางกายภาพ จะเห็นได้ชัดจากการเปลี่ยนเฟสจากหลุมดำแบบไม่มีขนไปเป็นหลุมดำแบบมีขน เนื่องจากการวิจัยนี้จะศึกษาเกี่ยวกับควอนตัมของหลุมดำที่มีอันตรกิริยากับหลุมดำแบบมีขน โดยที่ ควอนตัมของหลุมดำ หรือ ความถี่ควอนตัมของหลุมดำ โดยใช้วิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์ ซึ่งจะอธิบายอย่างละเอียดในเล่มวิจัยนี้

1.1 ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

ในปี ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์ได้เสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ (Special relativity) ที่สามารถแก้ไขความขัดแย้งระหว่าง กลศาสตร์แบบฉบับ (Classical mechanics) และทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic Theory) อธิบายจากการแปลงพิกัดที่เรียกว่า การแปลงแบบลอเรนซ์ (Lorentz transformation) และตั้งสัจพจน์ 2 ข้อ 1.กฎทางฟิสิกส์ต้องเหมือนกันในทุกกรอบอ้างอิงเฉื่อย 2.อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศเป็นค่าคงตัวที่เป็นสากล ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดแสงและผู้สังเกต โดยสรุปรวมจากการทดลองหลายๆ งานและหนึ่งในการ

ทดลองที่สำคัญ คือ การทดลองของไมเคิลสันและมอร์ลีย์ (Michelson & Morley, 1887) ที่ทำการหาตัวกลางของแสง จากการทดลองไม่พบสิ่งคาดได้ว่าเป็นตัวกลางของแสง และจากสัมพัทธภาพซึ่งต้นรวมกับการแปลงแบบลอเรนซ์ นำไปสู่การทำนายลักษณะทางกายภาพที่ต่างออกไปจากกลศาสตร์แบบฉบับ เมื่ออัตราเร็วสัมพัทธ์มีค่าใกล้เคียงกับอัตราเร็วแสง ผู้สังเกตจะสังเกตเห็นปรากฏการณ์ การยืดออกของเวลา (Time dilation) กล่าวคือ เวลาของผู้สังเกตที่อยู่คนละกรอบอ้างอิงนั้นจะสังเกตเห็นเวลาของเหตุการณ์เดียวกันได้ต่างกัน และปรากฏการณ์ การหดสั้นของระยะทาง (Lorentz contraction) คือ การที่ผู้สังเกตต่างกรอบอ้างอิงนั้นวัดความยาวของวัตถุเดียวกันได้แตกต่างกัน เกิดขึ้นโดยทำภายใต้ให้การแปลงพิกัดแบบใหม่ โดยลอเรนซ์ ได้เสนอการแปลงแบบลอเรนซ์ ที่ทำการขยายจากพิกัด 3 มิติเป็น 4 มิติ โดยรวมเอาเวลาเข้าไปด้วย ซึ่งจะแตกต่างจากกลศาสตร์แบบฉบับที่เวลาจะเป็นสิ่งสมบูรณ์ (absolute) และเรียกพิกัดนี้ว่า พิกัดของปริภูมิเวลา (Spacetime coordinate) แล้วเรียกแต่ละจุดของพิกัดใน 4 มิติว่าเป็นเหตุการณ์ (Event)

การขยายเป็นพิกัด 4 มิติทำให้เวลาในกลศาสตร์แบบฉบับ เป็นองค์ประกอบตัวหนึ่งของเวกเตอร์ใน 4 มิติในปริภูมิเวลา โดยจะต้องเป็นไปตามการแปลงแบบลอเรนซ์ ดังนั้นจึงได้มีการนิยามเวกเตอร์ใหม่ นิยามเวกเตอร์สองชนิด คือ เวกเตอร์คอนทราแวเรียนต์ (Contravariant vector)

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A}), \quad (1.1)$$

และเวกเตอร์โคแวเรียนต์ (Covariant vector)

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (-A^0, A^1, A^2, A^3) = (-A^0, \vec{A}), \quad (1.2)$$

นิยามผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar product) ของเวกเตอร์ 4 มิติ คือ

$$A^\mu A_\mu = (-A^0, \vec{A})(A^0, \vec{A}) = -(A^0)^2 + (\vec{A})^2, \quad (1.3)$$

และขนาดของการกระจัดจะมีค่าคงตัวในแต่ละกรอบอ้างอิงก็ต่อเมื่อรวมผลของเวลาเข้าไปในการกระจัดเล็ก ๆ กำลังสอง คือ

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = ds'^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

เมื่อ c คือ อัตราเร็วของแสง

t, x, y, z คือ เวลาและตำแหน่งในกรอบอ้างอิง S

t', x', y', z' คือ เวลาและตำแหน่งในกรอบอ้างอิง S' ซึ่งสามารถเขียนสมการที่ (1.4) ใหม่ได้เป็น

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu, \quad (1.5)$$

ทำการเขียนความเร็วใน 4 มิติได้เป็น

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v}), \quad (1.6)$$

โดยที่ $\gamma \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ทั้งนี้ให้ τ คือ เวลาแท้จริง (Proper time) จะนิยามได้จากเวลาที่อยู่กรอบอ้างอิงของอนุภาคที่ถูกสังเกต และ \vec{v} คือ ความเร็วใน 3 มิติ สามารถเขียนขนาดกำลังสองของความเร็วจนใน 4 มิติได้เป็น

$$U^\mu U_\mu = -\gamma^2(c^2 - v^2) = -c^2, \quad (1.7)$$

โมเมนตัมใน 4 มิติ

$$P^\mu \equiv mU^\mu \equiv \gamma m(c, \vec{v}) \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad (1.8)$$

โดย m คือ มวลของอนุภาคที่มีความเร็ว \vec{v} , $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ คือ โมเมนตัมใน 3 มิติ และ $E = \gamma mc^2$ คือ พลังงานรวมของอนุภาค สามารถเขียนขนาดกำลังสองของโมเมนตัมใน 4 มิติเป็น

$$P_\mu P^\mu = m^2 U_\mu U^\mu = -m^2 c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + (\vec{p})^2, \quad (1.9)$$

สามารถเขียนสมการพลังงานกำลังสองในรูปความสัมพันธ์ของโมเมนตัมกับมวลกำลังสองได้

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.10)$$

จากสมการที่ (1.8) ที่เขียนพลังงานให้อยู่เป็นส่วนหนึ่งของโมเมนตัมใน 4 มิติได้ แสดงให้เห็นว่าพลังงานเป็นปริมาณที่ขึ้นอยู่กับกรอบอ้างอิง และเขียนให้อยู่ในรูปของสมการ (1.10)

1.2 พลศาสตร์ไฟฟ้าเชิงสัมพัทธภาพ

สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equations) ในรูปของ 3 มิติ นั้นสอดคล้องกับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษอยู่แล้ว แต่เปลี่ยนสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบ 4 มิติ โดยที่เริ่มต้นจากการนิยามความหนาแน่นประจุ (ρ) และความหนาแน่นกระแส (\vec{j}) ซึ่งสามารถเขียนรวมกันในรูปของ 4 มิติเป็น

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}), \quad (1.11)$$

โดย $c\rho$ คือองค์ประกอบในแกนเวลาของความหนาแน่นใน 4 มิติ ต่อมาทำการนิยามศักย์ไฟฟ้า (Φ) และเวกเตอร์ศักย์ไฟฟ้า (\vec{A}) เขียนรวมกันในรูปของศักย์ไฟฟ้าใน 4 มิติ เป็น

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}), \quad (1.12)$$

โดย Φ คือองค์ประกอบในแกนเวลาของเวกเตอร์ศักย์ไฟฟ้าใน 4 มิติ ต่อมานิยามให้อนุพันธ์ของเวลาและตัวดำเนินการอนุพันธ์ใน 4 มิติ เขียนได้เป็น

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right), \quad (1.13)$$

จากนิยามข้างต้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง สนามไฟฟ้า (\vec{E}) และสนามแม่เหล็ก (\vec{B}) ได้ ในรูปแบบเทนเซอร์ (Tensor) ได้เป็น

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.14)$$

หรือเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ขนาด 4x4 ได้

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

จากการที่สามารถเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในรูปของเมทริกซ์ได้หมายความว่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กนั้นเป็นสิ่งเดียวกันแต่เห็นต่างกันในแต่ละกรอบอ้างอิงของผู้สังเกตนั้น ๆ เพราะฉะนั้นจะทำให้สมการของแมกซ์เวลล์ จาก 4 สมการลดรูปลงเหลือ 2 สมการใน 4 มิติ คือ

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (1.16)$$

และ

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.17)$$

1.3 ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

ในปี ค.ศ. 1915 ไอน์สไตน์ได้เสนอ ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (General relativity) ที่กล่าวถึง มวลของวัตถุที่อยู่ภายใต้สนามโน้มถ่วง (Gravitational mass) จะมีค่าเท่ากับมวลเฉื่อย

(Inertial mass) ที่ต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุมีความเร่ง เป็นผลให้ผู้สังเกตไม่สามารถบอกถึงความแตกต่างระหว่าง แรงโน้มถ่วงกับแรงที่เกิดจากการที่วัตถุมีความเร่งได้ หรืออีกนัยหนึ่ง ผู้สังเกตไม่สามารถแยกความแตกต่างระหว่าง การตกอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วง กับ การอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ไอน์สไตน์เรียกหลักการนี้ว่า หลักความสมมูล (Principle of equivalence) จะเห็นได้ว่าขัดแย้งกับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษข้อแรกที่พูดถึง กรอบอ้างอิงเฉื่อย เนื่องจากหลักความสมมูลนี้ผู้สังเกตไม่สามารถบอกได้อย่างแท้จริงว่ากรอบใดเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย

เพื่อที่จะง่ายในการทำการคำนวณจะทำการเปลี่ยนรูปแบบสมการให้อยู่ในรูปร่างทางคณิตศาสตร์แบบเทนเซอร์ เริ่มต้นจากนิยาม กระจัดเล็ก ๆ ในรูปเทนเซอร์ได้

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (1.18)$$

เรียก $g_{\mu\nu}$ ว่าเมตริกเทนเซอร์ (Metric tensor) (เมตริก คือ ระยะทางสั้น ๆ กำลังสอง ระหว่างสองเหตุการณ์ในปริภูมิเวลาใด ๆ) เป็นฟังก์ชันของพิกัด x^α ซึ่งค่าของ $g_{\mu\nu}$ คือ

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

เรียกพิกัดในสมการที่ (1.19) ว่า ปริภูมิราบ (Flat spacetime) โดยที่สมการที่ (1.19) เป็นเพียงแค่ตัวอย่างหนึ่งของปริภูมิราบ โดยที่ปริภูมิเวลาโค้ง (Curved spacetime) โดยที่ $g_{\mu\nu}$ เขียนได้เป็น

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

จะเห็นได้ว่าไม่ได้ระบุปริมาณภายในเมตริกเทนเซอร์ เป็นเพราะว่าปริมาณภายในเมตริกเทนเซอร์นั้นขึ้นอยู่กับรูปแบบของระบบในแต่ละกรณีจะให้ค่าของเมตริกเทนเซอร์ที่แตกต่างกัน ซึ่งสามารถหาเมตริกเทนเซอร์ได้จากการแก้สมการการเคลื่อนที่บนผิวโค้ง และคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการศึกษา คือ เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential geometry) ในการหาความโค้งของปริภูมิเวลา และสมการการเคลื่อนที่ในปริภูมิเวลาโค้งนั้นเริ่มจากการศึกษา เวกเตอร์แคลคูลัสบนผิวโค้ง แต่ว่าการหาอนุพันธ์บนผิวโค้งนั้นแตกต่างจากผิวราบโดยต้องทำการเพิ่มส่วนผิวโค้งเข้าไป ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปอนุพันธ์โคเวเรียนต์ (Covariant derivatives)

$$\nabla_\mu V^\nu \equiv \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\zeta}^\nu V^\zeta, \quad (1.21)$$

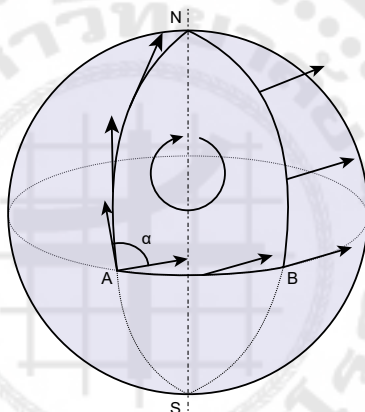
และอนุพันธ์คอนทราเวเรียนต์ (Contravariant derivatives)

$$\nabla_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\zeta V_\zeta, \quad (1.22)$$

โดยเรียก $\Gamma_{\mu\nu}^\zeta$ ว่า สัญลักษณ์คริสตอฟเฟิล (Christoffel symbol)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\zeta \equiv \frac{g^{\zeta\eta}}{2} (\partial_\mu g_{\nu\eta} + \partial_\nu g_{\eta\mu} - \partial_\eta g_{\mu\nu}), \quad (1.23)$$

และจะสามารถหาลักษณะของความโค้งได้จากวิธีการเคลื่อนย้ายทางขนาน (Parallel transport) คือ การสร้างเวกเตอร์ที่ขนานกับจุดและทำการคงไว้ตลอดจนวนกลับมาที่เดิม ซึ่งถ้าหากเป็นวงปิดบนผิวราบจะทำให้เวกเตอร์ที่ส่งไปจะกลับมาทับกันพอดี แต่ถ้าอยู่บนผิวโค้งจะทำให้เวกเตอร์ที่ส่งไปไม่กลับมาทับกับเวกเตอร์ที่จุดตั้งต้น จะเห็นได้จากภาพประกอบที่ 1 ทั้งนี้ขึ้นกับการนิยามผิวปิดด้วยถ้าหากเลือกเส้นรอบวงจะได้เวกเตอร์ที่เคลื่อนที่กลับมาทับที่จุดเดิม



ภาพประกอบ 1 ตัวอย่างของการเคลื่อนย้ายทางขนานในวงปิดบนผิวโค้งที่ส่งเวกเตอร์ที่ขนานกับจุด A ไปจุด N ไปจุด B และส่งกลับไปจุด A ซึ่งเวกเตอร์ขาไปจะทำมุมกับเวกเตอร์ขากลับเป็นมุมแอลฟา

ที่มา https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_transport

จากการเคลื่อนย้ายทางขนาน จะสามารถหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ในพิกัดโค้งโดยที่สร้างเวกเตอร์ไปสองทิศทางที่ต่างกัน คือ ในทิศทาง μ (∇_μ) และทิศทาง ν (∇_ν) แล้วเอามาลบกันการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์บนผิวโค้งในทิศทาง ν และ μ ที่แสดงในสมการที่ (1.24)

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\zeta - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\zeta \equiv R_{\mu\nu}^\zeta A^\eta, \quad (1.24)$$

เรียก $R_{\mu\nu}^\zeta$ ว่า เทนเซอร์รีมันเนียน (Riemannian tensor) เป็นเทนเซอร์ชนิด (1,3) โดยที่ เทนเซอร์รีมันเนียน ซึ่งเป็นตัวแทนที่บ่งบอกถึงความโค้งของระบบ และเรียก $R_{\mu\nu}$ ว่า เทนเซอร์ริกชี (Ricci

tensor) เป็นเทนเซอร์ชนิด (0,2) ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะที่ทำการลดรูปเทนเซอร์รีมันเนียนลงมาสามารถเขียนเทนเซอร์ริคชีได้เป็น

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\zeta\nu}^{\zeta} = \partial_{\zeta}\Gamma_{\mu\nu}^{\zeta} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\zeta}^{\zeta} + \Gamma_{\zeta\eta}^{\zeta}\Gamma_{\nu\mu}^{\eta} - \Gamma_{\nu\eta}^{\zeta}\Gamma_{\zeta\mu}^{\eta}, \quad (1.25)$$

จะนิยามความโค้งของระบบที่เป็นปริมาณสเกลาร์ได้จาก

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

ดังนั้นการที่จะหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในปริภูมิเวลาโค้งสามารถหาได้จากแอคชัน (Action) โดยกรณีง่ายที่สุด คือ อนุภาคทดสอบเคลื่อนที่ไปในสุญญากาศไม่ทำอันตรรกิริยากับสิ่งใด ทั้งยังมีความโค้งในรูปสเกลาร์เป็น R สามารถเขียนลากรางเจียน (Lagrangian) ได้เป็น

$$S(g_{\mu\nu}) = \int R\sqrt{-g}d^4x, \quad (1.27)$$

โดยที่ $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ คือ รากที่สองของดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกเทนเซอร์ $g_{\mu\nu}$ และ $\sqrt{-g}d^4x$ เป็นปริมาณสเกลาร์ หรือเป็นปริมาณที่ไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง ดังนั้นปริมาณที่สามารถทำการแปรผัน (Variation) ซึ่งจะทำให้สมการ (1.27) โดยทำการแปรผัน เมตริกเทนเซอร์ ($\delta g_{\mu\nu}$) ซึ่งเขียนได้ดังสมการ

$$\delta S = \int d^4x \delta(R\sqrt{-g}) = 0, \quad (1.28)$$

ผลจากการแปรผันเมตริกเทนเซอร์ออกมาได้เป็น

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (1.29)$$

โดยเรียกสมการนี้ว่า สมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein field equation) คือ สมการการเคลื่อนที่บนผิวโค้งของอนุภาค โดยทางขวามือของสมการที่เป็นศูนย์ เพราะว่าได้พิจารณาในกรณีที่อยู่ในสุญญากาศ แต่ถ้าหากพิจารณาในกรณีที่มีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ในระบบ แอคชันจะมีการเพิ่มเติมสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเข้าไป

$$S(g_{\mu\nu}, A_{\mu}) = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\kappa F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \quad (1.30)$$

โดย κ คือ ค่าคงตัวความโน้มถ่วงของไอน์สไตน์ (Einstein's gravitation constant) มีค่าเท่ากับ $\kappa = 8\pi G/c^4$ โดย G คือ ค่าคงตัวของนิวตัน (Newton's constant) จะเห็นได้ว่ามีตัวแปรที่สามารถทำการแปรผันได้สองตัว นั่นคือ เมตริกเทนเซอร์และศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งจะทำให้ได้ผลออกมา

เป็นสองสมการ หนึ่งในสมการสนามของไอน์สไตน์ โดยที่เป็นผลเฉลยที่เกิดจากการแปรผันของเมตริกเทนเซอร์

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

โดยที่ $T_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน - โมเมนตัม (Stress energy – Momentum tensor) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (1.32)$$

สองเป็นสมการแมกซ์เวลล์ใน 4 มิติ ซึ่งเกิดจากการแปรผันศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0, \quad (1.33)$$

จากการที่สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้แล้วจะต้องหาผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่นั้นในแต่ละกรณี ซึ่งจะพูดถึงในหัวข้อต่อไป

