อิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

THE INFLUENCE OF PSEUDOGAP ON ISOTOPE COEFFICIENT OF VAN HOVE SINGULARITY SUPERCONDUCTOR

ปราชญ์กิตติ หมายเจริญ

บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2561

อิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

ปราชญ์กิตติ หมายเจริญ

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ปีการศึกษา 2561

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

THE INFLUENCE OF PSEUDOGAP ON ISOTOPE COEFFICIENT OF VAN HOVE SINGULARITY SUPERCONDUCTOR

PRACHKITTI MYCHAREON

A Thesis Submitted in partial Fulfillment of Requirements

for MASTER OF SCIENCE (Physics)

Faculty of Science Srinakharinwirot University

2018

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

อิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่ง

แบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

ของ

ปราชญ์กิตติ หมายเจริญ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

....

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

.... ที่ปรึกษาหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

.... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารียา เอี่ยมบู่)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาภาพงศ์ ชั่งจันทร์)

ชื่อเรื่อง	อิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ของตัวนำยวดยิ่ง แบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี
ผู้วิจัย	ปราชญ์กิตติ หมายเจริญ
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ

การวิจัยในหัวข้ออิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีและศึกษาผลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีโดยกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมและอุณหภูมิวิกฤต ซึ่งได้จากการศึกษาผลการทดลองแล้วนำมาใช้ประกอบการคำนวณเพื่อหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปภายใต้แรงคู่ควบอย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส ผลการวิจัยพบว่าเมื่อพิจารณาสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามแนวทางทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีที่ค่าคงตัวคู่ควบเพิ่มขึ้น ค่าอุณหภูมิมีค่าสูงขึ้น และค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่คำนวณได้มีแนวโน้มที่ลดลงเมื่ออุณภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลอง

คำสำคัญ : ช่องว่างพลังงานเทียม, สัมประสิทธิ์ไอโซโทป, ตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

Title	THE INFLUENCE OF PSEUDOGAP ON ISOTOPE COEFFICIENT OF VAN HOVE SINGULARITY SUPERCONDUCTOR
Author	PRACHKITTI MYCHAREON
Degree	MASTER OF SCIENCE
Academic Year	2018
Thesis Advisor	Associate Professor Pongkaew Udomsamuthirun , Ph.D.

The aim of this research has two topics. The first is to find the equation of critical temperature and the isotope coefficient of a high critical temperature superconductor with a pseudogap in van Hove singularity density of state equation. The other object is to investigate the effects of a pseudogap on critical temperature and isotope effect coefficient in high critical temperature superconductors with a van Hove singularity density of state. The results showed the relationship between critical temperature calculated by taking BCS energy gap equation with a pseudogap and van Hove singularity density of state and coupling constant are the same way increased. Isotope effect coefficient of the result equation trends is decreased by the increase of critical temperature. The result can plot to the critical temperature and isotope coefficient graph and Compared with experiment of the research are the same way.

Keyword : Isotope Coefficient, Pseudogap, Van Hove Singularity

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้โดยได้รับความช่วยเหลือจาก รศ.ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ ในการให้คำปรึกษางานวิจัย รวมไปถึงเรื่องต่าง ๆ ให้การชี้แนะ ให้คำแนะนำ และคอยให้กำลังใจ ซึ่งผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอขอบพระคุณอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.อารียา เอี่ยมบู่ และ ผศ.ดร.อาภาพงศ์ ชั่งจันทร์ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นกรรมการคุมสอบปากเปล่า ให้คำแนะนำในการแก้ไขเล่มปริญญานิพนธ์ เพื่อให้เป็นเล่มที่สมบูรณ์ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ที่ได้อบรมสั่งสอนข้าพเจ้ามา ทำให้เป็นผู้มีความรู้ความสามารถและทำให้ผู้วิจัยได้ทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ

ขอขอบคุณพี่ ๆ และเพื่อน ๆ นิสิตปริญญาโท และปริญญาเอก คณะวิทยาศาสตร์ สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒที่ให้การช่วยเหลือและคำแนะนำด้านเอกสาร การแก้ไขเล่มวิจัย ให้คำปรึกษาทั้งเรื่องส่วนตัว และคอยให้กำลังใจแก่ผู้วิจัย ผู้วิจัยขอขอบคุณ

ท้ายที่สุด ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ครอบครัว ของผู้วิจัย ที่คอยเป็นกำลังใจและคอยช่วยเหลือในเรื่องต่าง ๆ ส่งเสริมและสนับสนุน จนสำเร็จลุล่วงตามเป้าหมายที่ผู้วิจัยได้ตั้งเป้าไว้

ปราชญ์กิตติ หมายเจริญ

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ

กิตติกรรมประกาศ........ ฉ

สารบัญ .... ช

สารบัญตาราง........ ฎ

สารบัญรูปภาพ .... ฏ

บทที่ 1 บทนำ........ 1

1.1 ภูมิหลัง 1

1.2 ความมุ่งหมายของงานวิจัย........ 6

1.3 ความสำคัญของงานวิจัย 7

1.4 ขอบเขตของการวิจัย 7

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ 7

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง........ 8

2.1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบีซีเอส 8

2.1.1 คู่คูเปอร์ (Cooper pairs) 9

2.1.2 ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) 10

2.1.3 อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตตามทฤษฎีบีซีเอส 14

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาริตี........ 16

2.2.1 ความแตกต่างระหว่างตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมและตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง 17

2.2.2 คุณสมบัติของช่องว่างพลังงานตามแนวทางของแวนโฮปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง 17

2.3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับช่องว่างพลังงานเทียม 24
2.3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสและช่องว่างพลังงานเทียม 25
2.3.2 สมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามแบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม 25
2.4 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ไอโซโทป 27
2.4.1 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามทฤษฎีบีซีเอส 27
2.4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทป 30
บทที่ 3 วิธีดำเนินงานวิจัย 34
3.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส 34
3.1.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส 34
3.1.2 ศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส 35
3.2 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 36
3.2.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 36
3.2.2 ศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎี บีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 37
3.3 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว 39
3.3.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว 41
3.3.2 ศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว 43

3.4 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 45

3.4.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี..... 45

3.4.2 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี..... 47

บทที่ 4 ผลการดำเนินงานวิจัย 50

4.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส 50

4.1.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส 50

4.1.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส.. 51

4.2 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 51

4.2.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 51

4.2.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 54

4.3 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว 55

4.3.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมที่มีความหนาแน่นสถานะคงตัว 55

4.3.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว 57

4.4 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 58

4.4.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 58

4.4.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 60

บทที่ 5 สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ 62

5.1 สรุปผลการวิจัย 62

5.2 อภิปรายผลการวิจัย 62

5.3 ข้อเสนอแนะ 63

บรรณานุกรม 64

ประวัติผู้เขียน 67

สารบัญตาราง

หน้า

ตาราง 1 ตารางแสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด 3

ตาราง 2 แสดงผลการคำนวณอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน 21

ตาราง 3 แสดงอัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤต 23

ตาราง 4 ตารางแสดงค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่วัดได้จากตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ 30

ตาราง 5 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของตัวนำยวดยิ่ง $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ โดยที่ O มีมวลไอโซโทปเป็น 16 39

ตาราง 6 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของตัวนำยวดยิ่ง $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ โดยที่ O มีมวลไอโซโทปเป็น 18 39

ตาราง 7 ตารางเปรียบเทียบอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้และสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากงานวิจัยของเกติโนและคณะ 53

สารบัญรูปภาพ

หน้า

ภาพประกอบ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิและความต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์ 1

ภาพประกอบ 2 ก) วัสดุปกติในสนามแม่เหล็ก ข) วัสดุในสภาพนำยวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก........ 2

ภาพประกอบ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาที่ค้นพบและอุณหภูมิวิกฤต 4

ภาพประกอบ 4 โครงสร้างของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ 5

ภาพประกอบ 5 แผนภาพแสดงความหนาแน่นสถานะใกล้ระดับพลังงานเฟอร์มีในตัวนำยวดยิ่ง แสดงช่องว่างพลังงาน 2Δ ที่ศูนย์เคลวินกับโลหะปกติ 6

ภาพประกอบ 6 ปฏิกิริยาของอิเล็กตรอนอิสระเมื่อเคลื่อนที่ผ่านแลททิซ 9

ภาพประกอบ 7 แผนภาพฟายแมนแสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน-โฟนอน....................... 10

ภาพประกอบ 8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิต่ออุณหภูมิวิกฤต ($\frac{T}{T_c}$) กับช่องว่างพลังงานต่อช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน ($\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$) ตามทฤษฎีบีซีเอส 16

ภาพประกอบ 9 แผนภาพแสดงปริมาณการโดปกับอุณหภูมิ... 24

ภาพประกอบ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคู่ควบคงที่ (λ) และอุณหภูมิวิกฤต.................. 27

ภาพประกอบ 11 ผลการทดลองอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งซึ่งเป็นฟังก์ชันของมวลไอโซโทปสำหรับปรอท... 28

ภาพประกอบ 12 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปและอุณหภูมิวิกฤตของ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ 29

ภาพประกอบ 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของสาร $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ที่ ^{16}O... 40

ภาพประกอบ 14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของสาร $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ที่ ^{18}O... 41

ภาพประกอบ 15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส 51

ภาพประกอบ 16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีของ ตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม La-Sr-Cu-O 52

ภาพประกอบ 17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีของ ตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม Y-Ba-Cu-O 53

ภาพประกอบ 18 กราฟแสดงความสัมพันธ์อุณหภูมิวิกฤตกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีของตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม La-Sr-Cu-O 55

ภาพประกอบ 19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและความหนาแน่นสถานะคงตัว 56

ภาพประกอบ 20 กราฟแสดงความสัมพันธ์อุณหภูมิวิกฤตกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและมีช่องว่างพลังงานเทียมเทียบกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส 58

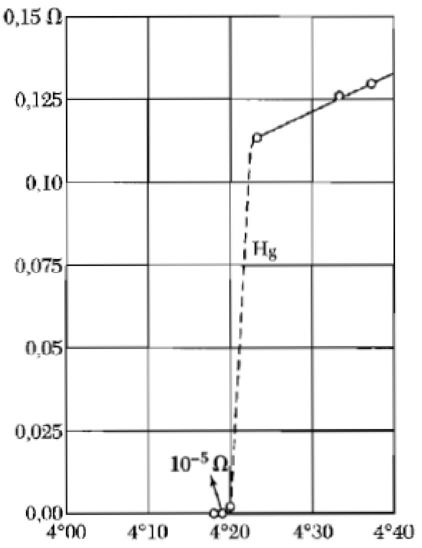
ภาพประกอบ 21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีและมีช่องว่างพลังงานเทียม 59