1.4 หลุมดำชวาร์ชชิลด์

จากสมการที่ (1.31) ถ้ากำหนดให้วัตถุมวล M ขนาดใหญ่สร้างความโน้มถ่วงและอยู่ในสุญญากาศ หรือก็คือ สร้างปริภูมิเวลาดั้งในสุญญากาศ และเทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน – โมเมนตัมมีค่าเป็นศูนย์ โดยให้วัตถุมีสมมาตรทรงกลม จะทำให้ได้ผลเฉลยออกมาในรูปของการกระจัดเล็ก ๆ ได้ดังสมการ

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.34)$$

และเพื่อความสะดวกในการคำนวณส่วนมากจะทำการกำหนดให้ $c = 1$ โดยเรียกผลเฉลยในกรณีนี้ว่า ผลเฉลยชวาร์ชชิลด์ (Schwarzschild's solution) (Schwarzschild, 1916) จะเห็นได้ว่าที่ $r = 0, r = 2M$ และ $r = \infty$ นั้นจะทำให้เมตริกเทนเซอร์มีสถานะเอกฐาน หรือเมตริกเทนเซอร์มีค่าลู่ออก โดยสถานะเอกฐานที่ตำแหน่ง $r = 2GM$ และ $r = \infty$ นั้นสามารถกำจัดออกไปได้โดยการแปลงพิกัด แต่ที่ $r = 0$ นั้นไม่สามารถทำให้หายไปจากการแปลงพิกัดได้ ซึ่งจะเรียกจุดที่ลู่ออกโดยไม่สามารถแก้ไขได้จากการแปลงพิกัดว่า จุดเอกฐานแท้จริง (Proper singularity)

จากการที่กำหนดให้มีวัตถุมวล M ขนาดใหญ่และมีสมมาตรทรงกลม (ในกรณีที่ยังไม่มีการแปลงพิกัด) จากสมการที่ (1.34) นั้นมีค่าลู่ออก เรียกบริเวณดังกล่าวว่า หลุมดำ (Black hole) โดยเรียกตามนักฟิสิกส์ที่ชื่อ วิลเลอร์ (A. Wheeler, 1968) และทำให้เห็นว่าถ้าให้ค่าของรัศมี

$r \rightarrow 2GM$ ซึ่งเป็นรัศมีที่ทำให้สมการนั้นลู่ออก และเรียกรัศมีนั้นว่า ฮอริซันเหตุการณ์ (Event horizon) หรือเรียกว่า รัศมีชวาร์ซชาลด์ (Schwarzschild's radius)

1.5 หลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม

นอกจากหลุมดำแบบชวาร์ซชาลด์ แล้วยังมีหลุมดำอีกกรณีที่ทำกาหนดให้มีวัตถุมีมวล M ขนาดใหญ่ และวัตถุนั้นมีประจุ Q ทั้งยังกำหนดให้วัตถุมีสมมาตรทรงกลม โดยที่วัตถุนี้จะสร้างทั้งสนามความโน้มถ่วงและสนามไฟฟ้าออกมาพร้อมกัน จะให้ผลเฉลยออกมาในรูปของการกระจัดเล็ก ๆ ได้ดังสมการ

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.35)$$

ซึ่งจะเรียกผลเฉลยในกรณีนี้ว่า ผลเฉลยไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอมหรือเรียกอีกอย่างว่าหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม (Reissner- Nordström (RN) black hole) (Nordström, 1918; Reissner, 1916) จะเห็นได้ว่าที่ $r = 0, r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - GQ^2}$ และ $r = \infty$ นั้นเป็นสถานะเอกฐานที่ต่างจากกรณีของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ เพราะว่าตำแหน่งฮอริซันนั้นมีอยู่ 2 แบบ คือ r_+ และ r_- โดยที่จะเรียกฮอริซันที่มีค่ามากกว่า (r_+) ว่า ฮอริซันเหตุการณ์ และเรียกฮอริซันที่มีค่าน้อยกว่า (r_-) ว่า ฮอริซันโคชี (Cauchy horizon) เหตุการณ์เช่นนี้เกิดจากการที่กำหนดให้มีประจุ Q ซึ่งจะสร้างสนามไฟฟ้าแผ่ออกมาจากหลุมดำจึงทำให้ฮอริซันเหตุการณ์นั้นแยกออกเป็นสองฮอริซันเหตุการณ์

1.6 หลุมดำที่มีค่าคงตัวของจักรวาล

ในปี ค.ศ. 1917 เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter, 1917) ได้ศึกษาระบบที่คล้ายกับเมตริกชวาร์ซชาลด์โดยเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวกับค่าคงตัวของจักรวาล (Cosmological constant (Λ)) ลงไปในสมการที่ (1.27) จะทำให้สมการสนามของไอน์สไตน์เขียนได้ดังนี้

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.36)$$

และสามารถเขียนในรูปของการกระจัดเล็ก ๆ ได้ดังสมการ

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.37)$$

โดยนิยามให้ $\Lambda = \pm \frac{3}{l^2}$ เมื่อ l มีหน่วยเป็นระยะทาง ซึ่งจะเรียกผลเฉลยที่ Λ เป็นบวก ว่า เดอ ซิตเตอร์ (de Sitter (dS) solution) และเรียกผลเฉลยที่ Λ มีค่าเป็นลบ ว่า แอนไท เดอ ซิตเตอร์ (Anti de Sitter (AdS) solution) เนื่องจากในงานวิจัยนี้สนใจเฉพาะ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ดังนั้นใน

สมการที่ (1.37) จะกำหนดให้ค่า Λ เป็นลบ ต่อมาจะเห็นได้จากการกระจัดเล็ก ๆ ดังกล่าวจะทำให้เกิดสภาวะเอกฐานทั้งหมดหาค่า โดยที่ $r = 0$ กับ $r \rightarrow \infty$ ซึ่งเป็นปริมาณที่เกิดขึ้นเสมอในการหาจุดเอกฐาน และค่าอีกสามค่าจะแบ่งออกเป็นฮอริซันเหตุการณ์ 2 ประเภทคือ หนึ่งฮอริซันเหตุการณ์ และอีกสองฮอริซันนั้นจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งการที่ค่ารัศมีออกมาเป็นจำนวนเชิงซ้อนหมายความว่า ค่าของฮอริซันนั้นไม่ได้มีอยู่จริงในทางกายภาพ

1.7 หลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอมที่มีค่าคงตัวของจักรวาล

จากสมการ (1.31) สามารถเพิ่มพจน์ของ เดอ ซิตเตอร์ หรือพจน์ของ แอนไท เดอ ซิตเตอร์โดยเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวกับค่าคงตัวของจักรวาล (Cosmological constant (Λ)) สมการสนามของไอน์สไตน์จึงเขียนได้ดังสมการ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

จะให้ผลเฉลยออกมาในรูปของการกระจัดเล็ก ๆ ได้ดังสมการ

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.39)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าจากเงื่อนไขดังกล่าวจะทำให้เกิดสภาวะเอกฐานทั้งหมดหาค่า ซึ่งจากที่กล่าวไปข้างต้นจุดเอกฐานที่จะเกิดขึ้นเสมอนั้นคือที่ $r = 0$ กับ $r \rightarrow \infty$ และอีกสี่ค่า จะแบ่งออกเป็นฮอริซันที่เป็น 3 ประเภทคือ ฮอริซันเหตุการณ์ ฮอริซันโคซี และฮอริซันที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ทั้งนี้จะเห็นว่าคล้ายคลึงการรวมกันของผลเฉลยของ ไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม ผลเฉลยของค่าคงตัวของจักรวาลและผลเฉลยของ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ นั่นเอง (S.W. Hawking & Ellis, 1973)

1.8 เทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำ

หนึ่งในปัญหาที่สำคัญของหลุมดำนั้นคือ เทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำมีความขัดแย้งกับฟิสิกส์ดั้งเดิม คือ สมบัติและพฤติกรรมของหลุมดำในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป จะมีแต่ดูดกลืนมวลสาร และพลังงานไปรวมกันที่จุดเอกฐานแท้จริง โดยไม่มีการแผ่รังสีหรืออนุภาคใด ๆ ออกมาเลย หมายความว่า คุณสมบัติของหลุมดำจะมีค่าเป็นศูนย์ แต่เป็นที่ทราบกันว่าคุณสมบัติที่เป็นศูนย์ของศาสตร์สมบูรณ์ในทางเทอร์โมไดนามิกส์นั้นเป็นไปได้ เนื่องจากขัดกับกฎข้อที่ 3 ที่กล่าวว่า “แอนโทปีของระบบจะเข้าใกล้ค่าคงตัวเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้ศูนย์ของศาสตร์สมบูรณ์” และจากการที่หลุมดำได้

ดูคลื่นมวลและพลังงานจะทำให้เอนโทรปีของหลุมดำมีค่าสูงมากจนถึงอนันต์ทำให้ไม่สามารถทราบค่าที่แน่นอนของสมการ $dQ = TdS$ ได้ ดังนั้น

ในปี ค.ศ. 1972 เบเคนสไตน์ (Bekenstein, 1972) ได้เสนอแนวคิดให้เอนโทรปีของหลุมดำแปรผันตรงกับพื้นที่ผิวของฮอริซันเหตุการณ์

ในปี ค.ศ. 1973 บาร์ดีน คาร์เตอร์และ ฮอว์กิง (Bardeen, Carter, & Hawking, 1973) ได้พิสูจน์กฎทางเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำ โดยสามารถคำนวณค่าของเอนโทรปีของหลุมดำได้ ดังนี้

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4 \hbar G} \Rightarrow S = \frac{A}{4} \quad (1.40)$$

โดยที่ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ เมื่อ h คือ ค่าคงตัวของพลังค์ (Planck constant) และ k_B คือ ค่าคงตัวของโบลต์ซมันน์ (Boltzmann constant) เพื่อสะดวกต่อการคำนวณกำหนดให้ $G = \hbar = k_B = c = 1$ และได้พิสูจน์ทางทฤษฎีว่า หลุมดำสามารถแผ่รังสีได้ในระดับจุลภาคด้วยผลทางควอนตัม โดยอุณหภูมิจากพื้นที่ผิวของฮอริซันเหตุการณ์แปรผันตรงกับปริมาณที่เรียกว่าสนามโน้มถ่วงที่ผิว (Surface gravity, κ)

$$T = \frac{\hbar \kappa}{k_B c 2\pi} \Rightarrow T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (1.41)$$

ดังนั้น TdS สามารถหาค่าได้ และอุณหภูมิจึงไม่เป็นศูนย์ของสสารสัมบูรณ์ ทำให้ข้อขัดแย้งทางเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำถูกกำจัดออกไปด้วยผลทางควอนตัมในปริภูมิเวลาโค้งใกล้ฮอริซันเหตุการณ์ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า กฎเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำ จะต้องเป็นหลักการพื้นฐานของ ทฤษฎีควอนตัมกราวิตี (Quantum Gravity theory) ที่จะถูกเสนอขึ้นมา และทฤษฎีควอนตัมกราวิตีดังกล่าว ก็ควรจะต้องพิสูจน์หรือ อธิบายกฎดังกล่าวได้

อย่างไรก็ตามเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำทำให้มีคำถามเพิ่มขึ้น เช่น การที่เอนโทรปีของหลุมดำเป็นฟังก์ชันของพื้นที่ไม่ใช่ปริมาตร หรือการที่ข้อมูล (Information) ของสสารและพลังงานที่ถูกดูดกลืนจะสูญหายไปหรือถูกปล่อยออกมาในการแผ่รังสีหรือไม่ เป็นต้น เนื่องจากทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษเป็นกรณีพิเศษในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ดังนั้นผลของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปจะครอบคลุมฟิสิกส์แบบฉบับ ดังนั้นการที่เอนโทรปีเป็นฟังก์ชันของพื้นที่ผิวของระบบ ก็ควรจะเป็นกรณีทั่วไปมากกว่าที่เอนโทรปีเป็นฟังก์ชันของปริมาตร ทำให้มีการเสนอแนวคิดที่ว่า ปริมาตรในฟิสิกส์แบบฉบับนั้น คือ พื้นที่ผิวหนึ่งในปริภูมิเวลาที่มีมิติมากกว่า 4 มิติขึ้นไป จึงมีการเสนอหลักการ โฮโลกราฟฟิค (Holographic principle) ที่กล่าวว่าฟิสิกส์ใน $n + 1$ มิติ (Susskind, 1995; t Hooft, 1995) ที่สามารถอธิบายได้ด้วยฟิสิกส์บนพื้นที่ผิวขอบเขตของระบบที่มีมิติเป็น n มิติ ซึ่งเป็นการแสดงถึงการมีอยู่ของมิติที่มีมากกว่า $3+1$ มิติ (Extra dimensions)

1.9 ทฤษฎีหลุมดำมีขนและไม่มีขน

การที่อนุภาคถูกแรงโน้มถ่วงทำให้ตกลงไปในหลุมดำ ข้อมูลของอนุภาคเข้าไปในหลุมดำนั้นจะเข้าไปรวมอยู่ภายใน ซึ่งในทางทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปข้อมูลนั้นไม่ได้ สูญหายไปไหนแต่ถูกเก็บไว้ในหลุมดำ ส่วนในทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมข้อมูลไม่ได้สูญหายไป หากทราบสถานะทางควอนตัมของระบบ และระดับพลังงานที่เวลาหนึ่งแล้วจะสามารถหาสถานะที่เวลาอื่นได้ด้วยการกระทำของตัวดำเนินการเวลาวิวัฒน์ (Time evolution operator) ซึ่งเป็นตัวดำเนินการ ยูนิเทรี (Unitary operator) มีค่าไม่เป็นศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป แต่ในหลุมดำแบบชวาร์ซชิลด์ตัวดำเนินการวิวัฒน์ไม่สามารถหาค่าได้ ความหมายว่า ข้อมูลไม่สามารถถูกเรียกกลับคืนมาได้ ข้อมูลของอนุภาคที่ตกลงไปในหลุมดำไม่สามารถเรียกกลับออกมาได้ และการแผ่รังสีของหลุมดำเป็นเพียงรังสีความร้อนเท่านั้น ข้อมูลไม่ได้ออกมาด้วย เพราะฉะนั้น สมบัติและพฤติกรรมของหลุมดำไม่ขึ้นกับสมบัติและพฤติกรรมของอนุภาคที่ตกลงไป ไม่ว่าจะมีความซับซ้อนขนาดไหนเมื่อก้าวข้ามฮอริซันเหตุการณ์ไปแล้วข้อมูลจะถูกเก็บไว้ทั้งหมดไม่สามารถเรียกออกมาได้ ดังนั้นจึงมีการเสนอทฤษฎีบท หลุมดำไม่มีขน (No hair theorem) ที่กล่าวว่า สมบัติของหลุมดำขึ้นกับปริมาณก่อนจะเป็นหลุมดำเพียง 3 ปริมาณ คือ มวล ประจุ และโมเมนตัมของหลุมดำ (Ruffini & Wheeler, 1971) ต่อมา

ในปี ค.ศ. 1996 มาติเนสและซานลลี (Martinez & Zanelli, 1996) ได้มีการเสนอแนวทางใหม่ว่าหลุมดำนั้นไม่น่าจะขึ้นกับแค่ปริมาณ 3 ปริมาณแต่อาจจะขึ้นกับปริมาณอื่นที่มีอันตรกิริยากับหลุมดำ ซึ่งจะเรียกทฤษฎีนี้ว่า ทฤษฎีหลุมดำมีขน (Hair theorem) โดยพื้นฐานแนวคิดนี้นั้นเกิดมาจากการที่ข้อมูลของอนุภาคนั้นไม่ได้ถูกทำลาย แต่ว่าข้อมูลของอนุภาคนั้นได้เข้าไปรวมกันในหลุมดำ และถ้าทำการรบกวนหลุมดำในปริมาณที่มากพอที่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงไปของหลุมดำ ซึ่งจะคล้ายกับการเปลี่ยนเฟสในทางเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งตัวอย่างของหลุมดำมีขนในงานวิจัยดังกล่าวได้ทำการเพิ่มสนามสเกลาร์เข้าไปในหลุมดำในปริภูมิเวลาไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ซึ่งจะคล้ายกับการตกแต่งหลุมดำให้มีขนด้วยสนามสเกลาร์ โดยที่จะเริ่มจากการกำหนดให้ แอคชันเป็น

$$S(g_{\mu\nu}, \Psi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{16} R \Psi^2 \right], \quad (1.42)$$

เมื่อ Λ คือ ค่าคงตัวของจักรวาล และ Ψ คือ สนามสเกลาร์ที่ไม่มีมวล ซึ่งจะได้สมการสนามของไอน์สไตน์ได้ดังสมการ

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.43)$$

โดย $\Lambda = -l^{-2}$ และได้สมการการเคลื่อนที่ของสนามสเกลาร์ได้

$$\square\Psi - \frac{1}{8}R\Psi = 0, \quad (1.44)$$

โดยให้ $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ และสามารถเขียนเทนเซอร์ความเค้นของพลังงาน – โมเมนตัม เขียนได้ดังนี้

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Psi\nabla_\beta\Psi + \frac{1}{8}[g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu}]\Psi^2, \quad (1.45)$$

ต่อมาสามารถหาค่าของการกระจัดเล็ก ๆ ได้เป็น

$$ds^2 = -\left(\frac{(r+B)^2(r-2B)}{rl^2}\right)dt^2 + \left(\frac{(r+B)^2(r-2B)}{rl^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (1.46)$$

และหาค่าของสนามสเกลาร์ได้เป็น

$$\Psi(r) = \sqrt{\frac{2B}{\kappa(r+B)}}, \quad (1.47)$$

โดย B คือ ค่าคงตัวจากการอินทิเกรตสมการเคลื่อนที่ ทั้งนี้ยังสามารถหาอุณหภูมิของหลุมดำได้ดังนี้

$$T = \frac{9r_+}{16\pi l^2}, \quad (1.48)$$

โดย r_+ คือ รัศมีฮอริซันเหตุการณ์ จากอุณหภูมินั้นสามารถหาค่าเอนโทรปีและมวลของหลุมดำได้ดังนี้

$$M = \frac{3r_+^2}{32l^2}, \quad S = \frac{\pi r_+}{3}, \quad (1.49)$$

เทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำนั้นมีความสำคัญ เพราะในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในทฤษฎีหลุมดำมีชนนั้นจะสนใจถึงการเปลี่ยนแปลงจากหลุมดำมีขนไปเป็นหลุมดำไม่มีขนได้จากการหาการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำ โดยดูได้จากการเปลี่ยนแปลงของเอนโทรปีของหลุมดำว่ามี การเปลี่ยนแปลงในรูปแบบใดระหว่างที่เกิดการเปลี่ยนสภาพไประหว่างหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ กับหลุมดำที่มีขนเนื่องจากสนามสเกลาร์ แต่ว่าในงานวิจัยของมาติเนสและซิลินั้นไม่ได้แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำ แต่ในงานวิจัยในบทต่อไปนั้นจะมีการแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำ และอธิบายถึงผลของการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำ

ในปี ค.ศ. 1999 มัลดาเซนา (Maldacena, 1999) ได้ศึกษาโดยคำนวณได้จากทฤษฎีเอ็มหรือทฤษฎีสตริง (M/string theory) ที่จะแสดงให้เห็นถึงทฤษฎีสตริงนามสอดคล้อง (Conformal Field Theories (CFT)) ในรูปแบบต่าง ๆ นั้นสอดคล้องกับหลุมดำที่มีค่าคงตัวของจักรวาลเป็นลบหรือจะเรียกว่า อยู่ในปริภูมิเวลาแอนไท เดอ ซิตเตอร์ (AdS) จากงานวิจัยนี้ทำให้เห็นถึงแนวทางใหม่ใน

การที่จะศึกษาระบบในทางควอนตัมได้จากการศึกษาหลุมดำในปริภูมิเวลาแบบแอนไท เดอ ซิตเตอร์

ในปี ค.ศ. 2005 ฮอว์กิง (S. W. Hawking, 2005) ได้ศึกษาการแผ่รังสีของหลุมดำที่อยู่ในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์ จากใช้วิธี อุโมงค์ควอนตัม (Quantum tunneling) ซึ่งฮอว์กิงกล่าวว่าจากการแผ่รังสีของหลุมดำ โดยวิธีนี้นั้นจะปล่อยออกมาแคว้นสีความร้อนเท่านั้นไม่มีการปล่อยให้ข้อมูลออกมาด้วย โดยที่หลุมดำนั้นจะยังขึ้นอยู่เพียงสามตัวแปรเท่านั้น คือ มวล ประจุ และโมเมนตัมเชิงมุมของหลุมดำเท่านั้น

ในปี ค.ศ. 2016 สตีเฟน ฮอว์กิง เฟอริรี และสตรอมมิงเกอร์ (Stephen W. Hawking, Perry, & Strominger, 2016) ได้ศึกษาทอพอโลยีของหลุมดำที่มีถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงเล็ก ๆ บริเวณรอบ ๆ ฮอริซันเหตุการณ์ของหลุมดำได้

1.10 ควอซีนอร์มอลโหมด

ในปี ค.ศ. 2000 ฮอรวิตซ์และฮิวเบนนี่ (Horowitz & Hubeny, 2000) ได้ทำการศึกษาควอซีนอร์มอลโหมดของหลุมดำชวาร์ซชิลด์ที่อยู่ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ใน d มิติ ซึ่งในงานวิจัยนี้พวกเขาได้ทำการนิยาม ควอซีนอร์มอลโหมด คือ คลื่นที่มีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

1. คลื่นที่บริเวณฮอริซันเหตุการณ์จะมีแค่คลื่นที่วิ่งเข้าเท่านั้น
2. คลื่นที่บริเวณไกล ๆ จากหลุมดำจะมีเพียงคลื่นที่วิ่งออกเท่านั้น หรือคลื่นที่วิ่งออก

จะต้องมีค่าไม่ลู่ออกที่บริเวณไกล ๆ จากหลุมดำ

ถ้าคลื่นมีสมบัติทั้งสองนี้จะเรียกคลื่นนี้ว่า ควอซีนอร์มอลโหมด (Quasinormal modes)

ความมุ่งหมายงานวิจัย

1. เพื่อศึกษาสมบัติเชิงแม่เหล็กไฟฟ้าของหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีขนสเกลาร์ ใน 4 มิติ

2. เพื่อศึกษาควอซีนอร์มอลโหมดโดยใช้วิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์ของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาของหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีขนสเกลาร์ ใน 4 มิติ

ความสำคัญของการวิจัย

ทฤษฎีสัมพัทธภาพที่เป็นทฤษฎีที่ครอบคลุมทฤษฎีและหลักการทางฟิสิกส์ในระดับมหภาค เช่น กลศาสตร์แบบฉบับ, ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น แต่ในตัวทฤษฎีสัมพัทธภาพเองมี ปัญหาของการลู่ออกที่จุดเอกฐานแท้จริงของหลุมดำ ดังนั้นการศึกษาปัญหาของหลุมดำ และ ศึกษาอันตรกิริยาของหลุมดำกับปริมาณต่าง ๆ ทางฟิสิกส์จึงเป็นสิ่งสำคัญที่อาจช่วยอธิบาย ปรากฏการณ์อื่นทางฟิสิกส์ที่ใช้แบบจำลองของหลุมดำอธิบายได้โดยในงานวิจัยนี้ได้ศึกษา หลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ที่มีอันตรกิริยากับสนามสเกลาร์แล้วทำให้เกิดการเปลี่ยนเฟสนี้คล้ายกับการเปลี่ยนเฟสในวัสดุต่าง ๆ ดังนั้นการศึกษากการเปลี่ยนเฟสของ หลุมดำอาจช่วยแก้ปัญหาการเปลี่ยนเฟสในวัสดุเพื่อหาปริมาณทางฟิสิกส์ ซึ่งยังแก้ปัญหาไม่ได้ ด้วยกลศาสตร์ควอนตัม

ขอบเขตของงานวิจัย

ทำการคำนวณเชิงวิเคราะห์หาควอซีนอร์มอลโหมดและความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดของ ศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าใน ปริภูมิเวลาของหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มี สนามสเกลาร์ ใน 4 มิติ

ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

1. ทราบถึงกระบวนการเปลี่ยนเฟสระหว่างหลุมดำมีขนกับหลุมดำไม่มีขนโดยคำนวณจาก พลังงานอิสระของหลุมดำมีขนและหลุมดำไม่มีขน
2. ทราบถึงแนวทางในการคำนวณเชิงวิเคราะห์หาควอซีนอร์มอลโหมดของศักย์ แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาที่มีหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีสนามสเกลาร์ใน 4 มิติ

บทที่ 2

ทบทวนวรรณกรรม

จากที่กล่าวไว้ในบทที่ 1 จะเห็นได้ว่าหลุมดำนั้นมีหลากหลายประเภท ซึ่งแต่ละประเภทจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขตั้งต้น เช่น หลุมดำที่มีมวลและประจุ หลุมดำที่มีมวลและค่าคงตัวของจักรวาล หลุมดำที่มีมวล ประจุ และค่าคงตัวของจักรวาล หรือหลุมดำที่มีขนเนื่องจากสนามสเกลาร์ เป็นต้น ทั้งยังได้นิยามคลื่นที่มีอันตรกิริยากับหลุมดำที่เรียกว่า ควอซีนอร์มอลโหมด ดังนั้นในบทนี้จะอธิบายถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหา ควอซีนอร์มอลโหมดในแบบต่าง ๆ และจะอธิบายถึงกระบวนการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำในรูปแบบต่าง ๆ

2.1 ควอซีนอร์มอลโหมดในปริภูมิเวลาที่มีค่าคงตัวจักรวาลเป็นศูนย์

ในปี ค.ศ. 1998 ฮอคโคทส์และชมิทต์ (Kokkotas & Schmidt, 1999) ใช้หลักการของบอร์ (Bohr's correspondence) ได้ศึกษาสเปกตรัมของพื้นที่ (Area spectrum) ของหลุมดำชวาร์ซ-ชาลด์พบว่าพื้นที่ของหลุมดำมีค่าเป็น $A = (4l_p^2 \ln(3))n$ โดยที่ $l_p = \sqrt{\frac{G}{c^3}} \hbar$ คือ ความยาวพลังค์และ $n = 1, 2, 3, \dots$ ซึ่งมีค่าไม่ต่อเนื่องทั้งยังสอดคล้องกับความสัมพันธ์เอนโทรปีพื้นที่ทางเทอร์โมไดนามิกส์ของหลุมดำและหลักการของบอร์

ในปี ค.ศ. 2003 เดรเยอร์ (Dreyer, 2003) ได้ศึกษา ควอซีนอร์มอลโหมดสเปกตรัมของพื้นที่และเอนโทรปีของหลุมดำชวาร์ซชาลด์โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ของอิมเมอซี (Immirzi parameter) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\ln 3 / 2\pi\sqrt{2}$ ผลการคำนวณหาเอนโทรปีของหลุมดำนี้สอดคล้องกับเอนโทรปีของเบเคนสไตน์และฮอว์กิง คือ $S = A/4l_p^2$

ในปี ค.ศ. 2003 มอทล์และเนย์ทซ์เก้ (Motl & Neitzke, 2003) ได้คำนวณหาความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด จากวิธีวิเคราะห์แบบอะซิมโทติก (Asymptotic analysis) สำหรับหลุมดำชวาร์ซชาลด์ใน $d \geq 4$ มิติ จากวิธีวิเคราะห์แบบอะซิมโทติก คือ การประมาณบริเวณไกล ๆ (หรือให้ค่าใดมีค่ามาก ๆ) เพื่อทำการประมาณ จากหลุมดำชวาร์ซชาลด์พบว่า ส่วนจริงของความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด มีค่าเท่ากับ $\text{Re}(\omega) = \pm T_{\text{Hawking}} \log(3)$ และสำหรับหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์สตรอมใน 4 มิติ สามารถหาความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด ในส่วนจินตภาพของควอซีนอร์มอลโหมดจะใช้กระบวนการโมโนโดรมี (Monodromy method) ซึ่งผลเฉลยได้ออกมาในรูปแบบฟังก์ชันเบสเซล (Bessel functions)

ในปี ค.ศ. 2003 โคโนปเลีย (Konoplya, 2003) ได้ศึกษาลักษณะควอซีนอร์มอลโหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลด์ใน d มิติ แสดงให้เห็นว่าส่วนจริงของความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด ซึ่งแทน

ความถี่การสั่นในส่วนจริงมีค่าแปรผันตรงกับมิติของปริภูมิเวลา (d) และแปรผกผันกับฮอริซัน-เหตุการณ์ โดยใช้วิธีดัดบลิว เค ปีของชัชชิวและไอเยอร์ (Iyer & Will, 1987) คำนวณควอซีนอร์มอลโหมด และสามารถหาความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดจากการประมาณในลำดับที่ 3 ไปจนถึงลำดับที่ 6 ได้

ในปี ค.ศ. 2003 คาร์โดโซ ดิอัสและเลมอส (Cardoso, Dias, & Lemos, 2003) ได้คำนวณพลังงานของการแผ่คลื่นความโน้มถ่วง (Gravitational energy radiation) เนื่องจากการชนกันของสองอนุภาคที่มีความถี่คัทออฟ (Cutoff frequency) ย่านความถี่ต่ำที่ไม่เป็นศูนย์ โดยกำหนดอนุภาคตัวหนึ่งในการชนกันเป็นหลุมดำ ซึ่งความถี่คัทออฟจะมีค่าใกล้เคียงกับความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดที่ต่ำสุด และได้คำนวณความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดในมิติที่สูงขึ้นรวมทั้งยังคำนวณการปลดปล่อยพลังงานในกระบวนการสร้างอนุภาค (Pair creation) ของหลุมดำ

ในปี ค.ศ. 2003 มุสิริและซิออปซิส (Musiri & Siopsis, 2003) ได้ใช้วิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อหาค่าควอซีนอร์มอลโหมดของหลุมดำชวาร์ซชาลต์ใน 4 มิติ โดยการกระจายสมการคลื่นของมอท์ลและเอเนียทซ์เก้ (Motl & Neitzke, 2003) จากลำดับที่ศูนย์เป็นลำดับที่หนึ่ง และแสดงการแก้ไขลำดับที่หนึ่ง (First order correction) โดยใช้วิธีวิเคราะห์แบบอะซิมโทติก ซึ่งผลที่ได้ตรงกับผลจากวิธีดัดบลิว เค ปี และตรงกับวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขในกรณีของคลื่นสเกลาร์และคลื่นเชิงความโน้มถ่วง (Scalar and Gravitational wave)

2.2 ควอซีนอร์มอลโหมดในปริภูมิแอนไท เดอ ซิตเตอร์

ในปี ค.ศ. 1997 ชานและแมนน์ (Chan & Mann, 1997) ได้พิจารณาหลุมดำชวาร์ซชาลต์ในปริภูมิเวลาของ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ใน $(2+1)$ มิติ และ $(3+1)$ มิติ โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์และวิเคราะห์เชิงตัวเลข เพื่อแสดงให้เห็นว่าการสลายตัวสนามสเกลาร์เป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียลในพื้นที่หลังของหลุมดำ $(2+1)$ มิติ และ $(3+1)$ มิติ ทั้งยังแสดงให้เห็นว่าการสลายตัวควอซีนอร์มอลโหมดในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์ จะขึ้นอยู่กับปริมาณ l (โดยที่ l คือ รัศมีของแอนไท เดอ ซิตเตอร์) ยิ่ง l มีค่ามากยิ่งสลายตัวได้ไว คูได้จากปริมาณ $1/t^{2l+3}$

ในปี ค.ศ. 1999 คอคโคทส์และสมิท (Kokkotas & Schmidt, 1999) ได้เสนอ ทฤษฎีควอซีนอร์มอลโหมดในทางดาราศาสตร์รวมทั้งอภิปรายการเพอร์เทอร์เบชันหลุมดำชวาร์ซชาลต์ หลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอม หลุมดำเคอร์ และหลุมดำเคอร์ - นิวแมน โดยใช้วิเคราะห์เชิงตัวเลขในการหาควอซีนอร์มอลโหมด ในหลุมดำข้างต้น

ในปี ค.ศ. 2000 หวาง หลินและแอบดัลลา (Wang, Lin, & Abdalla, 2000) ได้คำนวณหาค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด ของหลุมดำไรส์เนอร์ – นอร์ดสตรอมในปริภูมิเวลา

แอนไท เดอ ซิตเตอร์พบว่าค่าความถี่มีลักษณะใกล้เคียงกับหลุมดำที่มีประจุ และหลุมดำที่มีประจุที่มีขนาดใหญ่กว่าก็จะเข้าสู่สมดุลทางความร้อนเร็วกว่า

ในปี ค.ศ. 2000 โฮโรวิทซ์และฮูเบนี (Horowitz & Hubeny, 2000) ได้ศึกษาการสลายตัวของสนามสเกลาร์ ที่ออกจากหลุมดำชวาร์ซชาลด์ แอนไท เดอ ซิตเตอร์ซึ่งกำหนดโดยค่าความถี่ควอนตัมของหลุมดำ โดยต่างจากหลุมดำในปริภูมิราบ (หลุมดำจิ๋ว) ที่การสลายตัวเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียลแต่ในปริภูมิเวลา แอนไท เดอ ซิตเตอร์และการสลายตัวของสนามสเกลาร์เกี่ยวข้องกับสถานะความร้อนในทฤษฎีสตริง ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับเวลาในการเข้าสู่สมดุลความร้อน และได้คำนวณหาเวลานี้ในกรณี 3, 4 และ 6 มิติ ในรูปแบบของหลุมดำขนาดใหญ่

ในปี ค.ศ. 2011 นามิยูชิคาตะและโยชิเดะ (Uchikata & Yoshida, 2011) ได้ศึกษาความเสถียรของหลุมดำควอนตัมของโรสเนอร์-นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ เมื่อ สนามสเกลาร์ไม่มีมวลแต่มีประจุ และเป็นหลุมดำขนาดเล็ก ใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข โดยกำหนดค่ารัศมีของฮอริซันเหตุการณ์และประจุของหลุมดำ โดยทำการคำนวณความแตกต่างของควอนตัมของหลุมดำจากการเปลี่ยนความเข้มข้นของสนามไฟฟ้าเทียบกับขนาดรัศมีของฮอริซันเหตุการณ์

2.3 ทอพอโลยีและการเปลี่ยนเฟสของหลุมดำที่มีขนเนื่องจากสนามสเกลาร์

ในปี ค.ศ. 2006 มาติเนซ ทรอนโกโซและสตาฟโฟเรียล (Martínez, Troncoso, & Staforelli, 2006) ได้ทำการศึกษาความเป็นไปได้ทางทอพอโลยีของหลุมดำโรสเนอร์-นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ ที่มีขนเนื่องจากสนามสเกลาร์ ซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีความเป็นไปได้ที่จะศึกษาหลุมดำมีขนในกรณีที่สนามสเกลาร์มีมวล และสนามสเกลาร์ไม่มีมวล ทั้งยังแสดงถึงความเป็นไปได้ที่จะทำให้สนามสเกลาร์ที่มีอันตรกิริยากับตัวเองในสมการไอน์สไตน์-แมกซ์เวลล์

ในปี ค.ศ. 2006 โคทซุมบัส มุสิริ พาแพนโทโนโปโลส และ ซืออฟูซีส (Koutsoumbas, Musiri, Papantonopoulos, & Siopsis, 2006) คำนวณโดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์จากกระบวนการโมโนโดรมี่ (Monodromy method) ในการคำนวณควอนตัมของหลุมดำมีขนที่มีคุณสมบัติทอพอโลยีใน 4 มิติโดยรอบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

ในปี ค.ศ. 2010 มาติเนซและมอนติซินอส (Martínez & Montecinos, 2010) ได้ทำการศึกษาการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำจากหลุมดำมีขนไปเป็นหลุมดำไม่มีขน โดยงานวิจัยนี้เริ่มต้นจากการที่กำหนดสมการไอน์สไตน์-แมกซ์เวลล์ ใน 4 มิติ ที่มีอันตรกิริยาของสนามสเกลาร์และมีค่าคงตัวของจักรวาลเป็น Λ โดยเขียนแอคชันได้เป็น

$$I[g_{\mu\nu}, \phi, A_\mu] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{12} R \phi^2 - \alpha \phi^4 \right] - \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (2.1)$$

โดย G คือ ค่าคงตัวของนิวตัน และ α คือ ค่าคงตัวอันตรกิริยาของสนามสเกลาร์ สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ และสมการสนามของไอน์สไตน์ ได้ดังนี้ (ภาคผนวก)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^{em}), \quad (2.2)$$

$$\square\phi = \frac{1}{6}R\phi + 4\alpha\phi^3, \quad (2.3)$$

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.4)$$

โดย $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ สามารถเขียนเทนเซอร์พลังงาน - โมเมนตัมของสนามสเกลาร์ (Energy-Momentum tensor of scalar field) คือ

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{6}[g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu}]\phi^2 - g_{\mu\nu}\alpha\phi^4 \quad (2.5)$$

และเทนเซอร์พลังงาน - โมเมนตัมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (Energy-Momentum tensor of electromagnetic field) คือ

$$T_{\mu\nu}^{em} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\alpha}F_{\delta\beta}g^{\gamma\delta}\right]g^{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

ซึ่ง $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ และ $\Lambda = -3/l^2$ โดยที่ l คือ รัศมีแอนไท เดอ ซิตเตอร์ที่มีหน่วยเป็นระยะทาง ในงานวิจัยนี้สามารถหาผลเฉลยจากสมการ (2.1) เรียกว่า หลุมดำมีขน (hairy black hole) ซึ่งสามารถเขียนในรูปของการกระจัดเล็ก ๆ กำลังสอง ได้เป็น

$$ds^2 = -\left[\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2\right]dt^2 + \left[\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2\right]^{-1}dr^2 + r^2d\sigma^2, \quad (2.7)$$