ภาพประกอบ 22 กราฟแสดงความสัมพันธ์อุณหภูมิวิกฤตกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีและมีช่องว่างพลังงานเทียมเทียบกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส 61

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ภูมิหลัง

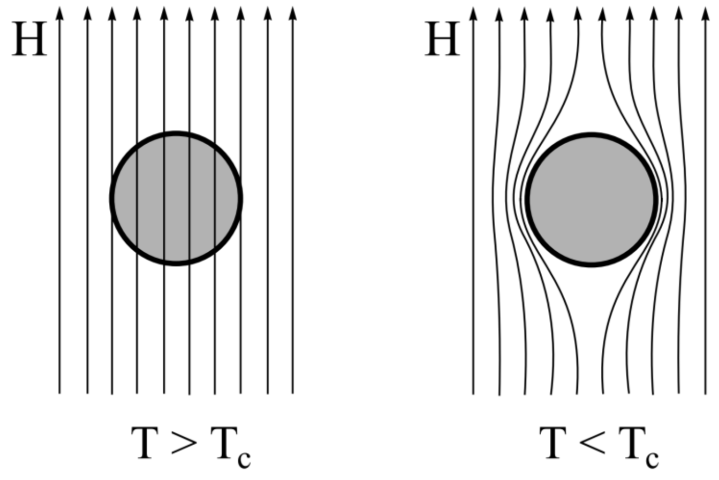
เมื่อทำการลดอุณหภูมิของโลหะหรือสารประกอบบางประเภทให้ต่ำลงจนถึงที่อุณหภูมิระดับหนึ่ง ค่าความต้านทานทางไฟฟ้าจะลดลงจนเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใด เรียกอุณหภูมินั้นว่า อุณหภูมิวิกฤต (Critical temperature) และเรียกโลหะหรือสารประกอบนั้นว่า ตัวนำยวดยิ่ง (Superconductor) ซึ่งถูกค้นพบโดย แคเมอร์ลิงน์ออนเนส (Buckel. 1991: 1-3) ที่ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสภาพความต้านทานไฟฟ้าและอุณหภูมิของโลหะ เมื่อทำการทดลองกับปรอท พบว่าที่อุณหภูมิ 4.2 เคลวิน ค่าความต้านทานทางไฟฟ้าของปรอทกลับลดลงอย่างทันทีทันใดจึงเรียกสภาพที่ค่าความต้านทานทางไฟฟ้าเป็นศูนย์ว่า สภาพนำยวดยิ่ง (Superconductivity) โดยกราฟความสัมพันธ์ที่ออนเนสได้ค้นพบแสดงได้ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิและความต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์

ที่มา : Kittel, Charles. (2005). Introduction to Solid State Physics. 8th ed. p 258.

หลังจากการค้นพบของออนเนส ได้มีนักฟิสิกส์หลายท่านพยายามอธิบายและทำการทดลองที่เกี่ยวข้องกับการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง จนกระทั่งในปี ค.ศ.1933 ไมส์เนอร์และออคเซนเฟลด์ (Kittel. 2005: 262) ทำการทดลองพบว่าเมื่อตัวนำยวดยิ่งอยู่ในสภาพนำยวดยิ่งแล้ววางลงในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กที่เหมาะสม สนามแม่เหล็กจะไม่สามารถทะลุผ่านไปได้ เนื่องจากสนามแม่เหล็กรวมภายในตัวนำมีค่าเป็นศูนย์ซึ่งคล้ายอยู่ในสภาพตัวนำที่สมบูรณ์ (Perfect conductor) เรียกปรากฏการณ์ดังกล่าวว่า ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ (Meissner effect) ดังนั้นถ้าทำการทดลองโดยให้ตัวนำยวดยิ่งอยู่ภายใต้สนามแรงโน้มถ่วงของโลกและวางตัวบนสนามแม่เหล็กจะเกิดการยกตัวลอยขึ้น เรียกเหตุการณ์นี้ว่าการยกตัว (levitation) แสดงดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 ก) วัสดุปกติในสนามแม่เหล็ก ข) วัสดุในสภาพนำยวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก

ที่มา : Mourachkine, A. (2004). Room-Temperature Superconductivity. p 18.

จะเห็นได้ว่าทั้งความสามารถที่สภาพความต้านทานทางไฟฟ้าไปเป็นศูนย์และประกฎการณ์ไมส์-เนอร์เป็นคุณสมบัติที่สำคัญที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากมาย แต่ปัญหาที่พบคือค่าอุณหภูมิวิกฤตที่มีค่าต่ำมาก จึงได้มีการพยายามที่จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งมีค่าสูงขึ้น นอกจากนี้นักฟิสิกส์หลายท่านมีความพยายามที่จะอธิบายการเกิดสภาพนำยวดยิ่งโดยใช้ทฤษฎีต่าง ๆ ต่อมาในปี ค.ศ. 1950 ฟรอห์ลิช (Froehlich. 1950: 845-856) เสนอว่าการสั่นของแลททิซ (lattice vibration) มีผลต่อการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง มวลอะตอมและอุณหภูมิวิกฤตมี

ความสัมพันธ์กัน และในปีเดียวกันการทดลองของแมกซเวลล์และเรย์โนลดส์ได้ยืนยันว่าอุณหภูมิวิกฤตแปลผกผันกับมวลอะตอม (Mourachkine. 2004: 4) เรียกปรากฏการณ์ดังกล่าวว่าปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope effect) มีค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทป (isotope effect exponent : α) เป็น 0.5 แสดงได้ดังสมการ

$$T_c \propto \frac{1}{M^{\alpha}} \tag{1.1}$$

เมื่อ	T_c	คือ	อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง
	M	คือ	มวลไอโซโทป
	α	คือ	สัมประสิทธิ์ไอโซโทป

ตาราง 1 ตารางแสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด

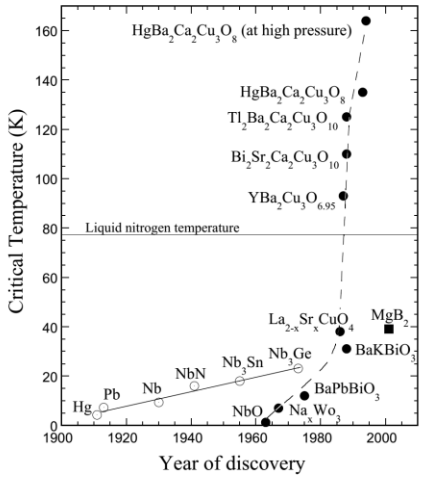
ธาตุสารประกอบ	สัมประสิทธิ์ไอโซโทป (α)
Hg	0.5 ± 0.03
Sn	0.47 ± 0.02
Mo	0.33 ± 0.05
Os	0.15 ± 0.05
Ru	0.00 ± 0.05
Pb	0.49 ± 0.02

ที่มา : Kittel, Charles. (2005). Introduction to Solid State Physics. 8th ed. p 270.

ทฤษฎีที่สำคัญที่ใช้ในการอธิบายสภาพนำยวดยิ่งในระดับจุลภาค (microscopic) เกิดขึ้นในปี ค.ศ.1957 โดยบาร์ดีน คูเปอร์ และชรีฟเฟอร์ (Bardeen;Cooper;&Schrieffer. 1957:

1175) เรียกทฤษฎีดังกล่าวว่าทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) อย่างที่ทราบกันดีว่าความต้านทานที่เกิดขึ้นในโลหะเกิดจากการชนกันของอิเล็กตรอนอิสระและโฟนอน เพื่อที่จะอธิบายสภาพนำยวดยิ่ง บาร์ดีน คูเปอร์และชรีฟเฟอร์ มีการนำเสนอแนวคิดคืออิเล็กตรอนอิสระจะเกิดการจับคู่กันเรียกว่าคู่คูเปอร์ (Cooper pair) โดยมีโฟนอนเป็นสื่อกลาง ดังนั้นค่าความต้านทานทางไฟฟ้าจึงมีค่าต่ำมาก หลักฐานที่ยืนยันว่าทฤษฎีบีซีเอสสามารถนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์การเกิดสภาพนำยวดยิ่งได้ เช่น ปรากฏการณ์โจเซฟสัน (Josephson effect) ปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope effect)

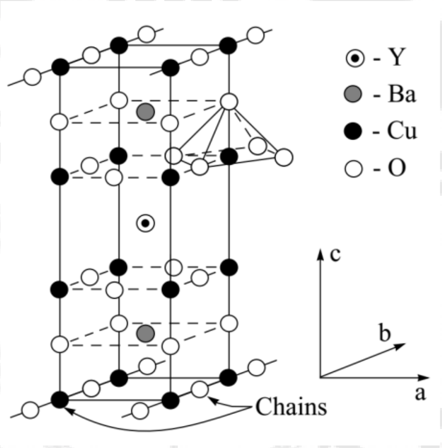
ในปี ค.ศ. 1986 มีการค้นพบตัวนำยวดยิ่งในสารประกอบกลุ่ม A15 คือ Nb_3Ge มีอุณหภูมิวิกฤตอยู่ที่ 23 เคลวิน ต่อมาเบดนอร์ซและมูลเลอร์ (Bednorz; & Muller. 1986: 189) ค้นพบตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 30 เคลวิน ที่มีสารประกอบในระบบ La-Ba-Cu-O ซึ่งเป็นสารประกอบประเภทคิวเพรท ในอีกหนึ่งปีต่อมา ซูและคณะ (Wu; et al. 1987: 908) ได้ค้นพบตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงถึง 93 เคลวิน เป็นสารประกอบในระบบ Y-Ba-Cu-O ซึ่งเป็นสารประกอบประเภทคิวเพรทเช่นเดียวกันกับที่เบดนอร์ซและมูลเลอร์ได้ค้นพบ เป็นสารประกอบที่สามารถทดลองได้โดยใช้ไนโตรเจนเหลวซึ่งมีค่าจุดเดือดที่ 77 เคลวิน จากนั้นจึงมีการค้นพบสารประกอบต่าง ๆ ที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นเป็นลำดับ สารประกอบ $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$ ให้ค่าอุณหภูมิวิกฤต 166 เคลวิน เมื่ออยู่ภายใต้ความดัน



ภาพประกอบ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาที่ค้นพบและอุณหภูมิวิกฤต

ที่มา : Mourachkine, A. (2004). Room-Temperature Superconductivity. p 7.