โดย σ คือ มุมตันในกรณีใด ๆ เช่น ในสมมาตรทรงกลม $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ สามารถเขียนค่าของสนามสเกลาร์

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2\alpha l^2}}\left(\frac{G\mu}{r + G\mu}\right), \quad (2.8)$$

และศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า

$$A = A_0(r)dt = -\frac{q}{r}dt, \quad (2.9)$$

โดยที่ค่าของ q และ μ เป็นค่าที่ขึ้นต่อกัน ดังสมการ

$$q^2 = -G\mu^2 \left(1 + \frac{2\pi G}{3l^2\alpha}\right) \equiv G\mu^2(a - 1), \quad (2.10)$$

เมื่อ $a = 2\pi G/(3l^2\alpha) \geq 1$ เพราะว่าค่า q ต้องเป็นค่าจริง และเป็นพารามิเตอร์ของค่าคงตัวอันตรกิริยาของสนามสเกลาร์

จากการหาค่าของฮอริซันที่จะหาได้จากการให้ $\left[\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2\right] = 0$ จะเห็นได้ว่า r เป็นสมการกำลังสี่ ดังนั้นการแก้สมการกำลังสี่ออกมาจะได้ผลเฉลยออกมาสี่ค่า ซึ่งสี่ค่านั้นจะเรียกว่าฮอริซัน ซึ่งในงานวิจัยนี้จะแยกค่าคงตัวของ μ ออกมาเป็น 3 กรณีด้วยกัน คือ

1. กรณีที่ $G\mu > 0$ จะได้ผลเฉลยออกมาหนึ่งฮอริซันเหตุการณ์เสมอ
2. กรณีที่ $-l/4 \leq G\mu < 0$ จะได้ผลเฉลยออกมาเป็น หนึ่งฮอริซันเหตุการณ์ หนึ่งเป็นฮอริซันโคชี และอีกสองเป็นฮอริซันมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน
3. กรณีที่ $G\mu = -l/4$ จะทำให้เกิดฮอริซันเหตุการณ์สองตัวที่มีค่าเท่ากับ $l/2$ และที่เหลือจะได้ออกมาเป็นฮอริซันโคชี จากการที่ได้ ฮอริซันมีซ้ำกันจึงเรียกกรณีนี้ว่า หลุมดำมีขนแบบสุดขีด (extremal hairy black hole)

ต่อมาทำการกำหนดให้ $\phi \equiv 0$ ผลเฉลยของสมการที่ (2.1) จะลงรูปลงไปเป็น หลุมดำไม่มีขนแบบในปริภูมิเวลาไรส์เนอร์ - นอร์ดสตรอม โดยให้มีสมมาตรไฮเพอร์โบลิก (Nonextremal hyperbolic Reissner-Nordström black hole (hRN)) ซึ่งสามารถเขียนในรูปของการกระจัดเล็ก ๆ กำลังสองได้เป็น

$$ds^2 = -\left(\frac{\rho^2}{l^2} - 1 - \frac{2G\mu_0}{\rho} + \frac{Gq_0^2}{\rho^2}\right) dt^2 + \left(\frac{\rho^2}{l^2} - 1 - \frac{2G\mu_0}{\rho} + \frac{Gq_0^2}{\rho^2}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2, \quad (2.11)$$

เมื่อ $\rho > 0$ โดยที่ ρ คือ รัศมีในพิกัดเชิงมุม และ μ_0 และ q_0 เป็นค่าคงตัวจากการอินทิเกรตที่ไม่ขึ้นต่อกัน ทั้งยังเป็นสัดส่วนของ มวลและประจุไฟฟ้าตามลำดับ ต่อมาสามารถเขียนศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าได้เป็น

$$A = -\frac{q_0}{\rho} dt, \quad (2.12)$$

จะทำการหาค่าของฮอริซันเหตุการณ์ โดยที่นิยามให้ฮอริซันเหตุการณ์มีค่าเป็น ρ_+ และจะสามารถหาค่าของฮอริซันเหตุการณ์ได้จากสมการ

$$\frac{\rho_+^2}{l^2} - 1 - \frac{2G\mu_0}{\rho_+} + \frac{Gq_0^2}{\rho_+^2} = 0, \quad (2.13)$$

ต่อมาในกรณีของหลุมดำไม่มีขนแบบสุดขีด จะเป็นได้โดยจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขดังสมการ

$$G\mu_0|_{ext} = \left(\frac{2\rho_+^2}{l^2} - 1\right)\rho_+, \quad Gq_0^2|_{ext} = \left(\frac{3\rho_+^2}{l^2} - 1\right)\rho_+^2, \quad (2.14)$$

ในงานวิจัยของมาตินเนสและมอนติซีโนส ต้องการหาการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำ โดยใช้การคำนวณผ่านทาง พลังงานอิสระ (Free energy) ของหลุมดำ การที่จะหาการเปลี่ยนแปลงเฟสของหลุมดำได้โดยเขียนให้อยู่ในรูปของผลต่างของพลังงานอิสระของเทอร์โมไดนามิกส์ และทำการคำนวณค่าของแกรนด์คานอนิคอลอองซอมเบิล (Grand canonical ensemble) ของหลุมดำมีขนและหลุมดำไม่มีขน เมื่ออุณหภูมิรวมของระบบเป็น T และมีค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าเป็น $\Phi = A_0(\infty) - A_0$ (ที่ ฮอริซันเหตุการณ์) ต่อมาหาค่าของพลังงานอิสระ F เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับค่า T และ Φ สามารถเขียนสมการของพลังงานอิสระได้เป็น $F = F(T, \Phi) = M - TS - \Phi Q$ เมื่อ M, Q, S หมายถึงมวล ประจุไฟฟ้า และเอนโทรปีของหลุมดำ ดังนั้นการที่จะเขียนสมการพลังงานอิสระได้จะต้องเขียนอุณหภูมิ ความต่างศักย์ไฟฟ้า มวล ประจุไฟฟ้า และเอนโทรปีของหลุมดำ ซึ่งจะเริ่มจากกรณีของหลุมดำมีขนจะสามารถเขียนปริมาณดังกล่าวได้เป็น

$$T = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{2r_+}{l} - 1\right), \quad \Phi = \frac{q}{r_+}, \quad (2.15)$$

$$M = \frac{\sigma}{4\pi} \mu, \quad Q = \frac{\sigma}{4\pi} q, \quad S = \frac{\sigma r_+^2}{4G^*}, \quad (2.16)$$

เมื่อ G^* คือ ค่าคงตัวของนิวตันยังผล (Effective Newton constant) ซึ่งมีค่าเป็น

$$\frac{1}{G^*} \equiv \frac{1}{G} \left(1 - \frac{4\pi G}{3} \phi^2(r_+)\right), \quad (2.17)$$

จากงานวิจัยของมาตินเนส ทรอนโกโซและสตาฟโฟเรียล แสดงให้เห็นว่า เอนโทรปีของระบบจะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นในสมการที่ (2.16) ได้ผลออกมาเป็นค่าบวก ยกเว้นส่วนค่าคงตัวของนิวตันยังผลที่อาจจะไม่มีค่าเป็นบวก ซึ่งจะเห็นจากสมการที่ (2.17) ว่าถ้าต้องการให้มีค่าเป็นบวกจะต้องกำหนดให้ $1 - \frac{4\pi G}{3} \phi^2(r_+) \geq 0$ โดยที่ค่า ϕ มีค่าดังสมการ (2.8) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ α โดยที่สามารถเขียนสองปริมาณดังกล่าวให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ α (จากความสัมพันธ์ $\alpha = 2\pi G/(3l^2\alpha)$) ด้วยเงื่อนไขดังกล่าวจึงสามารถหาช่วงของอุณหภูมิ ซึ่งสามารถเขียนเป็นช่วงระหว่างอุณหภูมิน้อยที่สุดกับอุณหภูมิมากที่สุด (T_{min}, T_{max}) โดยที่อุณหภูมิน้อยที่สุดกับอุณหภูมิที่มากที่สุดสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ α ได้ดังสมการ

$$T_{min} = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{\sqrt{\alpha} - 1}{\sqrt{\alpha} + 1}\right), \quad T_{max} = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{\sqrt{\alpha} + 1}{\sqrt{\alpha} - 1}\right), \quad (2.18)$$

ต่อมาในกรณีของหลุมดำไม่มีขนสามารถเขียนปริมาณดังกล่าวได้เป็น

$$T = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{\rho_+}{l} + \frac{G\mu_+ l}{\rho_+^2} - \frac{Gq_0^2 l}{\rho_+^3} \right), \quad \Phi = \frac{q_0}{\rho_+}, \quad (2.19)$$

$$M = \frac{\sigma}{4\pi} \mu_0, \quad Q = \frac{\sigma}{4\pi} q_0, \quad S = \frac{\sigma \rho_+^2}{4G}, \quad (2.20)$$

ในการที่จะหาค่าการเปลี่ยนแปลงเฟสระหว่างหลุมดำมีขนกับหลุมดำไม่มีขน ได้ทำการกำหนดให้หลุมดำทั้งสองนั้นมีแกรนด์คาโนนิคอลลอนซอมเบิลเท่ากัน (จุดที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟส) หมายความว่า อุณหภูมิของหลุมดำแบบมีขนกับไม่มีขนมีค่าเท่ากัน และศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าของหลุมดำมีขนและไม่มีขนมีค่าเท่ากัน ดังนั้นจึงนำสมการที่ (2.15) และ (2.19) มาเท่ากันจะได้สมการ

$$\frac{2r_+}{l} - 1 = \frac{\rho_+}{l} + \frac{G\mu_0 l}{\rho_+^2} - \frac{Gq_0^2 l}{\rho_+^3}, \quad \frac{q}{r_+} = \frac{q_0}{\rho_+}, \quad (2.21)$$

ทั้งนี้สมการที่ (2.15) และ (2.19) เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร r_+, q, ρ_+ และ q_0 เพื่อให้ง่ายจะทำการเปลี่ยนฟังก์ชันให้ขึ้นอยู่กับตัวแปร T และ Φ ต่อมาจะทำการเปลี่ยนสมการ (2.15)–(2.17) และ (2.19)–(2.21) ที่เขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปร T และ Φ แทนลงในสมการของพลังงานอิสระ ซึ่งเขียนพลังงานอิสระได้เป็น 2 แบบ คือ พลังงานอิสระของหลุมดำไม่มีขน (F_{hRN}) กับหลุมดำมีขน (F_{hair}) ดังสมการ

$$F_{hRN} = -\frac{\sigma l}{8\pi G} \left[2 \left(\frac{\rho_+}{l} - \pi l T \right) \frac{\rho_+^2}{l^2} \right], \quad (2.22)$$

$$F_{hair} = -\frac{\sigma l}{8\pi G} \left[\left(\pi l T + \frac{1}{2} \right)^2 + a \left(\pi l T - \frac{1}{2} \right)^2 \right], \quad (2.23)$$

จากสมการที่ (2.19) สามารถแก้สมการกำลังสี่เพื่อหา ρ_+/l จะได้ออกมาเป็นพหุนามดีกรีของ $\pi l T$ และ a ดังสมการ

$$\frac{\rho_+}{l} = \frac{2\pi l T}{3} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{4(\pi l T)^2} \left[1 + (a-1) \left[\pi l T - \frac{1}{2} \right]^2 \right]} \right], \quad (2.24)$$

นำสมการ (2.24) แทนลงในสมการ (2.22) เพื่อทำให้เป็นตัวแปรเดียวกัน และหาค่าความต่างของพลังงานอิสระ ระหว่างหลุมดำไม่มีขนกับหลุมดำมีขน โดยนำพลังงานอิสระทั้งสองมาลบกัน ดังสมการ

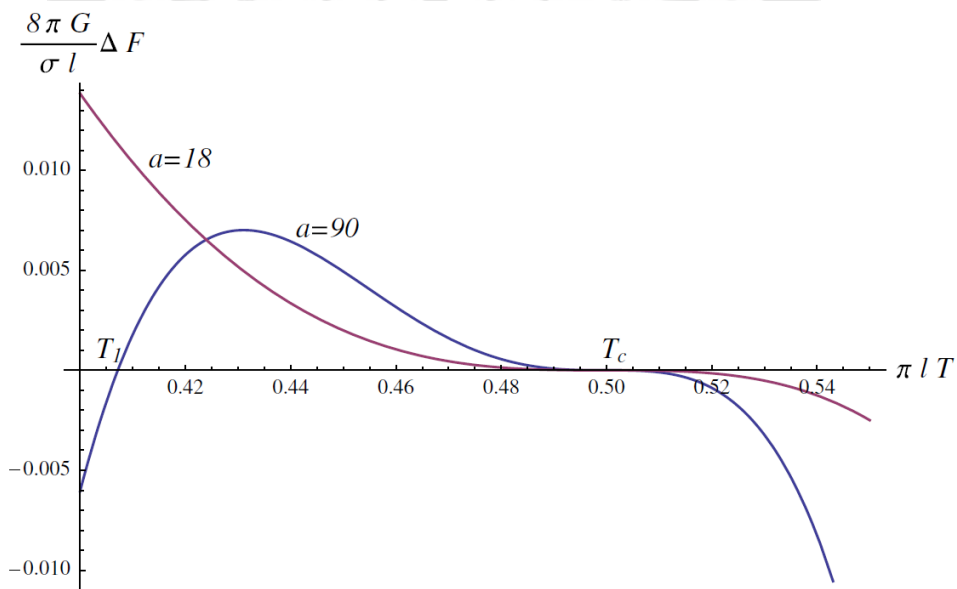
$$\Delta F = F_{hRN} - F_{hair}, \quad (2.25)$$

โดยปกติพลังงานอิสระจะเป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่อยู่ในรูปของปริภูมิเฟสของอุณหภูมิ (T) และศักย์ไฟฟ้า (Φ) ในกรณีของหลุมดำมีขนมวล (μ) กับประจุ (q) จะเห็นได้จากสมการ (2.10) มี

ความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น ทำให้เขียนพลังงานอิสระในสมการ (2.22), (2.23) และ (2.25) เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวในรูปตัวแปรอุณหภูมิ (T)

โดยในงานวิจัยของมาตินเนสและมอนติซินอส ได้ทำการหาแผนภาพเฟส ซึ่งขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ a โดยค่าของพารามิเตอร์ a มีค่าเป็นส่วนกลับของค่าคงตัวอันตรกิริยาของสนามสเกลาร์ (α) $\{a = \frac{2\pi G}{3l^2\alpha}\}$ สามารถดูได้จากกราฟในภาพประกอบที่ 2 แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของ ΔF โดยพารามิเตอร์ a สองค่า เมื่อค่าของพารามิเตอร์ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมดนั้น ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 ($a \geq 1$) จะเห็นได้ว่าค่าที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนเฟสนั้นเกิดได้ที่ค่า $T_c = (2\pi l)^{-1}$ (ที่ $\Phi = 0$) โดยเรียกจุดนี้ว่าการเปลี่ยนเฟสลำดับที่สอง เพราะว่าจุดที่ $\Delta F = 0$ ที่ T_c ในกราฟสีน้ำเงินจะเห็นได้ว่าความชันเป็นศูนย์เป็นลำดับที่สอง และในกราฟสีแดงจะเห็นได้ว่ากราฟลดลงมายังจุด T_c ซึ่งเป็นจุดเดียวกับกราฟสีน้ำเงิน ทั้งนี้ยังสามารถยืนยันผลได้โดยทำการกระจายอนุกรมกำลังสาม

$$\Delta F = -\frac{a\sigma\pi l^4}{64G}(T - T_c)^3 + O(T - T_c)^4, \quad (2.26)$$

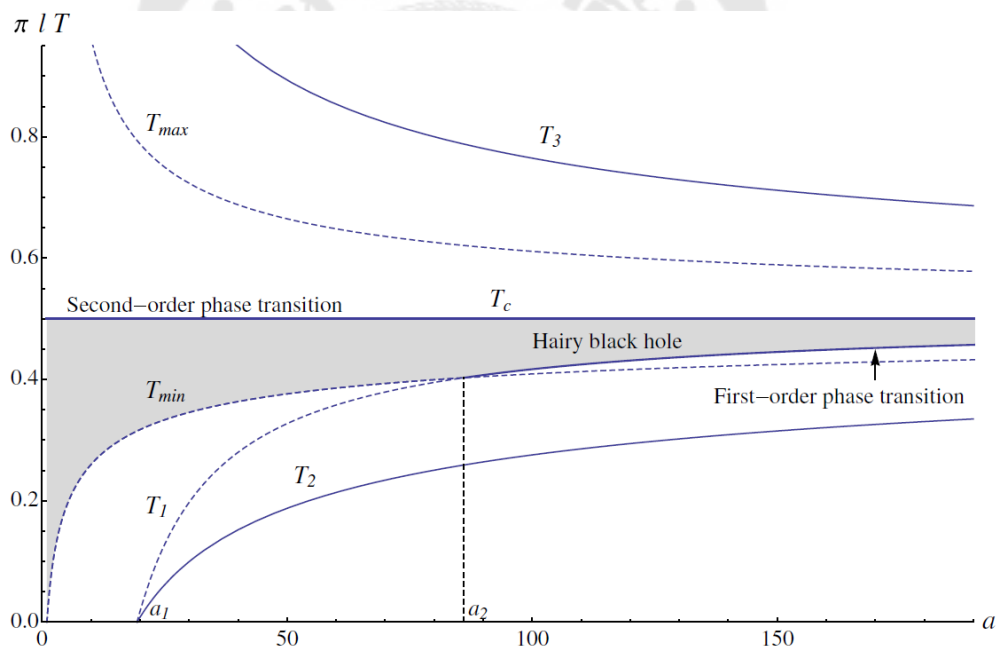


ภาพประกอบ 2 กราฟการเปลี่ยนเฟสของของหลุมดำระหว่างผลต่างพลังงานอิสระกับอุณหภูมิซึ่งจะแสดงให้เห็นถึงค่าการเปลี่ยนเฟสในลำดับที่หนึ่งและลำดับที่สอง

ที่มา: (Martinez & Montecinos, 2010)

โดยภาพประกอบ 2 จะแสดงถึงกราฟที่เขียนระหว่างผลต่างของพลังงานอิสระ (ΔF) กับ อุณหภูมิ ($\pi l T$) กราฟทั้งสองต่างกันที่ค่าพารามิเตอร์ a เมื่อเส้นสีแดงมีค่า $a = 18$ และเส้นสีน้ำเงินมีค่า $a = 90$ (พารามิเตอร์ $a = 2\pi G/3l^2\alpha$) จะเห็นได้ว่ากราฟทั้งสองค่านี้มีค่าลู่เข้าสู่การเปลี่ยนแปลงลำดับที่สองที่จุด $T_c = (2\pi l)^{-1}$ เหมือนกันทั้งสองค่า และที่เส้นสีน้ำเงินจะให้ค่าการเปลี่ยนแปลงลำดับที่หนึ่งที่จุด T_1