สารประกอบประเภทคิวเพรท (Mourachkine. 2004: 94) มีโครงสร้างแบบเพอร์รอฟสไกด์ (Perrovskite-type structures) ซึ่งประกอบไปด้วยระนาบของคอปเปอร์ออกไซด์ (CuO_2) ถูกแยกชั้นด้วยธาตุ A และ ออกซิเจน จับกันในรูป A_mO_n เช่น ในสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ จะมีการแบ่งชั้นกันดังภาพประกอบ 4 ซึ่งในบางกรณีชั้นของ A_mO_n มีหน้าที่เป็นตัวสะสมประจุและควบคุมการโดปของระนาบคอปเปอร์ออกไซด์โดยประจุที่เป็นพาหะ สำหรับ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ และ $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ จัดเป็นสารประกอบที่มีการนำมาศึกษาอย่างกว้างขวางโดยมักจะเรียกตัวนำยวดยิ่งทั้งสองว่าเป็น สารประกอบต้นแบบ (Parent Compound)

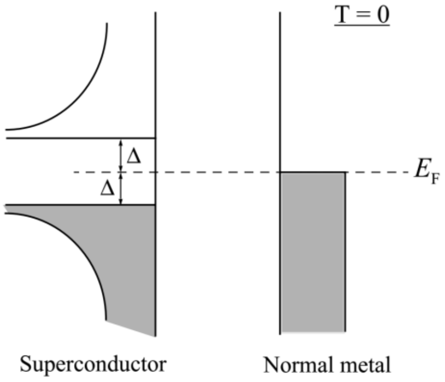


ภาพประกอบ 4 โครงสร้างของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง $YBa_2Cu_3O_{7-x}$

ที่มา : Mourachkine, A. (2004). Room-Temperature Superconductivity. p 99.

สภาพนำยวดยิ่ง เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนสถานะของตัวนำปกติไปสู่สถานะของตัวนำยวดยิ่งโดยมีช่องว่างพลังงานที่ขั้นสถานะทั้งสอง เรียกว่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่ง (Superconducting gap, SG) (Mourachkine. 2004: 37) จากภาพประกอบ 5 แสดงความหนาแน่นสถานะใกล้ระดับพลังงานเฟอร์มีในตัวนำยวดยิ่ง ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่สำคัญและนำไปสู่การคำนวณปริมาณต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับอุณหภูมิวิกฤต ความจุความร้อน และคุณสมบัติอื่น ๆ หลังจากได้มีการค้นพบตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงกลับพบช่องว่างพลังงานอีกชนิดหนึ่งที่มีคุณสมบัติคล้ายกันกับ SG แต่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขที่อุณหภูมิต่ำกว่าหรือที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต

เรียกช่องว่างพลังงานดังกล่าวว่า ช่องว่างพลังงานเทียม (Pseudogap, PG) โดยจะพบได้ในกลุ่มของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงเท่านั้น และได้มีการค้นพบว่า PG จะขึ้นกับปริมาณการโดปในตัวนำยวดยิ่ง (Tsuei;&Doderer. 1999: 257-262)



ภาพประกอบ 5 แผนภาพแสดงความหนาแน่นสถานะใกล้ระดับพลังงานเฟอร์มีในตัวนำยวดยิ่ง แสดงช่องว่างพลังงาน 2Δ ที่ศูนย์เคลวินกับโลหะปกติ

ที่มา : Mourachkine, A. (2004). Room-Temperature Superconductivity. p 38.

จากการค้นพบตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในกลุ่มสารประกอบประเภทคิวเพรทพบว่าสภาพนำยวดยิ่งจะขึ้นอยู่กับระนาบ 2 มิติ ซึ่งความหนาแน่นสถานะที่ใช้ในการอธิบายการเกิดสภาพนำยวดยิ่งได้ดีคือความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี (van Hove singularity : vHs) จากงานวิจัยของบอคและโบเวีย (Bok;&Bouvier. 2007: 460-462) แสดงให้เห็นว่าความหนาแน่นสถานะแบบ vHs มีบทบาทสำคัญต่อการอธิบายสภาพนำยวดยิ่งของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ซึ่งสามารถอธิบายได้ทั้งในสถานะปกติและในสภาพนำยวดยิ่ง

1.2 ความมุ่งหมายของงานวิจัย

ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายของงานวิจัยไว้ดังนี้

1) เพื่อหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

2) เพื่อศึกษาผลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

1.3 ความสำคัญของงานวิจัย

การศึกษางานวิจัยในครั้งนี้เพื่อศึกษาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี ซึ่งมีแนวทางตามทฤษฎีบีซีเอสและสามารถนำมาใช้เพื่ออธิบายการเกิดสภาพนำยวดยิ่งได้

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

ผู้วิจัยได้ตั้งขอบเขตของงานวิจัยไว้ดังนี้

1) คำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

2) ทราบผลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ

เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เพื่อศึกษางานวิจัยเรื่อง ผลกระทบของช่องว่างพลังงานเทียมต่ออุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้า เอกสาร ตำรา บทความ เพื่อใช้ประกอบในการวิจัยโดยแบ่งเป็น 4 หัวข้อดังนี้

2.1 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบีซีเอส

2.1.1 คู่คูเปอร์ (Cooper pairs)

2.1.2 ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory)

2.1.3 อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตตามทฤษฎีบีซีเอส

2.2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

2.2.1 ความแตกต่างระหว่างตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมและตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

2.2.2 คุณสมบัติของช่องว่างพลังงานตามแนวทางของแวนโฮปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

2.3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับช่องว่างพลังงานเทียม

2.3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสและช่องว่างพลังงานเทียม

2.3.2 สมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามแบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม

2.4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

2.4.1 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามทฤษฎีบีซีเอส

2.4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

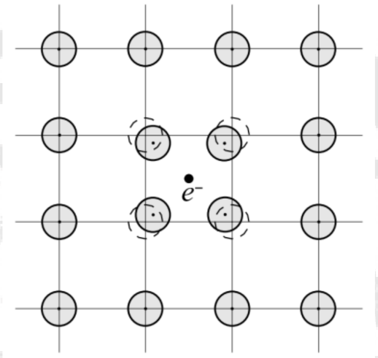
2.1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบีซีเอส

ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) (Kittel. 2005: 277-278) เป็นทฤษฎีที่ใช้ในการอธิบายการเกิดสภาพนำยวดยิ่งในระดับจุลภาค (microscopic) โดยกล่าวถึงอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นในระดับของอนุภาค ซึ่งในทฤษฎีนี้จะกล่าวถึงอิเล็กตรอนสองตัวทำอันตรกิริยากันทำให้เกิดการจับคู่ เรียกคู่ของอิเล็กตรอนนี้ว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pair) โดยในกรณีทั่วไปการจับคู่นี้จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้

เนื่องจากแรงผลักคูลอมบ์ (Repulsive coulomb force) ดังนั้นการที่คู่ของอิเล็กตรอนจะสามารถจับคู่กันได้จึงต้องมีแรงดึงดูดที่มากกว่าแรงผลักคูลอมบ์

2.1.1 คู่คูเปอร์ (Cooper pairs)

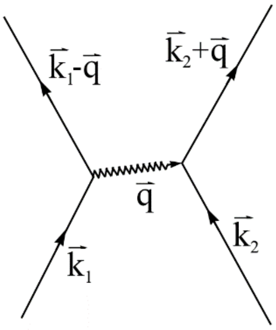
จากแนวคิดของทฤษฎีบีซีเอส (Wikipedia. 2019: online) สามารถแสดงให้เห็นภาพการเกิดอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองแสดงดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 ปฏิกิริยาของอิเล็กตรอนอิสระเมื่อเคลื่อนที่ผ่านแลททิซ

ที่มา : Mourachkine, A. (2004). Room-Temperature Superconductivity. P 145.

เมื่ออิเล็กตรอนตัวแรกเคลื่อนที่ผ่านแลททิซซึ่งมีประจุไฟฟ้าบวกจะส่งผลให้แลททิซ (lattice) ถูกดึงดูดเข้าหาอิเล็กตรอนตัวแรก อิเล็กตรอนตัวที่สองเคลื่อนที่เข้าหากลุ่มของแลททิซเนื่องจากผลของการเหนี่ยวนำแลททิซที่อิเล็กตรอนตัวแรกได้กระทำไว้จึงส่งผลให้ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าบวกมีมาก นอกจากนี้อิเล็กตรอนตัวที่แรกยังถูกผลของกลุ่มแลททิซเหนี่ยวรั้งไว้ ซึ่งจะสามารถเรียงลำดับตำแหน่งของอนุภาคได้เป็น อิเล็กตรอน – แลททิซ – อิเล็กตรอน โดยอิเล็กตรอนทั้งสองมีสปินตรงกันข้าม เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของแลททิซจะพบว่าแลททิซเกิดการสั่นที่เรียกกันว่า การสั่นของแลททิซ (lattice vibration) โดยพลังงานของการสั่นของคลื่นที่มาความยืดหยุ่นเป็นปริมาณควอนไทซ์ เรียกก้อนพลังงานนั้นว่าโฟนอน (phonon) จึงอาจกล่าวได้ว่าคู่คูเปอร์เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนโดยมีโฟนอนเป็นสื่อกลาง และมีเงื่อนไขคือผลรวมของโมเมนตัมและสปินจะต้องเท่ากับศูนย์



ภาพประกอบ 7 แผนภาพฟายแมนแสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน-โฟนอน

ที่มา : Mourachkine, A. (2004). Room-Temperature Superconductivity. P 142.

จากภาพประกอบ 7 เป็นแผนภาพแสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน-อิเล็กตรอน โดยโฟนอนสามารถมองได้เป็นการปล่อยของโฟนอนจำลองจากอิเล็กตรอนตัวเดียว อิเล็กตรอนโมเมนตัม $\vec{k}_1$ ปลดปล่อยโฟนอนเมื่อถูกชนจนอยู่ในสถานะ $\overrightarrow{k_1'} = \overrightarrow{k_1} - \vec{q}$ อิเล็กตรอนโมเมนตัม $\overrightarrow{k_2}$ ได้รับโฟนอนจากอิเล็กตรอนตัวแรกโดยมีขนาดเป็น $\hbar\vec{q}$ จนอยู่ในสถานะ $\overrightarrow{k_2'} = \overrightarrow{k_2} + \vec{q}$ ซึ่งกระบวนการดังกล่าวจะทำให้แอมปลิจูดของการกระเจิงมีค่าเป็นลบซึ่งแสดงให้เห็นว่าอันตรกิริยาของทั้งสองเป็นแบบดึงดูดกัน เมื่ออิเล็กตรอนแต่ละตัวมีระดับพลังงานใกล้ผิวเฟอร์มีเท่านั้นและ $E(k_1) - E(k_2) << \hbar\omega_D$ โดย ω_D คือความถี่ที่เกิดจากการสั่นของแลททิซตามแบบจำลองเดอร์บายด์ (พงษ์แก้ว. 2555: 36; Kittel. 2005: 278; Mourachkine. 2004: 142-145)

2.1.2 ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory)

แนวคิดหลักของทฤษฎีบีซีเอสเกิดจากงานของคูเปอร์ในปีค.ศ. 1956 ที่เสนอการจับคู่กันของอิเล็กตรอนที่มีอันตรกิริยาแบบดูดกัน เรียกคู่อิเล็กตรอนว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pairs) พิจารณาแบบจำลองแกรนด์คาโนนิคอลฮามิลโทเนียน (grand canonical harmiltonian) ของตัวนำยวดยิ่งตามทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งพิจารณาการทำอันตรกิริยากันระหว่างคู่ของอิเล็กตรอนได้ดังสมการ (Fetter;&Walecka. 1971: 439-441; Mahan. 2000: 636)

$$\hat{H}_{sc} = \sum_{k,\alpha}(\varepsilon_k - E_F)\hat{c}^{\dagger}_{k,\alpha}\hat{c}_{k,\alpha} - \sum_{k,k'} V_{k,k'}\hat{c}^{\dagger}_{k',\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-k',\downarrow}\hat{c}_{-k,\downarrow}\hat{c}_{k,\uparrow} \quad (2.1)$$

เทอมแรกตามสมการที่ 2.1 จะกล่าวถึงพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่ถูกกำหนดโดยระดับเฟอร์มิ (Fermi level) และในเทอมที่สองของสมการจะกล่าวถึงอันตรกิริยาดึงดูดกันระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสอง เมื่อ α เป็นสัญลักษณ์แทนสปินของอิเล็กตรอนคือ สปินขึ้น (spin up : ↑) และสปินลง (spin down : ↓) จากสมการที่ (2.1) สามารถนำมาจัดรูปใหม่โดยใช้เทคนิคสนามเฉลี่ยจะได้

$$\begin{aligned}\hat{H} = \sum_{k,\alpha}\left(\varepsilon_k - E_F\right)\hat{c}^{\dagger}_{k,\alpha}\hat{c}_{k,\alpha} - \sum_{k,k^{'}}(V_{k,k'}\langle\hat{c}_{-k,\downarrow}\hat{c}_{k,\uparrow}\rangle\hat{c}^{\dagger}_{k',\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-k^{'},\downarrow} \\ +V_{k,k'}\langle\hat{c}^{\dagger}_{k',\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-k^{'},\downarrow}\rangle\hat{c}_{-k,\downarrow}\hat{c}_{k,\uparrow} - V_{k,k'}\langle\hat{c}^{\dagger}_{k',\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-k^{'},\downarrow}\rangle\langle\hat{c}_{-k,\downarrow}\hat{c}_{k,\uparrow}\rangle)\end{aligned} \tag{2.2}$$

สมการที่ (2.2) ละทิ้งเทอมสุดท้ายเนื่องจากเป็นค่าคงตัวและกำหนดช่องว่างพลังงานดังสมการ

$$\begin{aligned}\Delta_k &= -\sum_{k'}V_{k,k'}\left\langle\hat{c}_{-k',\downarrow}\hat{c}_{k',\uparrow}\right\rangle \\ &= \Delta_{k^*} \\ &= -\sum_{k'}V_{k,k'}\left\langle\hat{c}^{\dagger}_{k',\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-k^{'},\downarrow}\right\rangle\end{aligned} \tag{2.3}$$

นำสมการที่ (2.3) แทนลงในสมการที่ (2.2) จะได้สมการใหม่เป็น

$$H = \sum_{k,\alpha}\left(\varepsilon_k - E_F\right)\hat{c}^{\dagger}_{k,\alpha}\hat{c}_{k,\alpha} + \sum_{k}\left(\Delta_k\hat{c}^{\dagger}_{k',\uparrow}\hat{c}^{\dagger}_{-k^{'},\downarrow} + \Delta_k\hat{c}_{-k',\downarrow}\hat{c}_{k',\uparrow}\right) \tag{2.4}$$

ในทางควอนตัมฟังก์ชันคลื่นรวมของคู่คูเปอร์สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลคูณระหว่างฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่งของคู่อิเล็กตรอนและฟังก์ชันที่ขึ้นกับสปินของคู่ของอิเล็กตรอนเนื่องจากอิเล็กตรอนเป็นอนุภาคเฟอร์มิออนที่มีสปินเป็น $\frac{1}{2}$ ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นรวมจึงเป็นแบบแอนติซิเมทริก (Antisymmetric) และตามทฤษฎีบีซีเอส สปินรวมของอิเล็กตรอนจะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นคู่คูเปอร์จึงมีฟังก์ชันที่ขึ้นกับสปินของคู่ของอิเล็กตรอนแบบซิงเลท (spin singlet) ซึ่งเป็นฟังก์ชันคี่ (odd function) เพื่อทำให้ฟังก์ชันคลื่นรวมเป็นแอนติซิเมทริกฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่งจึงต้องเป็นฟังก์ชันคู่ (even function) ส่งผลให้ค่าโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum) ที่เป็นไปได้ คือ 0 , 2 , 4 , ... โดยตามทฤษฎีบีซีเอสจะใช้โมเมนตัมเชิงมุมเป็นศูนย์เรียกตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเอส (s-wave superconductor) (Zettili. 2009: 636-641; พงษ์แก้ว. 2559: 50-52) ช่องว่างพลังงาน

ตามทฤษฎีบีซีเอสจึงเป็นค่าคงตัวและกำหนดให้ $\Delta_k = \Delta\left(V_{k,k'} = V\right)$ จะสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$H = \sum_k \begin{matrix} \left(\varepsilon_k - E_F\right)\hat{c}^\dagger_{k,\uparrow}\hat{c}_{k,\uparrow} - \left(\varepsilon_k - E_F\right)\hat{c}_{-k,\downarrow}\hat{c}^\dagger_{-k,\downarrow} \\ +\Delta\hat{c}^\dagger_{k,\uparrow}\hat{c}^\dagger_{-k,\downarrow} + \Delta\hat{c}_{-k,\downarrow}\hat{c}_{k,\uparrow} + \left(\varepsilon_k - E_F\right) \end{matrix} \tag{2.5}$$

ใช้คุณสมบัติการคอมมิวต์ (commutation) ของความสัมพันธ์ $\left[\hat{c}^\dagger_{k,\downarrow}, \hat{c}_{k,\downarrow}\right] = 1$ จะได้

$$H = \sum_k \begin{pmatrix} \hat{c}^\dagger_{k,\uparrow} & \hat{c}_{-k,\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_k - E_F & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon_k + E_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{k,\uparrow} \\ \hat{c}^\dagger_{-k,\downarrow} \end{pmatrix} = \sum_k \Psi^\dagger_k H \Psi_k \tag{2.6}$$

เมื่อ Ψ_k คือ ตัวดำเนินการสนามนัมบู (Numbu field operator)

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k - E_F & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon_k + E_F \end{pmatrix}$$

สมการที่ (2.6) แสดงถึงฮามิลโทเนียนสนามเฉลี่ยของคู่อิเล็กตรอนโดยมี $\mathbb{H}$ เป็นตัวดำเนินการ ค่าไอเกนแวลูของฮามิลโทเนียน จะถูกกำหนดให้เป็น

$$E_\pm = \pm\sqrt{\left(\varepsilon_k - E_F\right)^2 + \Delta^2}$$

จากนิยามของฟังก์ชันกรีน

$$\begin{aligned} G(k,\tau) &= -\left\langle T_\tau \Psi_k(\tau) \Psi^\dagger_k(0) \right\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \left\langle T_\tau \hat{c}_{k,\uparrow}\hat{c}^\dagger_{k,\uparrow} \right\rangle & < T_\tau \hat{c}_{k,\uparrow}\hat{c}_{-k,\downarrow} > \\ \left\langle T_\tau \hat{c}^\dagger_{-k,\downarrow}\hat{c}^\dagger_{k,\uparrow} \right\rangle & \left\langle T_\tau \hat{c}^\dagger_{-k,\downarrow}\hat{c}_{-k,\downarrow} \right\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

โดย T_τ เป็นตัวจัดการของเวลาจินตภาพและจากสมการการเคลื่อนที่ของไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg equation of motion) โดยมีนิยามเป็น $\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H, \hat{H}\right]$ เมื่อ $\hat{A}_H$ คือตัว

ดำเนินการไอเซนเบิร์กซึ่งจะกล่าวถึงตัวดำเนินการสร้างและตัวดำเนินการทำลาย (Creation operator and annihilation operator) และ $\hat{H}$ คือ ฮามิลโทเนียน โดยพิจารณาจากสมบัติของตัวดำเนินการ

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right]=\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}$$

$$\left[C_\alpha,C_\beta^\dagger\right]=1 \qquad \text{เมื่อ } \alpha=\beta$$

$$\left[C_\alpha,C_\beta^\dagger\right]=0 \qquad \text{เมื่อ } \alpha\neq\beta$$

$$\left[C_\alpha,C_\beta\right]=\left[C_\alpha^\dagger,C_\beta^\dagger\right]=0 \qquad \text{เมื่อ } \alpha \text{ และ } \beta \text{ มีค่าใด ๆ}$$

พิจารณาตัวดำเนินการสร้างและทำลายโดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของไฮเซนเบิร์กกำหนดให้ $\hbar=1$ จะได้ฟังก์ชันกรีนของตัวนำยวดยิ่งที่มีโดเมนเป็นความถี่

$$G\left(k,\omega_n\right)=-\frac{i\omega_n+\left(\varepsilon_k-E_F\right)\tau_3-\Delta\tau_1}{\omega_n{}^2+\left(\varepsilon_k-E_F\right)^2+\Delta^2}$$

และมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันกรีนที่มีโดเมนเป็นเวลา

$$G\left(k,\tau\right)=T\lim_{\tau\to0}\sum_n e^{-i\omega_n\tau}G\left(k,\omega_n\right) \tag{2.8}$$