ผลจากงานวิจัยข้างต้นคล้ายคลึงกับงานวิจัยที่กล่าวถึงหลุมดำที่ไม่มีประจุ จากงานวิจัยของคอดโคทส์ มุคิริ พาพันโทโนสโพลัสและชินอฟชิต หรืองานวิจัยของมาติเนส ทรอนโกโซและซีเนส (Koutsoumbas et al., 2006; Martinez, Troncoso, & Zanelli, 2004) (ในกรณีหลุมดำไม่มีประจุกำหนดให้ค่า $a = 1$) ในช่วงของ $T \geq T_c$ นั้นเป็นหลุมดำไม่มีขน ในทางเทอร์โมไดนามิกส์ได้นิยามแบบนี้เพราะว่าที่ $T < T_c$ ได้นิยามให้เป็นหลุมดำมีขน ซึ่งดูได้จากภาพประกอบที่ 3



ภาพประกอบ 3 กราฟการเปลี่ยนแปลงของหลุมดำระหว่างอุณหภูมิกับพารามิเตอร์ของค่าคงตัวอันตรกิริยาของสนามสเกลาร์

ที่มา: (Martinez & Montecinos, 2010)

โดยภาพประกอบ 3 จะแสดงถึงกราฟของค่าการเปลี่ยนแปลง โดยที่ช่วงของค่า T_{min} กับ T_{max} จะเห็นได้ว่ากราฟทั้งหมดลู่เข้าสู่ค่า $T_c = (2\pi l)^{-1}$ เมื่อ $a \rightarrow \infty$ และการเปลี่ยนแปลงลำดับที่

สองจะเกิดที่ $a \geq 1$ จากภาพจะเห็นว่าที่เส้น T_1 นั้นเริ่มต้นที่ $a = a_1$ และการเพิ่มขึ้นของพารามิเตอร์ a ไปที่จุด $a \geq a_2$ เส้นของ T_1 นั้นได้เข้าไปในส่วนของหลุมดำมีขน ซึ่งจะเรียกส่วนที่เข้าไปว่า การเปลี่ยนเฟสลำดับที่หนึ่ง ต่อมาจากการคำนวณอุณหภูมิของหลุมดำมีขนนั้นอยู่ในช่วง (T_{min}, T_{max}) แต่จากภาพจะเห็นได้ว่าส่วนสี่เทาที่เป็นอุณหภูมิของหลุมดำมีขนที่อยู่ในช่วง (T_{min}, T_c) เพราะว่าช่วง (T_c, T_{max}) ไปซ้ำกับอุณหภูมิของหลุมดำไม่มีขนดังนั้นจึงต้องตัดออกจากรูปจะเห็นได้ว่าค่า T_2 และ T_3 นั้นอยู่นอกเหนือช่วงของ (T_{min}, T_{max}) จะตีความว่าอุณหภูมิทั้งสองไม่เป็นอุณหภูมิทางกายภาพ (อุณหภูมิกายภาพ คือ อุณหภูมิที่เป็นไปได้ของหลุมดำมีขน ดูได้จากภาพประกอบที่ 3)

จากภาพประกอบที่ 2 จะเห็นได้ว่าที่ $a > a_1 = 3(3 + 2\sqrt{3}) \sim 19.4$ สามารถหาผลเฉลยที่ผลต่างพลังงานอิสระเป็นศูนย์ ($\Delta F = 0$) ได้ที่จุด T_1 และสามารถหาการเปลี่ยนเฟสลำดับที่สองได้ที่จุด T_c ต่อมาในภาพประกอบที่ 3 ที่ $a > a_2 \sim 89$ จะเห็นได้ว่าอุณหภูมิ T_1 จะเปลี่ยนเข้าไปในส่วนของหลุมดำมีขน

ต่อมาในงานวิจัยของมาติเนสและมอนติซีโนสยังได้เพิ่มอีกหนึ่งกรณี คือ กรณีของหลุมดำไม่มีขนแบบสุดขีดลงในการคำนวณ โดยที่หลุมดำไม่มีขนแบบสุดขีดซึ่งจะคำนวณคล้ายกับสองกรณีก่อนหน้า คือ เขียนให้อยู่ในรูปของพลังงานอิสระเพื่อที่จะนำพลังงานอิสระของหลุมดำแต่ละประเภทมาหาค่าความต่างเฟส โดยที่ใช้สมการ (2.14) มาแทนลงในสมการของพลังงานอิสระจะได้เป็น

$$F_{ext} = -\frac{\sigma l}{4\pi G} \left[\frac{1 + (a-1) \left(\pi l T - \frac{1}{2} \right)^{2\frac{3}{2}}}{3} \right], \quad (2.27)$$

เมื่อ $a > 1$ และ $T > 0$ ที่พลังงานอิสระมีค่าเป็น F_{ext} เป็นค่าที่ดีที่สุดในกรณีของหลุมดำไม่มีขนซึ่งพลังงานอิสระแบบนี้ คือ พลังงานอิสระของหลุมดำที่ไม่มีขนแบบสุดขีด จะบังคับถึงการเปลี่ยนแปลงจากหลุมดำไม่มีขนแบบสุดขีดไปเป็นหลุมดำไม่มีขน หรือหลุมดำมีขน โดยเห็นได้จากการเปลี่ยนเฟส ซึ่งจะคล้ายคลึงกับงานวิจัยของมาติเนสและทรอนโกโซ (Martinez & Troncoso, 2006) (หรืองานวิจัยของไคและหวาง (Cai & Wang, 2004)) ที่นำ F_{ext} กับ F_{hairly} มาเทียบกัน โดยทำการหาค่าความต่างจะเห็นได้ว่าพจน์ของ $F_{ext} - F_{hairly} = 0$ ที่ค่าของสองอุณหภูมิ คือ ที่อุณหภูมิเท่ากับ T_2 และที่อุณหภูมิเท่ากับ T_3 (เมื่อ $T_3 > T_2$) จะเห็นได้ว่า T_2 และ T_3 จะปรากฏขึ้นเฉพาะที่ $a > a_1$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าที่ $F_{ext} > F_{hairly}$ จะอยู่ในช่วงของ (T_2, T_3) อาจจะเป็นสัญญาณบ่งชี้ถึงการมีอยู่ของการเปลี่ยนเฟสของอุณหภูมิ T_3 และ T_2 ที่ $a > a_1$ (จากภาพประกอบที่ 3)

อย่างไรก็ตามที่อุณหภูมิที่ $T_2 < T_{min}$ และ $T_3 > T_{max}$ (จากภาพประกอบที่ 3) นั้นไม่ได้ อยู่ในช่วงของ $T_{min} < T < T_{max}$ คือ ไม่ได้อยู่ในช่วงของอุณหภูมิกายภาพ ดังนั้นอุณหภูมิดังกล่าว จึงไม่สามารถทำให้เกิดการเปลี่ยนเฟสระหว่างหลุมดำมีขนกับหลุมดำไม่มีขนแบบสุดขีดได้ ตั้งแต่ที่ค่าของ F_{ext} มากกว่าค่าของ F_{hairly} และ F_{hRN} จะเห็นว่าหลุมดำไม่มีขนแบบสุดขีด นั้นสามารถ สลายตัวลงเป็นหลุมดำมีขน หรือสลายตัวไปเป็นหลุมดำไม่มีขน และสามารถสลายตัวใน อัตราส่วนที่แตกต่างกัน



บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะทำการหาควซิงเจอร์มอลโหมดของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในปริภูมิเวลาของ หลุมดำไรส์เนอร์ - นอร์ดสตรอม แอนไท เดอ ซิตเตอร์ที่มีขนสเกลาร์ใน 4 มิติ สามารถดูขั้นตอน งานวิจัยนี้ได้จากผลงานตีพิมพ์กาญจนเพิ่มชม และมุศิริ ในปี 2021 (Kanjanaphomchom & Musiri, 2021) ซึ่งเป็นงานวิจัยที่ตีพิมพ์ของงานวิจัยนี้ แต่จะลงรายละเอียดอย่างมาก และมีผลของ งานวิจัยอยู่ภายในเล่มวิจัยนี้ ทั้งนี้ในทบทวนจะเริ่มต้นจากการตั้งเงื่อนไขของการไหลของประจุไฟฟ้า ที่อยู่ในหลุมดำ ทั้งยังมีขั้นตอนของการหาผลเฉลย และมีขั้นตอนการดำเนินงานดังต่อไปนี้

3.1 สมการอนุพันธ์ของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า

เริ่มจากตั้งสมมติฐานโดยการที่สร้างการไหลของประจุไฟฟ้าของหลุมดำมีขน และให้ กระแสไฟฟ้านั้นไม่ขึ้นกับมุม ϕ ต่อมาทำการเปลี่ยนพิกัด $t, r, \theta, \phi \rightarrow t, r, X, Y$ โดยที่ X, Y เป็นพิกัด ทั่วไป

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(dX^2 + dY^2),$$
$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2, \quad (3.1)$$

เพื่อที่จะทำให้มีการไหลของของประจุไฟฟ้าของหลุมดำ แต่ไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงต่อศักย์ แม่เหล็กไฟฟ้าในพิกัด t ของ A_0 จึงต้องกำหนดศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในพิกัด X ของ A_X ไม่ขึ้นอยู่กับ พิกัด X ซึ่งสามารถเขียนศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าได้เป็น

$$A \equiv A_\mu dx^\mu = A_0 dx^0 + A_X dx^X, \quad (3.2)$$

โดยกำหนดให้

$$A_0(r) \equiv \frac{kQ}{r}, \quad A_X \equiv e^{-i\omega t} R(r) \mathcal{H}(Y), \quad (3.3)$$

จากการไหลของประจุไฟฟ้าทำให้เกิดสนามแม่เหล็กในทิศ X ซึ่งทำให้เกิดศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าในรูป ของ A_X โดยไม่ขึ้นกับทิศ X จะหาผลเฉลยได้จากสมการ (2.4) ในงานวิจัยนี้จะทำการแทนสมการที่ (3.2) และ (3.3) ลงไป

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) \\
&= \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{xx}g^{\nu\nu}F_{x\nu}) \\
&= \partial_t(\sqrt{-g}g^{xx}g^{tt}F_{xt}) + \partial_r(\sqrt{-g}g^{xx}g^{rr}F_{xr}) \\
&\quad + \partial_y(\sqrt{-g}g^{xx}g^{yy}F_{xy}) \\
&= -\frac{\omega^2}{f(r)}A_x + \partial_r(f(r)\partial_r A_x) + \frac{1}{r^2}\partial_r^2 A_x \\
0 &= \frac{r^2}{R}\partial_r(f(r)\partial_r R(r)) + \frac{\omega^2 r^2}{f(r)} + \frac{1}{\mathcal{H}(y)}\partial_y^2 \mathcal{H}(y), \tag{3.4}
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่ามีการแยกองค์ประกอบที่จะทำให้สมการออกมาอยู่ในสองรูปแบบ คือ สมการที่ขึ้นกับมุม และสมการที่ขึ้นกับรัศมีดังสมการ

$$\frac{1}{\mathcal{H}(y)}\partial_y^2 \mathcal{H}(y) \equiv -m^2, \tag{3.5}$$

และ

$$\frac{r^2}{R}\partial_r(f(r)\partial_r R(r)) + \frac{\omega^2 r^2}{f(r)} \equiv +m^2, \tag{3.6}$$

โดย m คือ ค่าคงตัวจากการแยกตัวแปร จากสมการที่ (3.6) สามารถจัดรูปได้เป็น

$$0 = f(r)\frac{d}{dr}\left(f(r)\frac{dR(r)}{dr}\right) + \omega^2 R(r) - \frac{m^2 R(r)f(r)}{r^2}, \tag{3.7}$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (3.7) เป็นสมการอนุพันธ์ลำดับที่สอง ซึ่งจะมีความยุ่งยากของการแก้สมการ

3.2 ผลเฉลยที่ค่าคงตัวของการแยกตัวแปรเป็นศูนย์

จากสมการที่ (3.7) จะเห็นได้ว่ามีความยุ่งยากในการหาผลเฉลยแบบแม่นยำ ดังนั้นในขั้นตอนนี้จะทำการกำหนดให้ค่าคงตัวจากการแยกตัวแปรเป็นศูนย์ ($m = 0$) จะทำการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ได้ง่ายยิ่งขึ้น

เริ่มจากการได้ผลเฉลยของสมการที่ (3.5) เป็น

$$\mathcal{H}(y) = c + by, \tag{3.8}$$

โดยที่ c, b คือ ค่าคงตัว เนื่องจาก $\mathcal{H}(y)$ ในสมการ (3.8) มีสมมาตรทรงกลมหรือสมมาตรไฮเพอร์โบลิก ในกรณีที่เป็นสมมาตรทรงกลม y เป็นมุมที่จะต้องทำให้ทำให้ $\mathcal{H}(y)$ มีค่าเป็นคาบ หรือใน

กรณีที่เป็นสมมาตรไฮเพอร์โบลิก y เป็นมุมหรือปริมาณที่มีค่าตั้งแต่ศูนย์ถึงอนันต์แต่จะต้องไม่ทำให้ $\mathcal{H}(y)$ หาค่าไม่ได้หรือลู่ออก ไม่ว่าจะให้ค่า y เป็นมุมที่มีการครอบรอบ 2π หลายครั้งหรือมีค่ามาก ๆ จะต้องทำให้ $\mathcal{H}(y)$ มีค่าเป็นคาบและ/หรือไม่ลู่ออก จึงกำหนดให้ค่าคงตัว $b = 0$ เพื่อให้ไม่เกิดการลู่ออก และสมการที่ (3.7) จะลดรูปลงมาเป็น

$$0 = f(r) \frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{dR(r)}{dr} \right) + \omega^2 R(r), \quad (3.9)$$

ต่อมาจะทำการหาผลเฉลยของสมการที่ (3.9) โดยที่กำหนดค่าของ $r \rightarrow r^*$ เป็น

$$\frac{d^2 R}{d(r^*)^2} + \omega^2 R = 0, \quad dr^* = \frac{dr}{f(r)} = \frac{dr}{\frac{r^2}{l^2} - \left(1 + \frac{G\mu}{r}\right)^2}, \quad (3.10)$$

จะได้ผลเฉลยของค่า $R(r^*)$ เป็น

$$R(r^*) = Ae^{i\omega r^*} + Be^{-i\omega r^*}, \quad (3.11)$$

โดยที่ A, B คือ ค่าคงตัว และสามารถหาค่า r^* ในรูปของ r ได้เป็น

$$r^* = \sum_{i=1}^4 \left[\frac{a_i r_i^2}{2l^2} \ln(r - r_i) + \frac{a_i}{2l^2} (r - r_i)^2 + \frac{2a_i r_i^2}{l^2} \right], \quad (3.12)$$

ทั้งนี้ a_i มีค่าเป็น

$$a_1 = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_1 - r_4)}, \quad a_2 = \frac{1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)(r_2 - r_4)}, \quad (3.13)$$

$$a_3 = \frac{1}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)}, \quad a_4 = \frac{1}{(r_4 - r_1)(r_4 - r_2)(r_4 - r_3)},$$

โดยที่ a_i เป็นดังสมการ (3.13)

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{i=1}^4 a_i r_i = \sum_{i=1}^4 a_i r_i^2 = 0, \quad (3.14)$$

จากสมการที่ (3.14) แทนลงในสมการที่ (3.12) จะลดรูปลงเป็น

$$r^* = \sum_{i=1}^4 \frac{a_i r_i^2}{2l^2} \ln(r - r_i), \quad (3.15)$$

ซึ่งแทนลงในสมการที่ (3.11) จะได้ว่า

$$R(r) = \prod_{i=1}^4 A(r - r_i)^{\frac{i\omega a_i r_i^2}{2l^2}} + \prod_{i=1}^4 B(r - r_i)^{\frac{-i\omega a_i r_i^2}{2l^2}}, \quad (3.16)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ใกล้ ๆ กับฮอริซันเหตุการณ์จะต้องมีเพียงคลื่นที่วิ่งเข้าเท่านั้น ทำให้ในส่วนของยกกำลังบวกซึ่งหมายถึงคลื่นที่วิ่งออกจะต้องไม่มีอยู่ จึงทำการกำหนดให้ $A = 0$ ดังนั้นถ้านำไปแทนในสมการของ (3.16) จะได้ว่า

$$R(r) = \prod_{i=1}^4 B(r - r_i) \frac{-i\omega a_i r_i^2}{2l^2} \quad (3.17)$$

และเงื่อนไขขอบเขตที่ไกล ๆ จากหลุมดำจะต้องมีแค่คลื่นที่วิ่งออกเท่านั้นหรือค่าที่ได้จะต้องไม่ลู่ออก ($r \rightarrow \infty$) แทนลงไปในสมการที่ (3.17) โดยที่ค่า $\omega \equiv \text{Re}(\omega) - i\text{Im}(\omega) = \omega_{Re} - i|\omega_{Im}|$ ซึ่งถ้านำไปแทนลงในสมการที่ (3.17) จะได้ว่า

$$R(r \rightarrow \infty) \approx \prod_{i=1}^4 (r) \frac{-i(\omega_{Re} - i|\omega_{Im}|)a_i r_i^2}{2l^2} \quad (3.18)$$

เมื่อ $r \rightarrow \infty$ จะสามารถประมาณโดยใช้วิธีการประมาณแบบอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) $R \approx r^{-\frac{i\omega}{2l}(\sum_{i=1}^4 a_i r_i^2)} \left(1 + \frac{-i\omega}{2l} (\sum_{i=1}^4 a_i r_i^3) \frac{1}{r} + \dots\right)$ และจากเงื่อนไขในสมการที่ (3.14) ($\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{i=1}^4 a_i r_i = \sum_{i=1}^4 a_i r_i^2 = 0, \sum_{i=1}^4 a_i r_i^3 \neq 0$) จะประมาณได้เป็น $R \approx a + \frac{b}{r} + \dots$ โดยที่ a, b เป็นค่าคงตัว จะเห็นได้ว่าสมการที่ (3.18) มีค่าไม่ลู่ออก และส่วนของการกำหนดให้ $\omega = \omega_{Re} - i|\omega_{Im}|$ เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตของควอนตัมอินโฟลทอนได้เพียงว่าส่วนจินตภาพของควอนตัมอินโฟลทอนต้องกำหนดให้เป็นค่าลบ เพราะจะทำให้มีแค่คลื่นวิ่งเข้าเท่านั้น จากเงื่อนไขขอบเขตที่ใกล้ ๆ กับฮอริซันเหตุการณ์ แต่ว่าส่วนจริงของควอนตัมอินโฟลทอนนั้นไม่สามารถทราบได้ ในเงื่อนไขของการประมาณที่ $m = 0$ จากเงื่อนไขขอบเขตของควอนตัมอินโฟลทอนสามารถหาสมการแม่นยำได้เป็น

$$R(r) \approx (r - r_1) \frac{-i\omega a_1 r_1^2}{2l^2} (r - r_2) \frac{-i\omega a_2 r_2^2}{2l^2} (r - r_3) \frac{-i\omega a_3 r_3^2}{2l^2} (r - r_4) \frac{-i\omega a_4 r_4^2}{2l^2}, \quad (3.19)$$