เมื่อ $\omega_n=\pi T\left(2n+1\right)$ คือความถี่มะซึบาระ T เป็นอุณหภูมิ n เป็นเลขจำนวนเต็ม และกำหนดให้ $\tau_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\tau_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\tau_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}$ และ $\tau_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เพาลี (เกศริน. 2551: 43-45) เนื่องจากนิยามช่องว่างพลังงานตามสมการที่ (2.3) คือ $G_{21}\left(k,\omega_n\right)=\Delta=-\sum_k V\langle\hat{c}_{-k,\downarrow}^\dagger\hat{c}_{k,\uparrow}^\dagger\rangle$ ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการช่องว่างพลังงานได้เป็น

$$\Delta=-V\sum_k\lim_{\tau\to0}T\sum_n\frac{\Delta e^{-i\omega_n\tau}}{\left(i\omega_n-E_+\right)\left(i\omega_n+E_-\right)} \tag{2.9}$$

พิจารณาสมการที่ (2.8) โดยการใช้กฎผลรวมความถี่มะซึบาระและเทคนิคเศษส่วนย่อยจะได้

$$\frac{1}{V}=\sum_{k}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\left(\varepsilon_{k}-E_{F}\right)^{2}+\Delta^{2}}}{2k_{B}T}\right)}{\sqrt{\left(\varepsilon_{k}-E_{F}\right)^{2}+\Delta^{2}}} \tag{2.10}$$

เมื่อเปลี่ยนเครื่องหมายผลรวมให้เป็นการอินทิเกรตโดยขอบเขตของการอินทิเกรตจะอยู่ระหว่าง $E_F-\omega_D<\varepsilon_k<E_F+\omega_D$ เมื่อ ω_D คือ ความถี่เดอบาย เนื่องจากตามทฤษฎีบีซีเอสกำหนดให้ช่องว่างพลังงานเป็นแบบคลื่นเอส ดังนั้นในกรณีที่ $\left|\varepsilon_k\right|>E_F+\omega_D$ ค่าของช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์ โดยกำหนดให้มีความหนาแน่นสถานะเป็น $N\left(\varepsilon_k-E_F\right)=N\left(0\right)$ ทำการจัดรูปสมการจะได้

$$\frac{1}{\lambda}=\int_{0}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^{2}+\Delta\left(T\right)^{2}}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon^{2}+\Delta\left(T\right)^{2}}}d\varepsilon \tag{2.11}$$

เมื่อ $\varepsilon=\varepsilon_k-E_F$ และกำหนดให้ $\lambda=N\left(0\right)V$ คือ ค่าคงตัวคู่ควบ (Coupling constant) สมการที่ (2.11) คือสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

2.1.3 อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตตามทฤษฎีบีซีเอส

จากสมการที่ (2.11) เมื่อพิจารณาที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤตช่องว่างพลังงานจะเป็นศูนย์สามารถเขียนสมการช่องว่างพลังงานได้เป็น (Mahan. 2000: 632-642)

$$\frac{1}{\lambda}=\int_{0}^{\hbar\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2k_BT_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon$$

เมื่อ $x=\frac{\varepsilon}{2k_BT_c}$ จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \int_{0}^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_BT_c}} \frac{\tanh(x)}{x} dx \tag{2.12}$$

ใช้เทคนิคการอินทริเกรตทีละส่วน (by parts) จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \tanh(x)\ln(x)\Big|_{0}^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_BT_c}} + \int_{0}^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_BT_c}} \ln(x)\left(\mathrm{Sech}(x)\right)^2 dx \tag{2.13}$$

เนื่องจาก $\omega_D >> T_c$ ในเทอมที่ 2 ของสมการที่ (2.13) จะใช้การประมาณ

$$\int_0^\infty \ln x\left(\mathrm{sech}x\right)^2 d\varepsilon \cong \ln\left(\frac{\pi}{4\gamma}\right)$$

โดย $\gamma = e^{0.57} \cong 1.78$ แทนค่าขอบเขตของการอินทริเกรตและใช้การประมาณจะได้

$$k_BT_c = 1.14\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}} \tag{2.14}$$

สมการที่ (2.14) จึงเป็นสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส และเมื่อพิจารณาในกรณีที่อุณหภูมิมีค่าเป็นศูนย์ พิจารณาสมการที่ (2.11) ฟังก์ชัน $\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta(T)^2}}{2k_BT}\right) \cong 1$ ทำให้เขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(0)}} d\varepsilon$$

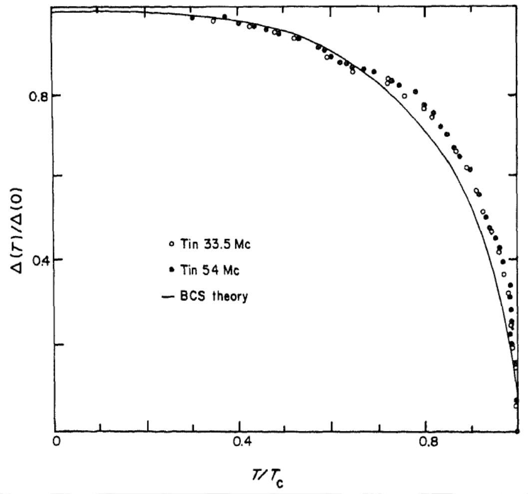
ทำการอินทริเกรตและประมาณในกรณี $\omega_D >> \Delta(0)$ จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \ln\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(0)}\right)\Big|_0^{\hbar\omega_D} \approx \ln\left(\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta(0)}\right)$$

จัดรูปสมการจะได้ช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสเป็น

$$E_g = 2\Delta(0) = 4\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}} \tag{2.15}$$

หาอัตราส่วนของสมการช่องว่างพลังงานตามสมการที่ (2.15) ต่อสมการอุณหภูมิวิกฤตสมการที่ (2.14) จะพบว่าอัตราส่วนเป็นค่าคงตัวคือ 3.52 ค่าทั้งสองสามารถวัดได้จากการทดลอง โดยอธิบายได้ดีกับตัวนำยวดยิ่งอย่างอ่อน เช่น อลูมิเนียม ซึ่งจากภาพประกอบที่ 8 จะพบว่าเมื่ออุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งเพิ่มขึ้นค่าช่องว่างพลังงานจะลดลง



ภาพประกอบ 8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิต่ออุณหภูมิวิกฤต ($\frac{T}{T_c}$) กับช่องว่างพลังงานต่อช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน ($\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$) ตามทฤษฎีบีซีเอส

ที่มา : Mahan. (2000). Many-Particle Physics. 3rd edition. P 642.

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

ในปี ค.ศ. 1953 เลออน ฟาน โฮป (Leon Van Hove) (Wikipedia. 2018: online) ได้แสดงให้เห็นบทบาทที่สำคัญในโครงสร้างช่องพลังงานของอิเล็กตรอนหรือโฟนอน แสดงให้เห็นว่าพฤติกรรมที่ไม่สามารถวิเคราะห์ได้บางอย่างมีสาเหตุมาจากการเปลี่ยนแปลงในโทโพโลยี (topology) ของช่องพลังงานซึ่งการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวรู้จักกันในชื่อแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี (van Hove singularity) โดยความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีเป็นแนวคิดหนึ่งที่ใช้ในการ

อธิบายอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม A 15 โดยแนวคิดดังกล่าวสามารถทำนายอุณหภูมิวิกฤตได้อย่างแม่นยำกว่าทฤษฎีบีซีเอสที่กำหนดให้ค่าความหนาแน่นสถานะคงที่

2.2.1 ความแตกต่างระหว่างตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมและตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

เมื่อพิจารณาตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (Conventional superconductor) และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง (High Critical Temperature Superconductor) จะพบว่าทั้งสองประเภทมีความแตกต่างกันค่อนข้างมาก (พงษ์แก้ว. 2555: 57-58) โดยสามารถสรุปได้ดังนี้

1. สารประกอบของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีลักษณะขึ้นกับทิศทาง (Anisotropy) กล่าวคือโครงสร้างผลึกมีลักษณะเป็นชั้น และมีการนำไฟฟ้าที่เกือบเป็น 2 มิติ

2. ในตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมมีความยาวอาพันธ์ (Coherence length) เพียงค่าเดียวและในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงจะมีค่าความยาวอาพันธ์มากกว่าตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมประมาณ 1000 เท่า

3. ในตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมความหนาแน่นของประจุจะแปรผันกับอุณหภูมิวิกฤต ในขณะที่ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีรูปแบบที่ได้แน่นอน

4. ผลของการวัดค่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่ได้จากวิธีต่าง ๆ อาจมีค่าไม่เท่ากัน

5. ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีค่าไม่แน่นอนซึ่งแตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมที่ส่วนใหญ่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีบีซีเอส

2.2.2 คุณสมบัติของช่องว่างพลังงานตามแนวทางของแวนโฮปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

อย่างที่ทราบกันดีว่าสภาพนำยวดยิ่งในกลุ่มตัวนำยวดยิ่งประเภทคิวเพรทเกิดขึ้นในระนาบของ CuO_2 ซึ่งมีการคำนวณแบบ 2 มิติ เกติโนและคณะ (Getino;de Llano;&Rubio. 1993: 597-599) ได้ทำการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีการกำหนดให้มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

$$N(E) = N_0 \ln\left|\frac{E_F}{E - E_F}\right| \tag{2.16}$$

สมการที่ (2.12) แสดงความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาริริตีโดย N_0 คือค่าคงตัวของความหนาแน่นสถานะ E_F คือ ระดับพลังงานเฟอร์มิ และ E คือ ระดับพลังงานของคู่คูเปอร์ โดยพบว่าความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาริริตีมีการตั้งสมมติฐานว่าสำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูง ระดับของผิวเฟอร์มิจะมีค่าใกล้กับจุดซิงกูลาริริตีดังจะเห็นได้จากสมการ โดยสมมติฐานดังกล่าวได้รับการยืนยันจากหลายการทดลอง (Bok;&Bouvier. 2007: 460-462)

จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส (2.11) ทำการจัดรูปสมการโดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นสถานะเป็นไปตามสมการ กำหนดให้ $x=\frac{E-E_F}{2k_BT_c}$, $Z=\frac{\hbar\omega_D}{2k_BT_c}$ และ $W=\frac{E_F}{2k_BT_c}=\frac{T_F}{2T_c}$ โดยที่อุณหภูมิวิกฤตช่องว่างพลังงานจะเป็นศูนย์ $\Delta(T_c)=0$ จะได้สมการเป็น

$$\frac{1}{N_0V}=\int_0^Z dx\frac{\tanh(x)}{x}\ln\left(\frac{W}{x}\right) \tag{2.17}$$