ทั้งนี้สามารถหาสมการแบบแม่นยำจากทำการกำจัดค่าคงตัว m ออกไป และเป็นแนวคิดตั้งต้นในส่วนของ การประมาณอนุกรมกำลังของตัวแปร r หรือ $1/r$ แต่ถ้าไม่ทำการกำหนดให้ค่าคงตัว m เป็นศูนย์ ในบทต่อมามีต้องการจะหาสมการอนุพันธ์ลำดับที่สองนั้นใกล้เคียงกับสมการอนุพันธ์ในสมการที่ (3.7) มากยิ่งขึ้น ซึ่งจะแสดงให้เห็นในหัวข้อ 3.3 และบทที่ 4

3.3 ผลเฉลยที่ค่าคงตัวของการแยกตัวแปรไม่เป็นศูนย์

3.3.1 ผลเฉลยที่ทำการประมาณที่ไกล ๆ

จากสมการที่ (3.7) ถ้าทำการประมาณให้อยู่ไกล ๆ จากหลุมดำ หรือการให้ $r \rightarrow \infty$ จะได้ว่า

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} - 1, \quad (3.20)$$

ซึ่งจะได้

$$\left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right) \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right) \frac{dR(r)}{dr} \right] + \omega^2 l^2 R(r) - \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right) R(r) = 0, \quad (3.21)$$

ทั้งนี้ จะทำการเปลี่ยนตัวแปรเป็น $u = l/r$ จะสามารถเขียนสมการที่ (3.21) ใหม่ได้เป็น

$$(u^2 - 1) \frac{d}{du} \left[(u^2 - 1) \frac{dR(u)}{du} \right] + \omega^2 l^2 R(u) + m^2 l^2 (u^2 - 1) R(u) = 0, \quad (3.22)$$

จากนี้จะทำการนิยามค่า $R(u)$ ใหม่ไปเป็น

$$R(u) \equiv (u - 1)^\sigma (u + 1)^\rho F(u); \quad \sigma^2 = -\frac{\omega^2 l^2}{(2)^2}; \quad \rho^2 = -\frac{\omega^2 l^2}{(-2)^2}, \quad (3.23)$$

จากการแทนค่าในสมการที่ (3.23) ลงไปจะทำให้สมการที่ (3.22) เปลี่ยนเป็น

$$(u - 1)(u + 1) \frac{d^2 F(u)}{du^2} + [(2\sigma + 1)(u + 1) + (2\rho + 1)(u - 1)] \frac{dF(u)}{du} + [\sigma^2 + \rho^2 + (2\sigma\rho + \sigma + \rho) + m^2 l^2] F(u) = 0, \quad (3.24)$$

ต่อมาทำการเปลี่ยนตัวแปรให้ $y = 1 - u$ แล้วแทนลงไปในสมการจะได้ว่า

$$-\left(\frac{y}{2}\right) \left(1 - \frac{y}{2}\right) \frac{d^2 F\left(\frac{y}{2}\right)}{d\left(\frac{y}{2}\right)^2} + \left[(2\sigma + 1) \left(1 - \frac{y}{2}\right) + (2\rho + 1) \left(-\frac{y}{2}\right)\right] \frac{dF\left(\frac{y}{2}\right)}{-d\left(\frac{y}{2}\right)} + [(\sigma + \rho)^2 + \sigma + \rho + m^2 l^2] F\left(\frac{y}{2}\right) = 0, \quad (3.25)$$

ทำการเปลี่ยนตัวแปรให้ $z = y/2$ จะได้ว่า

$$z(1 - z) \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + [(2\sigma + 1) - (2\sigma + 2\rho + 2)z] \frac{dF}{dz} - [(\sigma + \rho)^2 + \sigma + \rho + m^2 l^2] = 0, \quad (3.26)$$

จากสมการที่ (3.26) จะเข้ารูปแบบของสมการอนุพันธ์ของไฮเพอร์จีออเมตริก (Hypergeometric differential equation) ซึ่งเขียนได้เป็น

$$x(1 - x) \frac{d^2 h}{dx^2} + [c - (a + b + 1)x] \frac{dh}{dx} - abh = 0, \quad (3.27)$$

ถ้าหาก $|x| < 1$ จะสามารถเขียนสมการไฮเพอร์จีออเมตริกได้ในรูปของอนุกรมกำลัง

$$h[a, b; c; x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}, \quad (3.28)$$

โดยที่ $(q)_n = \begin{cases} 1 & n = 0; \\ q(q + 1) \dots (q + n - 1) & n > 0 \end{cases}$

ถ้านำสมการมาเทียบกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2} \left(1 + 2\sigma + 2\rho - \sqrt{1 - 4m^2 l^2} \right), \\
b &= \frac{1}{2} \left(1 + 2\sigma + 2\rho + \sqrt{1 - 4m^2 l^2} \right), \\
c &= 2\sigma + 1,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

จะเห็นได้ว่าสามารถหาผลเฉลยได้ในรูปของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกซึ่งจะเป็นพื้นฐานแนวคิดในการแก้สมการที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น

3.3.2 ผลเฉลยที่สมการไม่ได้ประมาณ

จากการแก้สมการที่ระยะไกล ๆ แล้ว ต่อมาจะทำการแก้สมการที่ไม่มีการประมาณ โดยจะเริ่มต้นโดยหาค่าของรัศมีต่าง ๆ จากสมการที่ (3.1) ในปริมาณของ r_+ , r_2 , r_3 และ r_4 โดยกำหนดให้สมการที่ (3.1) เท่ากับศูนย์จะได้

$$\begin{aligned}
r_+ &= \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \sqrt{1 + \frac{4G\mu}{l}}, & r_2 &= \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \sqrt{1 + \frac{4G\mu}{l}}, \\
r_3 &= -\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{4G\mu}{l}}, & r_4 &= -\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{4G\mu}{l}},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ต่อมาทำการกำหนดรูปของสมการที่ (3.1) ให้อยู่ในตัวแปร x โดยที่กำหนดให้ $x = r_+/r$ ซึ่งสมการที่ (3.1) จะเปลี่ยนไปอยู่ในรูปแบบสมการที่ (3.31)

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\left(\frac{G\mu}{r_+ x}\right)^2 [x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4] \\
&= -\left(\frac{G\mu}{r_+ x}\right)^2 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
b_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{2r_+}{G\mu} \\
b_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \left(\frac{r_+}{G\mu}\right)^2 \\
b_3 &= -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) = 0 \\
b_4 &= x_1 x_2 x_3 x_4 = -\left(\frac{r_+^2}{G\mu l}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ในทำนองกันเดียวกันสามารถคำนวณ ปริมาณ x_1 , x_2 , x_3 และ x_4 ได้จากสมการ (3.31) โดยกำหนดให้สมการ (3.31) มีค่าเท่ากับศูนย์จะได้

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{l}{2r_+} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4G\mu}{l}} \right) = 1, & x_2 &= \frac{r_2}{r_1} = \frac{l}{2r_+} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4G\mu}{l}} \right), \\
x_3 &= \frac{r_3}{r_1} = \frac{l}{2r_+} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4G\mu}{l}} \right), & x_4 &= \frac{r_4}{r_1} = \frac{l}{2r_+} \left(-1 - \sqrt{1 - \frac{4G\mu}{l}} \right),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

จากนั้นนำสมการที่ (3.31) แทนลงไปในสมการที่ (3.7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ & \times \frac{d}{dx} \left((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \frac{dR}{dx} \right) \\ & + (\omega r_+)^2 \left(\frac{r_+}{G\mu} \right)^4 R + \left(\frac{mr_+}{G\mu} \right)^2 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)R = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

ต่อมาทำการกำหนดให้ $R(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}$ แทนลงไปในสมการที่ (3.34) และกำหนดให้ $x = x_1$ เพื่อหาค่า α_1 และทำซ้ำในค่า α ต่าง ๆ จะได้หาค่า $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ และ α_4 ออกมาดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{i\omega r_+^3}{G^2\mu^2} \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}, \\ \alpha_2 &= -\frac{i\omega r_+^3}{G^2\mu^2} \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}, \\ \alpha_3 &= -\frac{i\omega r_+^3}{G^2\mu^2} \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}, \\ \alpha_4 &= -\frac{i\omega r_+^3}{G^2\mu^2} \frac{1}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

จะเห็นได้ว่ามีค่าเป็นลบเพราะว่า จะกำหนดให้เป็นคลื่นวิ่งเข้าสู่หลุมดำเสมอ เมื่อหาค่า $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ และ α_4 ได้ ต่อมาจะทำการนิยามให้

$$R(x) \equiv (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} (x - x_3)^{\alpha_3} (x - x_4)^{\alpha_4} F(x), \quad (3.36)$$

นำสมการข้างต้นถ้านำลงไปแทนลงในสมการที่ (3.34) และทำการแก้สมการได้เป็น

$$\begin{aligned}
& (x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \frac{d^2F(x)}{dx^2} \\
& + \left[\begin{aligned} & (2\alpha_1+1)(x-x_1)^{\alpha_1+1}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + (2\alpha_2+1)(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+1}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + (2\alpha_3+1)(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+1}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + (2\alpha_4+1)(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+1} \end{aligned} \right] \frac{dF(x)}{dx} \\
& + \left[\begin{aligned} & \alpha_1^2(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + \alpha_2^2(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + \alpha_3^2(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + \alpha_4^2(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4} \end{aligned} \right] F(x) \\
& + \left[\begin{aligned} & (2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2)(x-x_1)^{\alpha_1+1}(x-x_2)^{\alpha_2+1}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_3)(x-x_1)^{\alpha_1+1}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+1}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + (2\alpha_1\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_4)(x-x_1)^{\alpha_1+1}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+1} \\ & + (2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3)(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+1}(x-x_3)^{\alpha_3+1}(x-x_4)^{\alpha_4+2} \\ & + (2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_4)(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+1}(x-x_3)^{\alpha_3+2}(x-x_4)^{\alpha_4+1} \\ & + (2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_4)(x-x_1)^{\alpha_1+2}(x-x_2)^{\alpha_2+2}(x-x_3)^{\alpha_3+1}(x-x_4)^{\alpha_4+1} \end{aligned} \right] F(x) \\
& + \left(\frac{\omega r_+^3}{G^2 \mu^2} \right)^2 (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3}(x-x_4)^{\alpha_4} \\
& + \left(\frac{mr_+}{G\mu} \right)^2 (x-x_1)^{\alpha_1+1}(x-x_2)^{\alpha_2+1}(x-x_3)^{\alpha_3+1}(x-x_4)^{\alpha_4+1} = 0 \tag{3.37}
\end{aligned}$$

ต่อมานำ $(x-x_1)^{\alpha_1+1}(x-x_2)^{\alpha_2+1}(x-x_3)^{\alpha_3+1}(x-x_4)^{\alpha_4+1}$ หารตลอดในสมการที่ (3.37) และทำการลดรูปสมการด้วยคุณสมบัติตามสมการ (3.38)

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}, c_2 = \frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\
c_3 &= \frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}, c_4 = \frac{1}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \tag{3.38} \\
\sum_{i=1}^4 c_i &= \sum_{i=1}^4 c_i x_i = \sum_{i=1}^4 c_i x_i^2 = 0, \sum_{i=1}^4 c_i x_i^3 = 1,
\end{aligned}$$

จะออกมาได้เป็น

$$\begin{aligned}
& (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \frac{d^2F}{dx^2} \\
& + \left[\begin{aligned} & (1+2\alpha_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\ & + (1+2\alpha_2)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) \\ & + (1+2\alpha_3)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) \\ & + (1+2\alpha_4)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \end{aligned} \right] \frac{dF}{dx} + \left(\frac{mr_+}{G\mu} \right)^2 F = 0, \tag{3.40}
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (3.40) ทำการกระจายค่า x และหารตลอดด้วย $-(G\mu/r_+)^2$ จะได้เป็น

$$\left[\frac{r_+^2}{l^2} - x^2 + \frac{2G\mu}{r_+} x^3 - \frac{G^2 \mu^2}{r_+^2} x^4 \right] \frac{d^2F}{dx^2} \tag{3.41}$$

$$+ \left[2i\omega r_+ - 2x - \frac{6G\mu}{r_+} x^2 - \frac{4G^2\mu^2}{r_+^2} x^3 \right] \frac{dF}{dx} - m^2 F = 0,$$

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาในกรณีที่ค่าคงตัวของนิวตันคูณกับมวลของหลุมดำมีค่าน้อยกว่ารัศมีแอนไท เดอ ซิตเตอร์มาก ๆ ($\frac{G\mu}{l} \ll 1$) เพราะฉะนั้นจะทำการประมาณโดยใช้วิธีการประมาณแบบอนุกรมเทย์เลอร์ ในส่วนของ $\frac{r_+^2}{l^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4G\mu}{l} + \frac{G\mu}{l}} \approx 1 + \frac{2G\mu}{r_+} + \frac{G^2\mu^2}{r_+^2} + O\left(\frac{G\mu}{r_+}\right)^3$ โดยนำค่าที่ทำการประมาณแทนลงในสมการที่ (3.41) ซึ่งเขียนในเทอมหน้าของสมการอนุพันธ์ลำดับที่สอง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{r_+^2}{l^2} - x^2 + \frac{2G\mu}{r_+} x^3 - \frac{G^2\mu^2}{r_+^2} x^4 \\ \approx 1 - x^2 + \frac{2G\mu}{r_+} (1 - x^3) + \frac{G^2\mu^2}{r_+^2} (1 - x^4) + O\left(\frac{G\mu}{r_+}\right)^3, \end{aligned} \quad (3.42)$$

จากสมการที่ (3.42) จะเห็นได้ว่ามีแค่เทอม $1 - x^2$ ที่ไม่มีค่าคงตัว $G\mu/l$ หรือก็คือ $(G\mu/l)^0$ ซึ่งจากการประมาณข้างต้นจะทำให้สมการ (3.41) ได้ใหม่ว่า

$$(1 - x^2) \frac{d^2 F}{dx^2} + (2i\omega r_+ - 2x) \frac{dF}{dx} - m^2 F = 0, \quad (3.43)$$

กำหนดให้

$$F(x) \equiv (1 + x)^\beta \mathcal{F}; \beta = -i\omega r_+, \quad (3.44)$$

จะได้ว่า

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \mathcal{F}}{dx^2} - 2(\beta + 1)x \frac{d\mathcal{F}}{dx} - [\beta(\beta + 1) + m^2] \mathcal{F} = 0, \quad (3.45)$$

ทำการกำหนดตัวแปรใหม่ให้ $v \equiv x^2$ ลงในสมการที่ (3.45) จะได้ว่า

$$(1 - v)v \frac{d^2 \mathcal{F}}{dv^2} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} + \beta \right) v \right] \frac{d\mathcal{F}}{dv} - \left[\frac{\beta(\beta + 1) + m^2}{4} \right] \mathcal{F} = 0. \quad (3.46)$$

จะเห็นได้ว่าสมการข้างต้นจะสามารถหาผลเฉลยได้ในรูปของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric equation) จากการได้ผลเฉลยจะสามารถหาค่าของควอซีนอมอลโหมดได้ซึ่งจะแสดงให้เห็นในบทต่อไป

บทที่ 4 ผลการศึกษา

จากสมการที่ (3.46)

$$(1-v)v \frac{d^2 \mathcal{F}}{dx^2} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} + \beta \right) v \right] \frac{d\mathcal{F}}{dx} - \left[\frac{\beta(\beta+1) + m^2}{4} \right] \mathcal{F} = 0, \quad (3.46)$$

จะเห็นได้ว่ารูปแบบของสมการจะเข้ารูปแบบของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric equation) ในสมการที่ (4.1)

$$y(1-y) \frac{d^2 h}{dy^2} + [x - (a+b+1)y] \frac{dh}{dy} + abh = 0, \quad (4.1)$$

จากการเทียบสมการที่ (3.46) กับสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกจากสมการที่ (4.1) จะได้ค่า a, b และ c ออกมาเป็น

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4m^2}, \\ b &= \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} \mp \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4m^2}, \\ c &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

หลังจากการหาผลเฉลยของสมการได้แล้วต่อไปจะทำกรใส่เงื่อนไขขอบเขตเพื่อหาควอนตัมฮอลล์ใหม่ โดยเริ่มจากการประมาณบริเวณใกล้ ๆ จากหลุมดำ ($x \rightarrow 0, v = x^2 = \frac{r^2}{r^2} \rightarrow 0$) จากสมการที่ (3.46) แทนลงในสมการที่ (3.36) ซึ่งจากการประมาณที่ใกล้ ๆ จะได้ว่า

$$R(v \rightarrow 0) \sim A {}_2F_1(a, b; c; v) + Bv^{1-c} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2c; v), \quad (4.3)$$

โดยที่ A และ B คือ ค่าคงตัวไม่เจาะจง จากสมการที่ (4.3) ในส่วนของ $v^{1/2} = x = r^{-1}$ ซึ่งจะไปสอดคล้องกับรูปแบบศักย์ในฟิสิกส์แบบดั้งเดิม และทำการประมาณที่ใกล้ ๆ

$$R(v \rightarrow 0) \sim A, \quad (4.4)$$

จากการประมาณที่บริเวณใกล้ ๆ จากหลุมดำจึงไม่ควรจะมีผลของหลุมดำอยู่ ดังนั้นจะกำหนดให้ $A = 0$ จากคุณสมบัติของสมการไฮเพอร์จีโอเมตริกจะสามารถกระจายตัวแปร v ไปเป็น $1-v$ และทำการใส่เงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณใกล้ ๆ ฮอริซันเหตุการณ์ ($x \rightarrow 1, 1-v = (1-x)(1+x) \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
R(x \rightarrow 1) &\Rightarrow (1-x)^{\alpha_1} v^{\frac{1}{2}} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; v), \\
&= \frac{\Gamma[2-c]\Gamma[c-a-b]}{\Gamma[1-a]\Gamma[1-b]} (1-x)^{\alpha_1} \\
&\quad \times {}_2F_1(b, a; a+b-c+1; 1-v) \\
&\quad + \frac{\Gamma[2-c]\Gamma[a+b-c]}{\Gamma[1+a-c]\Gamma[1+b-c]} (1-x)^{\alpha_1} (1-v)^{c-a-b} \\
&\quad \times {}_2F_1(c-b, c-a; c-a-b+1; 1-v),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (4.5) นั้นสอดคล้องกับบทที่ 3.2 ที่กำหนดให้ค่าคงตัว m เป็นศูนย์ ที่สามารถหาสมการแบบแม่นยำตรงได้จากการประมาณอนุกรมกำลังของตัวแปร r หรือ $1/r$ และในบทนี้ได้ทำการประมาณที่ $\frac{G\mu}{l} \ll 1$ ดังนั้นจากสมการที่ (3.35) จะประมาณค่า $\alpha_1 \approx -\frac{i\omega r_+}{2}$ และ $\alpha_1 + c - a - b \approx +\frac{i\omega r_+}{2}$ จากการประมาณนี้ทำให้สมการ (4.5) ลดรูปลงมาเป็น

$$\begin{aligned}
R(x \rightarrow 1) &\Rightarrow \frac{\Gamma[2-c]\Gamma[c-a-b]}{\Gamma[1-a]\Gamma[1-b]} (1-x)^{-\frac{i\omega r_+}{2}} \\
&\quad \times {}_2F_1(b, a; a+b-c+1; 1-v) \\
&\quad + \frac{\Gamma[2-c]\Gamma[a+b-c]}{\Gamma[1+a-c]\Gamma[1+b-c]} (1-x)^{+\frac{i\omega r_+}{2}} \\
&\quad \times {}_2F_1(c-b, c-a; c-a-b+1; 1-v),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

ซึ่งในเทอมของ $(1-x)^{-\frac{i\omega r_+}{2}}$ เป็นตัวแทนคลื่นวิ่งเข้าและ $(1-x)^{+\frac{i\omega r_+}{2}}$ เป็นตัวแทนคลื่นวิ่งออก จากฮอริซันเหตุการณ์ จากเงื่อนไขขอบเขตที่ใกล้ ๆ ฮอริซันเหตุการณ์จะมีแค่คลื่นวิ่งเข้าเท่านั้น จะกำหนดให้ $\frac{1}{\Gamma[-n]} = 0$ โดยที่ $n = 1, 2, 3, \dots$ ซึ่งจะทำให้คลื่นวิ่งออกหายไป จากข้างต้นจะได้ว่า

$$1 + a - c = -n; 1 + b - c = -n, \tag{4.7}$$

จากสมการที่ (4.7) จะทำให้สามารถหาความถี่ควอนตัมควอนตัมได้เป็น

$$\omega r_+ = -i \left(2n + \frac{3}{2} \right) \pm \frac{i}{2} \sqrt{1 - 4m^2}, \tag{4.8}$$

และถ้ากำหนดให้ $m^2 \geq \frac{1}{4}$ จะได้ว่า

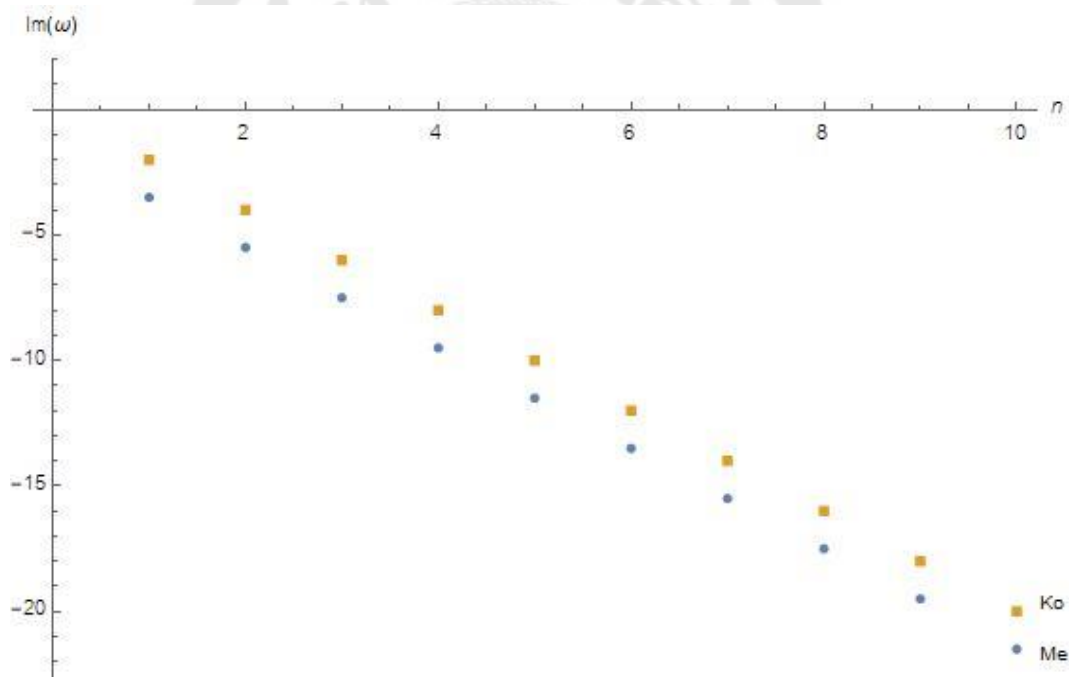
$$\omega r_+ = \pm \sqrt{m^2 - \frac{1}{4}} - i \left(2n + \frac{3}{2} \right), \tag{4.9}$$

สมการ (4.9) เป็นการประมาณ $\frac{G\mu}{l} \rightarrow 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยสมการนี้ไปคล้ายคลึงกับงานวิจัยของโคซุมบัส และคณะในปี 2006 (Koutsoumbas et al., 2006) ได้ทำการศึกษาควอนตัมควอนตัมใหม่จากกระบวนการโมโนโดรมี (Monodromy method) ในการคำนวณควอนตัมควอนตัมใหม่ของหลุมดำมีขนที่มีคุณสมบัติทอพอโลยีในสี่มิติที่ถูกรบกวนด้วยสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยควอนตัมควอนตัมใหม่ที่ได้เป็นไปตามสมการที่ (4.10) (ในงานวิจัยของโคซุมบัส และคณะกำหนดให้ค่า $r_+ = 1$)

$$\omega \approx -2ni \left(1 + \frac{2G\mu}{\pi i} \ln G\mu \right), \quad (4.10)$$

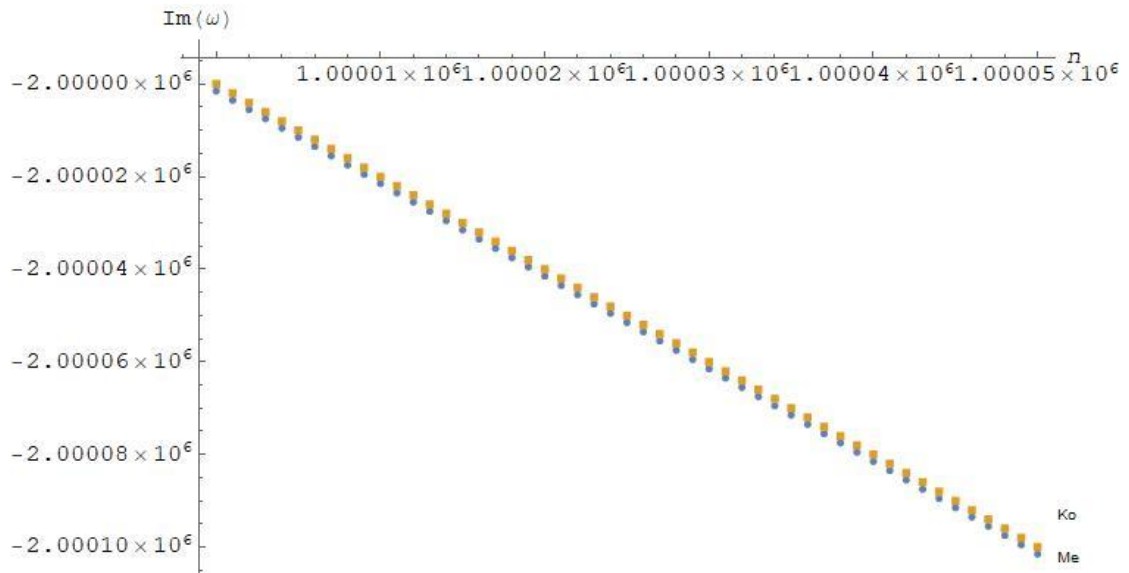
สมการ (4.10) เป็นการประมาณที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีขนาดใหญ่และ $G\mu/l$ จะต้องมามีค่าน้อย ๆ

สมการที่ (4.9) และ (4.10) จะเปรียบเทียบกันได้ก็ต่อเมื่อต้องกำหนดให้พารามิเตอร์มีค่าเท่ากัน ในกรณีนี้ คือ n มีค่ามาก ๆ ในที่นี้จะกำหนดให้ค่า $G\mu/l = 0$ จะพบว่าสมการที่ (4.10) เป็นกรณีเฉพาะของสมการที่ (4.9) เมื่อ $m^2 = \frac{1}{4}$ ซึ่งจะแตกต่างกันในส่วนของจำนวนจินตภาพของควอซีนอร์มอลโหมด แสดงให้เห็นดังภาพประกอบที่ 4 และภาพประกอบที่ 5 จุดสีน้ำเงิน คือ ค่าของจำนวนจินตภาพควอซีนอร์มอลโหมดของงานวิจัยนี้ และจุดสีส้ม คือ ค่าของจำนวนจินตภาพควอซีนอร์มอลโหมดของโคซุมบัสและคณะ



ภาพประกอบ 4 กราฟเทียบควอซีนอร์มอลโหมดในวิจัยนี้กับงานวิจัยของโคซุมบัสและคณะในช่วงที่ n

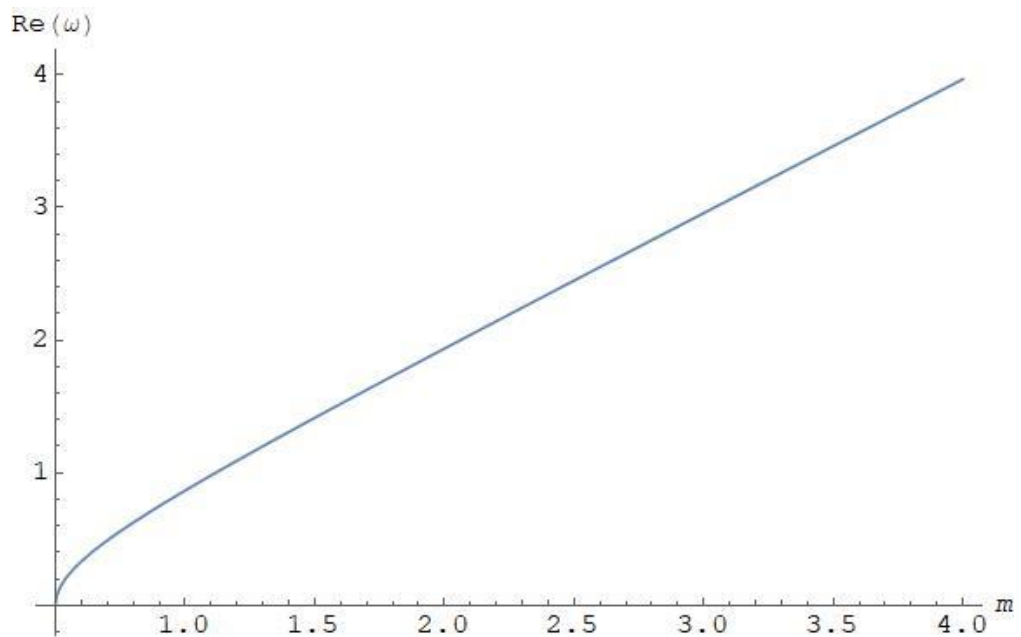
เท่ากับ 1 ถึง 10



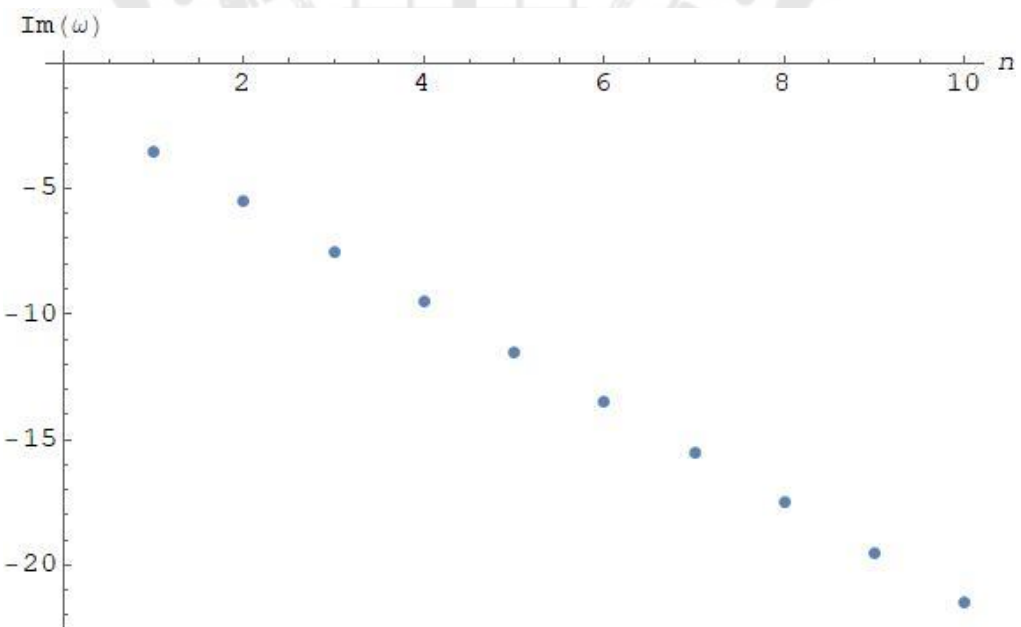
ภาพประกอบ 5 กราฟเทียบควอซีนอร์มอลโหมดในวิจัยนี้กับงานวิจัยของโคซุมบัสและคณะในช่วงที่มีค่ามาก ๆ

จะเห็นได้ว่ายิ่งค่า n มีค่ามากขึ้นเท่าไร ค่าของจำนวนจินตภาพควอซีนอร์มอลโหมดก็จะเข้าใกล้กันมากขึ้นไปเรื่อย ๆ

กราฟของควอซีนอร์มอลโหมดที่ได้จากสมการที่ (4.9) โดยกำหนดให้ค่า $G\mu/l = 10^{-10}$ (หรือก็คือให้มีค่าน้อยมาก ๆ) จะแสดงให้เห็นตามภาพประกอบ 6, 7 และตามรางที่ 1



ภาพประกอบ 6 กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริงของควอซีนอร์มอลโหมดกับค่า m



ภาพประกอบ 7 กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจินตภาพของควอซีนอร์มอลโหมดกับ

ค่า n

ตาราง 1 ควอซีเนออร์มอลโหมดในค่า n และ m ต่าง ๆ

ωr_+	$n = 1$	2	3	4
$m = 1/2$	$-3.50i$	$-5.50i$	$-7.50i$	$-9.50i$
1	$0.87 - 3.5i$	$0.87 - 5.50i$	$0.87 - 5.50i$	$0.87 - 9.50i$
3/2	$1.41 - 3.50i$	$1.41 - 5.50i$	$1.41 - 7.50i$	$1.41 - 9.50i$
2	$1.94 - 3.50i$	$1.94 - 5.50i$	$1.94 - 7.50i$	$1.94 - 9.50i$

จากภาพประกอบ 6, 7 และตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่าจำนวนจริงของควอซีเนออร์มอลโหมดจะขึ้นอยู่กับค่าคงตัว m และ จำนวนจินตภาพของควอซีเนออร์มอลโหมดนั้นขึ้นอยู่กับค่าคงตัว n

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปงานวิจัย

เริ่มต้นจากบทที่ 3

1. จะเห็นได้ว่าสามารถใช้หลักการในทางฟิสิกส์เพื่อที่จะหาควอซีนอร์มอลโหมดโดยเริ่มต้นมาจากการตั้งสมมุติฐานว่าหลุมดำนั้นสามารถเปลี่ยนแปลงเมื่อถูกรบกวน หรือหลุมดำแบบมีขน ซึ่งในงานวิจัยนี้ต้องหาควอซีนอร์มอลโหมด โดยถูกรบกวนจากศักย์แม่เหล็กไฟฟ้าการเปลี่ยนแปลงนั้นมีส่วนของควอซีนอร์มอลโหมดอยู่ด้วย ขั้นตอนต่อมา คือ การหาผลเฉลยสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าหรือสมการแมกซ์เวลล์ใน 4 มิติที่เป็นส่วนหนึ่งของสมการสนามของไอน์สไตน์จากการแก้สมการแมกซ์เวลล์ออกมาเป็นสมการอนุพันธ์ลำดับที่สอง โดยทำการแยกส่วนของมุมกับรัศมีออกจากสมการอนุพันธ์ และกำหนดให้ค่าคงตัวจากการแยกตัวแปร คือ m^2 ต่อมาจะทำการแก้สมการอนุพันธ์ลำดับที่สองของสมการที่ (3.7)

2. ทำการแยกการแก้สมการที่ (3.7) เป็นสองส่วน คือ 1. ส่วนที่กำหนดให้ค่าคงตัวของ การแยกตัวแปรเป็นศูนย์ และ 2. ส่วนที่ค่าคงตัวของการประมาณไม่เป็นศูนย์

2.1) ส่วนของการประมาณให้ค่าคงตัวของการแยกตัวแปรเป็นศูนย์นั้นจะแสดงให้เห็นในบทที่ 3.2 ซึ่งผลเฉลยแบบแม่นยำที่ได้ออกมานั้นเป็นการประมาณในบทนี้ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการกระจายอนุกรมกำลังของตัวแปร r และ $1/r$ และจะเป็นตัวช่วยในการที่จะแก้สมการอนุพันธ์ที่ไม่ได้ประมาณในบทต่อ ๆ ไป

2.2) ส่วนที่ค่าคงตัวของของการแยกตัวแปรไม่เป็นศูนย์

2.2.1) ในบทที่ 3.3.1 จะทำการประมาณที่ไกล ๆ จากหลุมดำ ซึ่งสามารถหาสามารถหาผลเฉลยแบบแม่นยำได้ในรูปแบบของสมการไฮเพอร์จีออเมตริก

2.2.2) ในบทที่ 3.3.2 จะไม่ได้ประมาณที่ไกล ๆ จากหลุมดำจะเห็นได้ว่าสมการนั้นมีความซับซ้อนมากกว่าแบบที่มีการประมาณ จากการใช้เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ในการช่วยลดความซับซ้อนของสมการอนุพันธ์จากสมการที่ (3.38) แต่ก็ยังติดปัญหาที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแบบแม่นยำออกมาได้ ดังนั้นจึงได้ทำการประมาณให้ค่าคงตัวของนิวตันคู่กับมวลของหลุมดำน้อยกว่ารัศมีของแอนไท เดอ ซิตเตอร์ มาก ๆ ($G\mu \ll l$) และเก็บค่าของการประมาณลำดับที่ศูนย์ จะเห็นได้จากสมการที่ (3.46) จากการประมาณสามารถหาผลเฉลยแบบแม่นยำได้ในรูปของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกได้

สรุปบทที่ 4 แสดงให้เห็นถึงวิธีการหาความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดโดยใช้ฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกโดยผลที่สรุปได้ดังนี้