ใช้เทคนิคการอินทรเกรทแยกส่วนจะได้

$$\frac{1}{N_0V}=\tanh Z\ln Z\ln\frac{W}{Z}+\frac{1}{2}\tanh Z\ln^2 Z-D(Z,W) \tag{2.18}$$

โดย

$$D(Z,W)=\int_0^Z dx\left(\ln x\ln\left(\frac{W}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln^2(x)\right)\mathrm{sech}^2(x)$$

ทำการจัดรูปสมการที่ (2.14) โดยการคูณด้วย $2\coth(Z)$ ตลอดจะได้

$$\left[\frac{1}{N_0V}+D(Z,W)\right]2\coth(Z)+\ln^2\left(\frac{W}{Z}\right)=\ln^2(W) \tag{2.19}$$

และจะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = \frac{1}{2} T_F \exp\left\{ -\left[\left(\frac{1}{N_0 V} + D(Z,W) \right) 2\coth(Z) + \ln^2\left(\frac{W}{Z} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{2.20}$$

อีกสิ่งหนึ่งที่น่าสนใจของการศึกษาตัวนำยวดยิ่งนั่นคือ อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิ (gap-to-T_c ratio) พิจารณาจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส สมการที่ (2.11) ในกรณีที่อุณหภูมิเป็นศูนย์เคลวิน $\Delta(0) = \Delta_0$ และใช้เทคนิคการประมาณที่ว่า $tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x > 1$ จะได้

$$\frac{2}{N_0 V} = \int_{E_F - \hbar\omega_D}^{E_F + \hbar\omega_D} \frac{dE}{\sqrt{(E - E_F)^2 + \Delta^2(0)}} \ln\left| \frac{E_F}{E - E_F} \right| \tag{2.21}$$

เมื่อกำหนดให้ $\xi = E - E_F$ และทำการอินทิเกรตโดยใช้เทคนิคการอินทิเกรตแบบแยกส่วนสมการที่ (2.17) จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{N_0 V} = \ln\left(\frac{E_F}{\hbar\omega_D} \right) \sinh^{-1}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right) + \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{\xi}{\Delta_0} \right)}{\xi} d\xi \tag{2.22}$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right) > 1$ ดังนั้นสามารถกระจายฟังก์ชัน

$$\sinh^{-1}(x) = \ln|2x| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{2^{2k} (k!)^2 \, 2k x^{2k}}$$

เมื่อพิจารณาที่ $x > 1$ จะได้

$$\frac{1}{N_0 V} = \ln\left(\frac{E_F}{\hbar\omega_D} \right) \sinh^{-1}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right) + \int_0^1 \frac{\sinh^{-1}(y)}{y} dy + \int_{\Delta_0}^{\hbar\omega_D} \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{\xi}{\Delta_0} \right)}{\xi} d\xi \tag{2.23}$$

โดย $y = \frac{\xi}{\Delta_0}$ สมการที่ (2.19) จะสามารถประมาณได้ว่า $\int_0^1 \frac{\sinh^{-1}(y)}{y} dy \approx 0.955$ โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขและใช้การกระจายฟังก์ชัน $\sinh^{-1}(x)$ แทนลงในเทอมที่สามของสมการจะได้

$$\frac{1}{N_0 V} = \ln\left|\frac{E_F}{\hbar\omega_D}\right| \sinh^{-1}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right) + 0.822 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right)^2 \qquad (2.24)$$

ทำการจัดรูปสมการจะได้สมการของช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน

$$\Delta_0 \cong 2k_b T_F \exp\left[-\left(\frac{2}{N_0 V}\left(\ln\left(\frac{T_F}{\omega_D}\right)\right)^2 - 1.645\right)^{1/2}\right] \qquad (2.25)$$

สมการของอุณหภูมิวิกฤต (2.16) และสมการที่ (2.21) จะนำมาหาอัตราส่วนของช่องว่างพลังงาน และทำการเปรียบเทียบผลของการคำนวณกับทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในกลุ่ม La-Sr-Cu-O และ Y-Ba-Cu-O ได้ผลดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงผลการคำนวณอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน

$T_c(K)$	$\omega_D(K)$	$T_F(K)$	λ			$2\Delta_0/k_BT_c$
			BCS	Gettino	Tsuei	
40 La-Sr-Cu-O	400	5548	0.412	0.093	0.100	3.64
	500	5548	0.378	0.088	0.095	3.66
	754	5580	0.327	0.082	0.086	3.53
90 Y-Ba-Cu-O	300	8807	0.754	0.148	0.164	3.60
	400	8807	0.620	0.130	0.143	3.63
	754	8807	0.445	0.106	0.115	3.68

ที่มา : Getino, J.M.; & et al. (1993). *Properties of the Gap Energy in the van Hove scenario of High -Temperature Superconductivity*. Phys Rev B. 48: 597-599.

จากตาราง 2 จะพบว่าเมื่อเปรียบเทียบค่าคู่ควบอิเล็กตรอน-โฟนอน (Coupling constant , λ) สำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงจะมีค่าต่างกันมากเมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส แต่มีค่าใกล้เคียงกันกับค่าที่ได้จากงานวิจัยของซุยและคณะ (C. Tsuei; et al. 1991: 2725) ซึ่งพบว่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตมีค่ามากกว่าของทฤษฎีบีซีเอสที่มีค่าประมาณ 3.53

รัตนบุรีและคณะ (Ratanaburi;Udomsamuthirun;&Yoksan. 1996: 52) ได้ทำการศึกษาอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤตโดยศึกษาตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีเริ่มต้นจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี ที่อุณหภูมิวิกฤติสมการช่องว่างพลังงานจะเป็น

$$\frac{2}{N_0 V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2k_B T_c}\right)}{\varepsilon} \ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon}\right| d\varepsilon \tag{2.26}$$

และที่ศูนย์เคลวินจะได้สมการเป็น

$$\frac{2}{N_0 V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon}\right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon \tag{2.27}$$

จะพบว่าสมการที่ (2.22) และสมการที่ (2.23) มีค่าเท่ากัน และกำหนดให้ $R = \frac{2\Delta(0)}{k_B T_c}$ จะได้

$$\int_0^{\frac{\omega_D}{2k_B T_c}} \frac{\tanh(x)}{x} \ln\left(\frac{E_F}{2k_B T_c x}\right) dx = \int_0^{\frac{2\omega_D}{k_B R T_c}} \frac{\ln\left(\frac{2E_F}{k_B R T_c x}\right)}{\sqrt{x^2+1}} dx \tag{2.28}$$

จากสมการที่ (2.24) นำมาคำนวณด้วยวิธีการเชิงตัวเลขจะได้ค่าอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤตโดยศึกษาตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีเมื่อเทียบกับงานวิจัยของเกตติโนและคณะดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงอัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤต

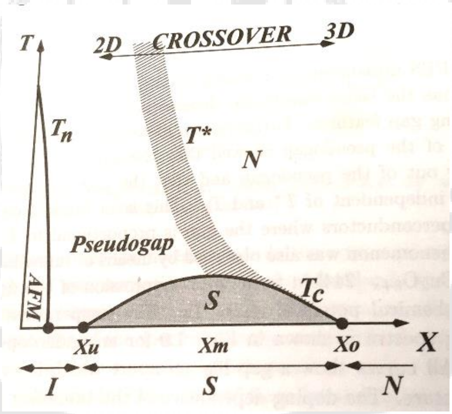
$T_c(K)$	$\omega_D(K)$	$E_F(K)$	$2\Delta(0)/k_BT_c$
40 (La-Sr-Cu-O)	400	5548	3.656
	500	5548	3.651
	754	5580	3.646
90 (Y-Ba-Cu-O)	300	8807	3.773
	400	8807	3.726
	754	8807	3.670

ที่มา : Ratanaburi; Udomsamuthirun; Yoksan. (1996). Ratio $2\Delta(0)/k_BT_c$ in a van Hove superconductor. p 52.

จากผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าการคำนวณโดยวิธีการตามแบบงานวิจัยของเกตติโนและคณะ ให้ค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตที่ใกล้เคียงกันกับที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งเทคนิคการประมาณที่เกตติโนและคณะเลือกใช้ในการประมาณสมการอุณหภูมิวิกฤตคือการประมาณฟังก์ชัน $\tanh(x)$ แล้วจึงทำการอินทิเกรต นอกจากนี้งานวิจัยของแอบด์-ชูเคอร์ (Abd-Shukor. 2007: 587-590) ศึกษาค่าคงตัวคู่ควบอิเล็กตรอนโฟนอนของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในกลุ่มที่มีคิวเพรทเป็นองค์ประกอบพบว่าค่าคงตัวคู่ควบอิเล็กตรอนโฟนอนวัดได้ด้วยวิธีการวัดแบบอัลตราโซนิก (ultrasonic method) ซึ่งค่าคงตัวคู่ควบอิเล็กตรอนโฟนอนแบบแวนโฮป (λ_{VH}) ถูกพบเมื่ออุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นโดยที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0.025-0.060 จะเห็นได้ว่าเมื่อเทียบกับค่าคงตัวคู่ควบอิเล็กตรอน-โฟนอนตามทฤษฎีบีซีเอสในตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมมีค่าน้อยกว่าประมาณ 10 – 100 เท่า และยังพบด้วยว่าอุณหภูมิเดอร์บายด์ไม่มีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิวิกฤต ซึ่งจากงานวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าการมีอิทธิพลซึ่งกันและกันระหว่างความถี่เดอร์บายด์และค่าคู่ควบอิเล็กตรอน-โฟนอนในระบบสองมิติและการเปลี่ยนแปลงของทั้งสองตัวแปรส่งผลโดยรวมต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิวิกฤต

2.3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับช่องว่างพลังงานเทียม

ช่องว่างพลังงานเทียมถูกค้นพบครั้งแรกโดย การวัด NMR (Nuclear Magnetic Resonance) โดยเกิดการตีความว่าเป็น spin gap แต่หลังจากนั้นเครื่องมืออื่น ๆ หรือการใช้วิธีต่าง ๆ สามารถตรวจพบได้ เช่น ARPES , tunneling , Raman เป็นต้น ซึ่งยืนยันว่าช่องว่างพลังงานเทียมมีอยู่จริง การค้นพบช่องว่างพลังงานเทียมของตัวนำยวดยิ่งประเภทคิวเพรทในสถานะปกติที่มีการโดป (Underdoped Cuprate) ซึ่งช่องว่างพลังงานเทียมจะพบในช่วงที่มีการโดป (Underdope : x_u) จนถึงค่าการโดปที่เหมาะสม (Optimum : x_m) และเมื่ออยู่ในช่วงที่อยู่ระหว่างการโดปที่เหมาะสมและการโดปอย่างมาก (Overdope : x_o) จะไม่ปรากฏช่องว่างพลังงานเทียม ความหนาแน่นสถานะอนุภาคเดี่ยวที่ถูกลดทอนรอบศักย์เคมี (Chemical potential) จะถูกเรียกว่าช่องว่างพลังงานเทียม ซึ่งมีการเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องแยกจากโครงสร้างในสถานะนำยวดยิ่ง (Schneider;&Singer. 2000: 280)



ภาพประกอบ 9 แผนภาพแสดงปริมาณการโดปกับอุณหภูมิ

ที่มา : Schneider; & Singer. (1993). Phase Transition Approach to High Temperature Superconductivity Universal Properties of Cuprate Superconductors. p12.

สำหรับตัวนำยวดยิ่งประเภทคิวเพรทในกลุ่ม $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ การศึกษาค้นคว้าแสดงให้เห็นว่า 1. ช่องว่างพลังงานเทียมและโครงสร้างช่องว่างพลังงานในสภาพนำยวดยิ่งจะมีสมมาตรเดียวกัน 2. อุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมลดลงในขณะที่มีการโดปเพิ่มขึ้นและรวมกับอุณหภูมิวิกฤตเมื่อโดปเกิน 3. ในช่วงของการโดปเกินความกว้างของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานเทียมกับ

อุณหภูมิวิกฤตมีค่ามาก 4. ในช่วงของการโดปเกินส่วนที่อุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมรวมกับอุณหภูมิวิกฤต คุณสมบัติในสถานะปกติ (normal state) จะมีความใกล้เคียงกับโลหะและมีพฤติกรรมตามทฤษฎีของไหลเฟอร์มิ-แลนดาวน์ (Fermi-Landau Liquid theory)

2.3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสและช่องว่างพลังงานเทียม

อุดมสมุทรหิรัญ (Udomsamuthirun. 2001: 316) ศึกษาการเกิดสภาพนำยวดยิ่งของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีช่องว่างพลังงานเทียม มีการกำหนดให้ช่องว่างพลังงานรวมมีความสัมพันธ์กับช่องว่างพลังงานเทียมและช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส โดยการพิจารณาแบบจำลองช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งช่องว่างพลังงานรวมสามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta_t^2(T) = \Delta_{sg}^2(T) + {E_{pg}}^2(T) \tag{2.29}$$

เมื่อ Δ_{sg} คือ ช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งตามทฤษฎีบีซีเอส และ E_{pg} คือ ช่องว่างพลังงานเทียมตามลำดับ จากงานวิจัยของบันโยพัดไฮยาย์และพอดดาร์ (Bandyopadhyay;&Poddar. 2001: 137-142) พบว่าช่องว่างพลังงานเทียมของตัวนำยวดยิ่งในสถานะปกติจะแปรผกผันกับการโดป ดังนั้นช่องว่างพลังงานรวมจึงเปรียบเสมือนว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสเพิ่มขึ้น ช่องว่างพลังงานเทียมจะลดลง แต่ในกรณีที่ช่องว่างพลังงานเทียมมีค่าเพิ่มขึ้น ช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งตามทฤษฎีบีซีเอสจะลดลงตามสมการที่ (2.25) ดังนั้นเมื่ออุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งมีค่ามากกว่าอุณหภูมิวิกฤต Δ_{sg} จะมีค่าเป็นศูนย์ส่งผลให้ช่องว่างพลังงานรวมขึ้นกับค่าของช่องว่างพลังงานเทียม ที่อุณหภูมิค่าหนึ่ง E_{pg} จะมีค่าเป็นศูนย์เรียกอุณหภูมินั้นว่า อุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียม (pseudogap crossover temperature : T^*)

2.3.2 สมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามแบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม

สภาพนำยวดยิ่งสามารถอธิบายได้โดยใช้ทฤษฎีบีซีเอสแต่ไม่สามารถอธิบายได้อย่างครอบคลุมโดยเฉพาะอย่างยิ่งกับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงซึ่งมีการค้นพบช่องว่างพลังงานเทียม จันปุ่ม (Chanpoom. 2015: 1-9) ได้ศึกษาผลกระทบของช่องว่างพลังงานเทียมต่อความจุความร้อน

จำเพาะของตัวนำยวดยิ่ง โดยใช้แบบจำลองตามสมการที่ (2.25) และสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสตามสมการที่ (2.11) โดยกำหนดให้

$$E = E(T) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{sg}^2 + E_{pg}^2}, & T < T_c \\ \sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}, & T_c < T < T^* \end{cases} \tag{2.30}$$

เมื่อ E คือ พลังงานการกระโดดข้ามชั้นของอนุภาคเดี่ยว (Single-particle excitation energy) และเพื่อง่ายต่อการคำนวณจึงกำหนดให้ค่าคงตัว k_B และ $\hbar$ มีค่าเป็น 1 ส่งผลให้ ω_D อยู่ในหน่วยเคลวิน ดังนั้นสมการช่องว่างพลังงานสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{T^*} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}} d\varepsilon + \int_{T^*}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon \tag{2.31}$$

ในตัวนำยวดยิ่งประเภทคิวเพรทค่าอุณหภูมิวิกฤตจะขึ้นกับปริมาณการโดป เมื่อพิจารณากรณีที่มีการโดปต่ำ $E_{pg} \gg T_c$ จะประมาณ $\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}}{2T_c}\right) \cong 1$ และใช้การประมาณ

$$\int_0^{T^*} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon \approx 0.686\left(\frac{T^*}{2T_c}\right) + 0.2 \tag{2.32}$$

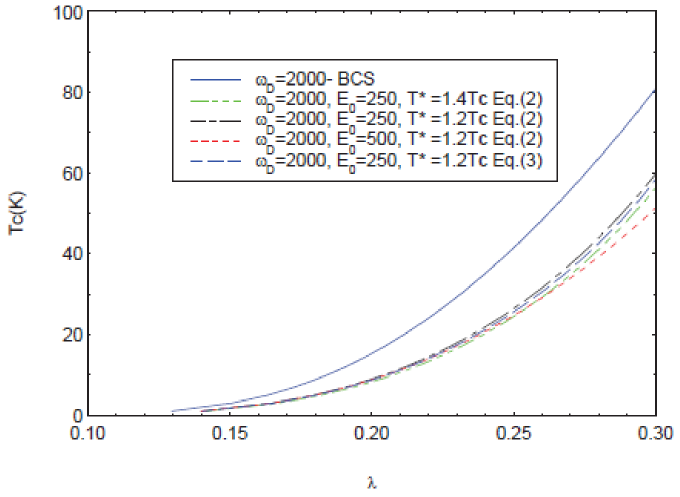
ทำการคำนวณสมการที่ (2.27) โดยใช้การประมาณสมการที่ (2.28) และในกรณีที่กำหนดให้ $\omega_D \gg T_c$ จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \ln\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}\right)\Big|_0^{T^*} + \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon - \left(0.686\left(\frac{T^*}{2T_c}\right) + 0.2\right)$$

สมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้คือ

$$T_c = 1.14\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}+\frac{T^*}{E_{pg}}-0.343\frac{T^*}{T_c}-0.2} \tag{2.33}$$

สมการที่ (2.29) เป็นสมการอุณหภูมิวิกฤตที่มีแนวคิดจากทฤษฎีบีซีเอสที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยใช้แบบจำลองตามสมการที่ (2.25) กำหนดให้ $E_{pg} \gg T_c$ และ $\omega_D \gg T_c$ ผลที่ได้แสดงดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคู่ควบคงที่ (λ) และอุณหภูมิวิกฤต

ที่มา : Chanpoom, T. (2015). Effect of Pseudogap on the Specific Heat of Superconductor. International Journal of Modern Physics B (29): 1550180.

2.4 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ไอโซโทป

2.4.1 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามทฤษฎีบีซีเอส

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและมวลไอโซโทปสมการที่ (1.1) โดยสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการได้เป็น

$$T_c = kM^{-\alpha} \tag{2.34}$$

เมื่อกำหนดให้ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน ใช้ลอกาลิทึมธรรมชาติ (natural logarithm) ตลอดทั้งสมการ หาอนุพันธ์ และทำการจัดรูปจะได้

$$\alpha = -\frac{\partial \ln T_c}{\partial \ln M} \tag{2.35}$$

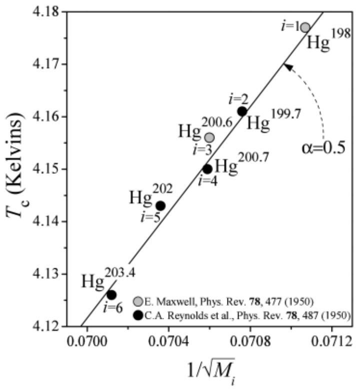
โดยกำหนดให้ T_c เป็นฟังก์ชันของความถี่เดอร์บายเท่านั้น $T_c = T_c\left(\omega_D\right)$ จากแนวคิดตามทฤษฎีบีซีเอสทำให้ทราบว่าตัวการสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่งคือคู่คูเปอร์ โดยคู่ของอิเล็กตรอนสามารถจับคู่กันได้ภายใต้เงื่อนไขของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก (Bardeen;Cooper;&Schrieffer. 1957: 1178-1179)

$$\omega_D \propto M^{-\frac{1}{2}} \tag{2.36}$$

ทำการจัดรูปสมการและนำมวลไอโซโทป (Isotope mass , M) แทนในสมการที่ (2.31) แล้วทำการจัดรูปสมการจะได้เป็น

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega_D}{T_c}\frac{dT_c}{d\omega_D} \tag{2.37}$$

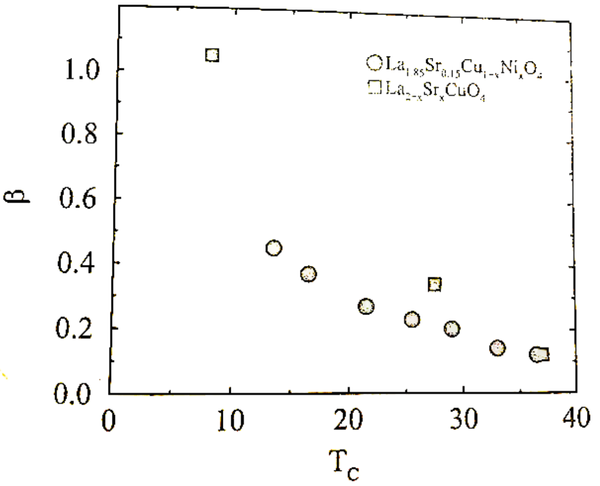
สมการที่ (2.33) เป็นสมการของการหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปอยู่ภายใต้เงื่อนไขตามทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งทฤษฎีบีซีเอสสามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้เป็น 0.5



ภาพประกอบ 11 ผลการทดลองอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งซึ่งเป็นฟังก์ชันของมวลไอโซโทปสำหรับปรอท

ที่มา : Huang, Q. X. (2018). Does the isotope effect of mercury support the BCS theory?.