1. จากสมการที่ (3.46) จะได้ออกมาในรูปแบบของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก และจากสมการที่ (4.3) ที่ได้ออกมานั้นมีความสอดคล้องกับศักย์ในฟิสิกส์แบบดั้งเดิม
2. ได้ทำการใช้เงื่อนไขขอบเขตของควอซีนอร์มอลโหมดโดยให้ที่ไกล ๆ จากหลุมดำนั้นจะมีเพียงคลื่นวิ่งออกเท่านั้นและใกล้ ๆ หลุมดำจะมีเพียงคลื่นวิ่งเข้าจากเงื่อนไขขอบเขตนี้จะได้ค่าคงตัว n ขึ้นมาอีกหนึ่งองค์ประกอบ
3. จากสมการที่ (4.9) ซึ่งเป็นสมการของควอซีนอร์มอลโหมด ซึ่งไปสอดคล้องกับงานวิจัยของโคซุมบัส และคณะในปี 2006 (Koutsoumbas et al., 2006) ที่แสดงให้เห็นในสมการที่ (4.10) ในกรณีเฉพาะ เมื่อ $m^2 = \frac{1}{4}$ ซึ่งจะแตกต่างกันในส่วนของจำนวนจินตภาพของควอซีนอร์มอลโหมด และได้ทำการแสดงควอซีนอร์มอลโหมดกับค่า n และ m ต่าง ๆ ของงานวิจัยนี้ตามภาพประกอบ 6 ภาพประกอบ 7 และตาราง 1

5.2 อภิปรายผลของงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ในสมการที่ (3.38) ซึ่งช่วยในการลดรูปของสมการที่มีความสัมพันธ์กับหัวข้อย่อยที่ 3.2 แต่ว่าก็ไม่สามารถแก้สมการแบบแม่นยำตรงออกมาได้ ต่อมากำหนดเงื่อนไขการประมาณที่ $G\mu/l \ll 1$ โดยมีความหมายว่า ค่าคงตัวของนิวตันคูณกับมวลของหลุมดำนั้นมีค่าน้อยกว่าค่าคงตัวของจักรวาลมาก ๆ จากการประมาณดังกล่าว สามารถทำการกระจายในรูปแบบของอนุกรมเทย์เลอร์ จากหัวข้อย่อยที่ 3.3.1 นั้นสามารถหาผลเฉลยให้อยู่ในรูปแบบของสมการไฮเพอร์จีออเมตริกได้ และจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์นั้นจะเห็นได้ว่าสามารถหาผลเฉลยแบบแม่นยำได้ตามสมการที่ (3.46) ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการไฮเพอร์จีออเมตริก และจากคุณสมบัติของสมการไฮเพอร์จีออเมตริกและเงื่อนไขขอบเขตของควอซีนอร์มอลโหมด จึงสามารถหาผลเฉลยของควอซีนอร์มอลโหมดและความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดได้ โดยผลเฉลยที่ออกมาได้แสดงให้เห็นจากสมการที่ (4.9) จะเห็นได้จากสมการที่ (4.9) ว่าควอซีนอร์มอลโหมดขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์สองตัวนั้น คือ n และ m โดยที่พารามิเตอร์ n คือ ค่าคงตัวของจำนวนเต็มบวก ซึ่งเกิดจากการใส่เงื่อนไขขอบเขตของควอซีนอร์มอลโหมด และพารามิเตอร์ m คือ ค่าคงตัวที่ได้จากการแยกตัวแปร ซึ่งเป็นปริมาณที่สามารถกำหนดค่าได้ และค่าของควอซีนอร์มอลโหมดแสดงให้เห็นจากภาพประกอบที่ 6 ภาพประกอบที่ 7 และตารางที่ 1 แสดงให้เห็นว่า จำนวนจริงควอซีนอร์มอลโหมดนั้นขึ้นอยู่กับค่าคงตัว n และจำนวนจินตภาพของควอซีนอร์มอลโหมดนั้นขึ้นอยู่กับค่าคงตัว m จากการตีความทางกายภาพ ค่าจริงของควอซีนอร์มอลโหมดนั้นแสดงถึงความถี่ควอซีนอร์มอล-

ใหม่ด ในส่วนของจำนวนจินตภาพของควอซีนอร์มอลใหม่ดนั้นจะแสดงถึงการลดลงของแอมพลิจูดที่จะลดลงตามเวลา และในส่วนของจริงของควอซีนอร์มอลใหม่ดนั้นแสดงถึงความถี่ของควอซีนอร์มอลใหม่ด สอดคล้องกับงานวิจัยของโคซุมบัส และคณะในปี 2006 (Koutsoumbas et al., 2006) ที่ได้ทำการศึกษาควอซีนอร์มอลใหม่ดจากระบบการโมโนโตรมี ซึ่งแสดงให้เห็นในสมการที่ (4.10) (ในกรณีเฉพาะที่ส่วนของจริงของควอซีนอร์มอลใหม่ด และกำหนดให้ $m^2 = \frac{1}{4}$) ซึ่งงานวิจัยของโคซุมบัสและคณะ สามารถหาควอซีนอร์มอลใหม่ดได้จะต้องกำหนดให้ ค่าคงตัว n มีค่ามาก ๆ ซึ่งจะแตกต่างจากงานวิจัยนี้ที่สามารถหาควอซีนอร์มอลใหม่ดได้ในทุกระดับของค่า n ทั้งยังได้แสดงในภาพประกอบที่ 4 และภาพประกอบที่ 5 ว่าถ้าปริมาณ n มีค่ามาก ๆ ส่วนจริงของควอซีนอร์มอลใหม่ดจะมีค่าเข้าใกล้กันมากขึ้น แต่เนื่องจากในงานวิจัยนี้จะเป็นการประมาณในลำดับที่ศูนย์ แต่งานวิจัยของโคซุมบัสและคณะ เป็นการประมาณในลำดับที่หนึ่งซึ่งสูงกว่า แต่ผลการคำนวณส่วนจริงของควอซีนอร์มอลใหม่ดที่ออกมาแล้วยังให้ผลการคำนวณแค่ส่วนจริงของควอซีนอร์มอลใหม่ดที่ใกล้เคียงกัน

5.3 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับงานวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการประมาณในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ และเก็บที่ลำดับที่ศูนย์ของฟังก์ชันที่ได้จากการประมาณ เพื่อที่จะให้ผลของการแก้สมการแบบแม่นยำนั้นมีความแม่นยำและใกล้เคียงกับงานวิจัยก่อนหน้ามากยิ่งขึ้น ขอเสนอว่าจะต้องเก็บผลของการประมาณในลำดับที่สูงขึ้น เช่น อาจจะต้องเก็บผลการประมาณลำดับที่หนึ่งหรือลำดับที่สอง เพื่อเพิ่มความแม่นยำและใกล้เคียงกับงานวิจัยก่อนหน้ามากยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

- A. Wheeler, J. (1968). *Our Universe: The Known and the Unknown* (Vol. 7).
- Bardeen, J. M., Carter, B., & Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 31(2), 161-170. Retrieved from <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1103858973>
- Bekenstein, J. D. (1972). Black holes and the second law. *Lettere al Nuovo Cimento* (1971-1985), 4(15), 737-740. doi:10.1007/bf02757029
- Cai, R.-G., & Wang, A. (2004). Thermodynamics and stability of hyperbolic charged black holes. *Physical Review D*, 70(6), 064013. doi:10.1103/PhysRevD.70.064013
- Cardoso, V., Dias, Ó. J. C., & Lemos, J. P. S. (2003). Gravitational radiation in D -dimensional spacetimes. *Physical Review D*, 67(6), 064026. doi:10.1103/PhysRevD.67.064026
- Chan, J. S. F., & Mann, R. B. (1997). Scalar wave falloff in asymptotically anti-de Sitter backgrounds. *Physical Review D*, 55(12), 7546-7562. doi:10.1103/PhysRevD.55.7546
- de Sitter, W. (1917). On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. Third Paper. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 78(1), 3-28. doi:10.1093/mnras/78.1.3
- Dreyer, O. (2003). Quasinormal Modes, the Area Spectrum, and Black Hole Entropy. *Physical Review Letters*, 90(8), 081301. doi:10.1103/PhysRevLett.90.081301
- Hawking, S. W. (2005). Information loss in black holes. *Physical Review D*, 72(8), 084013. doi:10.1103/PhysRevD.72.084013
- Hawking, S. W., & Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hawking, S. W., Perry, M. J., & Strominger, A. (2016). Soft Hair on Black Holes. *Physical Review Letters*, 116(23), 231301. doi:10.1103/PhysRevLett.116.231301
- Horowitz, G. T., & Hubeny, V. E. (2000). Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Physical Review D*, 62(2), 024027.

doi:10.1103/PhysRevD.62.024027

Iyer, S., & Will, C. M. (1987). Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering.

Physical Review D, 35(12), 3621-3631. doi:10.1103/PhysRevD.35.3621

Kanjanaphomchom, P., & Musiri, S. (2021). Quasinormal modes of the electric potential in the 4 dimensional anti de Sitter Reissner-Norstöm black hole spacetime with scalar hair. *Journal of Physics: Conference Series*, 1719(1), 012039. doi:10.1088/1742-6596/1719/1/012039

Kokkotas, K. D., & Schmidt, B. G. (1999). Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. *Living Reviews in Relativity*, 2(1), 2. doi:10.12942/lrr-1999-2

Konoplya, R. A. (2003). Quasinormal behavior of the D-dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach. *Physical Review D*, 68(2), 024018. doi:10.1103/PhysRevD.68.024018

Koutsoumbas, G., Musiri, S., Papantonopoulos, E., & Siopsis, G. (2006). Quasi-normal modes of electromagnetic perturbations of four-dimensional topological black holes with scalar hair. *Journal of High Energy Physics*(10), 19. Retrieved from [Go to ISI>:/WOS:000242714400084](https://www.isinet.org/Go-to-ISI/000242714400084)

Maldacena, J. (1999). The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4), 1113-1133. doi:10.1023/A:1026654312961

Martinez, C., & Montecinos, A. (2010). Phase transitions in charged topological black holes dressed with a scalar hair. *Physical Review D*, 82(12), 4. doi:10.1103/PhysRevD.82.127501

Martínez, C., & Troncoso, R. (2006). Electrically charged black hole with scalar hair. *Physical Review D*, 74(6), 064007. doi:10.1103/PhysRevD.74.064007

Martínez, C., Troncoso, R., & Staforelli, J. P. (2006). Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge. *Physical Review D*, 74(4), 044028. doi:10.1103/PhysRevD.74.044028

Martínez, C., Troncoso, R., & Zanelli, J. (2004). Exact black hole solution with a minimally

- coupled scalar field. *Physical Review D*, 70(8), 084035.
doi:10.1103/PhysRevD.70.084035
- Martínez, C., & Zanelli, J. (1996). Conformally dressed black hole in 2 + 1 dimensions. *Physical Review D*, 54(6), 3830-3833. doi:10.1103/PhysRevD.54.3830
- Michelson, A. A., & Morley, E. W. (1887). On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science, Series 3 Vol. 34*(203), 333-345. doi:10.2475/ajs.s3-34.203.333
- Motl, L., & Neitzke, A. (2003). Asymptotic black hole quasinormal frequencies. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 7(2), 307-330. Retrieved from <https://projecteuclid.org:443/euclid.atmp/1112627635>
- Musiri, S., & Siopsis, G. (2003). Perturbative calculation of quasi-normal modes of Schwarzschild black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 20(24), L285-L291. doi:10.1088/0264-9381/20/24/l02
- Nordström, G. (1918). On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20, 1238-1245. Retrieved from <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1918KNAB...20.1238N>
- Reissner, H. (1916). Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9), 106-120. doi:10.1002/andp.19163550905
- Ruffini, R., & Wheeler, J. A. (1971). Introducing the black hole. *Physics Today*, 24(1), 30-41. doi:10.1063/1.3022513
- Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 189-196. Retrieved from <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1916SPAW.....189S>
- Susskind, L. (1995). The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11), 6377-6396. doi:10.1063/1.531249
- t Hooft, G. (1995). Black holes, hawking radiation, and the information paradox. *Nuclear*

Physics B - Proceedings Supplements, 43(1), 1-11.

doi:[https://doi.org/10.1016/0920-5632\(95\)00444-E](https://doi.org/10.1016/0920-5632(95)00444-E)

Uchikata, N., & Yoshida, S. (2011). Quasinormal modes of a massless charged scalar field on a small Reissner-Nordström-anti-de Sitter black hole. *Physical Review D*, 83(6), 064020. doi:10.1103/PhysRevD.83.064020

Wang, B., Lin, C.-Y., & Abdalla, E. (2000). Quasinormal modes of Reissner-Nordström Anti-de Sitter black holes. *Physics Letters B*, 481(1), 79-88.

doi:[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(00\)00409-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)00409-3)





1 สมการสนามของไอน์สไตน์

เริ่มต้นจากสมการที่ (ก.1) ซึ่งจะทำการแปรผันในส่วนของเมตริกเทนเซอร์ เพื่อที่จะหาสมการการเคลื่อนที่ในปริภูมิเวลาดั้ง

$$\delta S = \int d^4x \delta \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{12} R \phi^2 - \alpha \phi^4 \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta [\sqrt{-g} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})] \right\} \quad (\text{ก.1})$$

โดยจะเริ่มต้นจากแปรผันที่ $\delta g^{\mu\nu}$ และเพื่อที่จะให้ง่ายต่อการคำนวณ จึงทำการแยกทำเป็นส่วนๆ ก่อนค่อยนำมาประกอบกลับเข้ามารวมกันในภายหลัง

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x [\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right] R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} \\ \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) &= \int d^4x G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{ก.2})$$

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} (-2\Lambda)) &= \int d^4x (-2\Lambda (\delta\sqrt{-g})) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (-2\Lambda) \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{2} \delta g^{\mu\nu} \right] \\ \int d^4x \delta(\sqrt{-g} (-2\Lambda)) &= \int d^4x \sqrt{-g} [g_{\mu\nu} \Lambda] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{ก.3})$$

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x [\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}] \\ &= \int d^4x \left[\begin{array}{l} (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) \delta g^{\nu\beta} \\ + g^{\nu\beta} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) \end{array} \right] F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left[\begin{array}{l} (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha}) \delta g^{\nu\beta} \\ - \frac{1}{2} g_{\sigma\rho} g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\rho} \\ + \sqrt{-g} g^{\nu\beta} \delta g^{\mu\alpha} \end{array} \right] \times F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[2F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] \quad (\text{ก.4})$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
&= \int d^4x \left(-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \right) \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
& \int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \right) \delta g^{\mu\nu} \tag{ก.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R\phi^2) = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})\phi^2 \\
&= \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \right] \phi^2 \\
& \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R\phi^2) = \int d^4x \sqrt{-g} [G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu] \phi^2 \\
& \quad \times \delta g^{\mu\nu} \tag{ก.6}
\end{aligned}$$

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g})\phi^4 = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\phi^4 \right) \delta g^{\mu\nu} \tag{ก.7}$$

ถ้านำสมการที่ (ก.2)–(ก.7) แทนลงในสมการที่ (ก.1) จะได้ สมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein field equation) ดังในสมการที่ (2.2), (2.5) และ (2.6)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^{em}), \tag{2.2}$$

และเทนเซอร์พลังงาน – โมเมนตัมของสนามสเกลาร์ คือ

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^\phi = & \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{6}[g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu}]\phi^2 \\
& - g_{\mu\nu}\phi^4, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

และเทนเซอร์พลังงาน – โมเมนตัมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า คือ

$$T_{\mu\nu}^{em} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\alpha}F_{\delta\beta}g^{\gamma\delta} \right] g^{\alpha\beta}, \tag{2.6}$$

2 สมการเคลื่อนที่ของสนามสเกลาร์

เริ่มต้นจากสมการที่ (ก.1) ซึ่งจะทำการแปรผันในส่วนของสนามสเกลาร์ เพื่อที่จะหาสมการการเคลื่อนที่ของสนามสเกลาร์

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x \delta \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{12}R\phi^2 - \alpha\phi^4 \right] \right\} \\
& - \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta [\sqrt{-g}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})], \tag{ก.1}
\end{aligned}$$

โดยจะเริ่มต้นจากแปรผันที่ $\delta\phi$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - \frac{1}{6} R \delta\phi - 4\alpha \phi^3 \delta\phi \right) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi * \delta \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi * \delta \partial_\mu \phi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} R \delta\phi - 4\alpha \phi^3 \delta\phi \right) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \right) \delta\phi \\
&\quad - \frac{1}{6} R - 4\alpha \phi^3 \\
& \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - \frac{1}{6} R \delta\phi - 4\alpha \phi^3 \delta\phi \right) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\square\phi - \frac{1}{6} R - 4\alpha \phi^3 \right) \delta\phi, \tag{ก.8}
\end{aligned}$$

ซึ่งสุดท้ายจะได้เป็น

$$\square\phi = \frac{1}{6} R\phi + 4\alpha\phi^3, \tag{2.3}$$

ซึ่งจากสมการที่ (2.3) จะได้เป็นสมการการเคลื่อนที่ของสนามสเกลาร์

3 สมการการเคลื่อนที่ของแมกซ์เวลล์

เริ่มต้นจากสมการที่ (ก.1) ซึ่งจะทำให้การแปรผันในส่วนของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า เพื่อที่จะหาสมการการเคลื่อนที่ของศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า

$$\begin{aligned}
\delta S = \int d^4x \delta \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{12} R\phi^2 - \alpha\phi^4 \right] \right\} \\
- \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta [\sqrt{-g} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})], \tag{ก.1}
\end{aligned}$$

โดยจะเริ่มต้นจากแปรผันที่ δA_ν

$$\begin{aligned}
\int d^4x \sqrt{-g} \delta (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) \\
&= \int d^4x \left[\begin{array}{l} -\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\alpha A_\beta) \\ +\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\alpha A_\beta) \\ +\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \partial_\alpha A_\beta) \\ -\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} \partial_\alpha A_\beta) \end{array} \right] \delta A_\nu \\
&= \int d^4x 2 \left[\begin{array}{l} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \\ -\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\nu A_\beta) \end{array} \right] \delta A_\nu \\
&= \int d^4x 2 \left[\begin{array}{l} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\nu A^\mu) \\ -\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu A^\nu) \end{array} \right] \delta A_\nu \\
&= \int d^4x 2 [\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\nu\mu})] \delta A_\nu \\
\int d^4x \sqrt{-g} \delta (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) &= \int d^4x 2 [\partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})] \delta A_\mu \tag{ก.9}
\end{aligned}$$

ซึ่งสุดท้ายจะได้เป็น

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.4)$$

ซึ่งเรียกสมการที่ (2.4) ว่า สมการแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation of motion) จะเห็นได้ว่าสมการการเคลื่อนที่ในแต่ละปริมาณสามารถหาได้จากการแปรผันในแต่ละปริมาณ โดยที่สมการการเคลื่อนที่นั้นจะช่วยในการทำนายผลทางฟิสิกส์อื่นที่สนใจต่อไป



ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายพนาพล กาญจนเพิ่มชม
วัน เดือน ปี เกิด	3 พฤษภาคม 2538
สถานที่เกิด	จังหวัดกาญจนบุรี
วุฒิการศึกษา	พ.ศ. 2559 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ จากมหาวิทยาลัยศรีนคริน- ทรวิโรฒ
ที่อยู่ปัจจุบัน	128 หมู่ 3 ตำบลทุ่งสมอ อำเภอพนมทวน จังหวัดกาญจนบุรี