จากภาพประกอบ 11 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปและอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งปรอท จะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎีบีซีเอสสามารถอธิบายผลการทดลองได้อย่างแม่นยำ แต่งานวิจัยของหวง (Q. Huang. 2018: unpaged) แสดงให้เห็นแนวคิดที่ว่าผลการทดลองของตัวนำยวดยิ่งประเภทต่าง ๆ มีค่าแตกต่างกัน มีความเป็นไปได้ว่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่ขึ้นกับมวลไอโซโทปอาจมีความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนมากกว่าตามที่ทฤษฎีบีซีเอสได้นำเสนอไว้ สำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะมีค่าที่แตกต่างจากทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 12 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปและอุณหภูมิวิกฤตของ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$

ที่มา : Schneider; & Singer. (1993). Phase Transition Approach to High Temperature Superconductivity Universal Properties of Cuprate Superconductors. p297.

ภาพประกอบ 12 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ซึ่งพบว่านอกจากค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะมีค่าแตกต่างจากค่าที่ได้ตามทฤษฎีบีซีเอสแล้ว ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าแตกต่างกันไปโดยขึ้นอยู่กับปริมาณการโดปอีกด้วย ดังนั้นทฤษฎีบีซีเอสจึงไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ไอโซโทปได้อย่างครอบคลุม

ตาราง 4 ตารางแสดงค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่วัดได้จากตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม $La_{2-x}Sr_xCuO_4$

สารประกอบ	x	T_c (K)	α
$La_{1.725}Sr_{0.275}CuO_4$	0.278	22	0.12±0.05
$La_{1.775}Sr_{0.225}CuO_4$	0.225	29	0.1±0.03
$La_{1.9}Sr_{0.1}CuO_4$	0.100	33	0.4±0.05
$La_{1.075}Sr_{0.125}CuO_4$	0.925	36	-
$La_{1.85}Sr_{0.15}CuO_4$	0.150	39	0.140±0.008

ที่มา : Poole, Charles P; & Farach, Horacio A; & Creswick, Richard J. Superconductivity. p 636.

2.4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

ครอฟอร์ดและคณะ (Crawford; et al. 1990: 282) ได้มีการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปโดยพิจารณาในกรณีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีจากสมการที่ (2.12) และพิจารณาสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสสมการที่ (2.11)

$$\frac{2}{V}=\int_{E_F-\omega_D}^{E_F+\omega_D} N_0 \ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right| \frac{\tanh\left(\dfrac{\sqrt{\left(E-E_F\right)^2+\Delta^2\left(T\right)}}{2T}\right)}{\sqrt{\left(E-E_F\right)^2+\Delta^2\left(T\right)}}dE \tag{2.38}$$

กำหนดให้ $\xi = E-E_F$ พิจารณากรณีที่ $T=T_c$ จะมีช่องว่างพลังงาน $\Delta\left(T_c\right)=0$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V}=\int_0^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\xi}\right)\frac{\tanh\left(\dfrac{\xi}{2T_c}\right)}{\xi}d\xi \tag{2.39}$$

ใช้การประมาณ $tanh\left(x\right)\cong x$ เมื่อ $x<1$ และ $tanh\left(x\right)\cong 1$ เมื่อ $x>1$ ทำการจัดรูปสมการที่ (2.35) ให้ตรงตามเงื่อนไขจะได้

$$\frac{1}{N_0V}=\int_0^{2T_c}\ln\left(\frac{E_F}{\xi}\right)\frac{\tanh\left(\frac{\xi}{2T_c}\right)}{\xi}d\xi+\int_{2T_c}^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\xi}\right)\frac{\tanh\left(\frac{\xi}{2T_c}\right)}{\xi}d\xi \tag{2.40}$$

ทำการอินทิเกรตและใส่การประมาณของ $\tanh\left(\frac{\xi}{2T_c}\right)$ จะได้

$$\frac{1}{N_0V}=\frac{1}{2}\left(\left(\ln\frac{E_F}{2T_c}\right)^2-\left(\ln\frac{E_F}{\omega_D}\right)^2+1\right) \tag{2.41}$$

จัดรูปสมการ จะได้อุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c=1.36E_F\exp\left\{-\left(\frac{2}{N_0V}+\ln\frac{E_F}{\omega_D}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{2.42}$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ไอโซโทปหาได้จาก $\alpha=-\frac{\partial\ln T_c}{\partial\ln M}$ ดังนั้นจะได้

$$\alpha=\frac{1}{2}\left[\left\{\ln\left(\frac{T_F}{T_{CO}}\right)+\frac{\delta^2}{2T_{CO}}\right\}/\left\{\ln\left(\frac{1.36T_F}{T_{CO}}\right)-\frac{\delta^2}{8T_{CO}^2}\right\}\right] \tag{2.43}$$

สมการที่ (2.43) คือสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาริตี

จากการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของคิโช (Kishore. 1995: 367-372) โดยแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยตรงและส่วนที่สัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีการเปลี่ยนแปลงตามช่วง โดยในการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยตรงพิจารณาจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส ทำการจัดรูปสมการจะได้

$$1-\frac{1}{2}V\int_{E_F-\omega_D}^{E_F+\omega_D}\eta\left(E\right)\frac{\tanh\left(\dfrac{E-E_F}{2k_BT_c}\right)}{E-E_F}dE=0 \qquad (2.44)$$

เมื่อ $\eta\left(E\right)$ คือ ความหนาแน่นสถานะ E_F คือ พลังงานเฟอร์มิ k_B คือ ค่าคงตัวของโบลซ์มาน และ ω_D คือ ความถี่เดอบาย จากสมการที่ (2.37) โดยการกำหนดให้ $\varepsilon=E-E_F$ โดยความหนาแน่นสถานะเขียนได้เป็น

$$N\left(\varepsilon\right)=\frac{1}{2}\left\{\eta\left(E_F-\varepsilon\right)+\eta\left(E_F+\varepsilon\right)\right\} \qquad (2.45)$$

จะสามารถจัดรูปได้เป็น

$$1-V\int_0^{\omega_D}\frac{1}{2}\left\{\eta\left(E_F-\varepsilon\right)+\eta\left(E_F+\varepsilon\right)\right\}\frac{\tanh\left(\dfrac{\varepsilon}{2k_BT_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon=0$$

เมื่อกำหนดให้ $F=\int_0^{\omega_D}N\left(\varepsilon\right)\tanh\left(\dfrac{\varepsilon}{2k_BT_c}\right)\dfrac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ จะสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$1-VF=0 \qquad (2.47)$$

สัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้จากการหาอนุพันธ์สมการที่ (2.39) เทียบกับมวลไอโซโทปซึ่งวิธีการดังกล่าวจะทำให้ได้ค่าประมาณเท่านั้น อย่างไรก็ตามก็เป็นวิธีการหนึ่งที่ไม่สามารถหลีกเลี่ยงได้เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปออกมาได้โดยตรง พิจารณาสมการที่ (2.39) โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับมวลไอโซโทปจะได้

$$\frac{dF}{dM}=\frac{\partial F}{\partial\omega_D}\frac{d\omega_D}{dM}+\frac{\partial F}{\partial T_c}\frac{dT_c}{dM}=0 \qquad (2.48)$$

และจากความสัมพันธ์ $\omega_D\sim M^{-1/2}$ จะสามารถหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปโดยใช้สมการที่ (2.47) จะได้

$$\alpha = \frac{N(\omega_D)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2kT_c}\right)}{\int_0^{\omega_D} \frac{N(\varepsilon)}{kT_c \cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)} d\varepsilon} \qquad (2.49)$$

สมการที่ (2.49) เป็นสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากการพิจารณาสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยกำหนดให้มีความหนาแน่นสถานะตามสมการที่ (2.45)

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาอิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี มีวัตถุประสงค์ 2 ประการ คือ เพื่อคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี และอีกวัตถุประสงค์คือเพื่อศึกษาอิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป โดยมีขั้นตอนในการดำเนินงานประกอบด้วย 1. ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส 2. ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี 3. ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม และมีความหนาแน่นสถานะคงตัวและ 4. ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

3.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส

3.1.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส

พิจารณาสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะคงตัว $N(\varepsilon)=N(0)$ และกำหนดให้ $\lambda=N(0)V$ ที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤตช่องว่างพลังงานจะเป็นศูนย์สามารถเขียนสมการช่องว่างพลังงานได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon \tag{3.1}$$

เมื่อ $x=\frac{\varepsilon}{2T_c}$ จะได้

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{\frac{\omega_D}{2T_c}}\frac{\tanh x}{x}dx \tag{3.2}$$

ใช้การประมาณ $\tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = 0.91 + \int_{1}^{\frac{\omega_D}{2T_c}} \frac{1}{x} dx$$

จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส มีความหนาแน่นสถานะคงตัวและร่วมกับการประมาณเชิงตัวเลข

$$T_c = 1.24\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}} \tag{3.3}$$

3.1.2 **ศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส**

พิจารณาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปสมการที่ (2.30) เมื่อกำหนดให้ $T_c = T_c(\omega_D)$ ดังนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D ตลอดทั้งสมการช่องว่างพลังงาน ตามสมการที่ (3.1) จะได้

$$\frac{d}{d\omega_D}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{d}{d\omega_D}\left(\int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon\right) \tag{3.4}$$

จัดรูปโดยใช้กฎของเลบนิซ (Leibniz Rule) (GRADSHTEYN. 1980)

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}\int_{\psi(a)}^{\phi(a)} f(x,a)dx = {} & f(\phi(a),a)\frac{d\phi(a)}{da} - f(\psi(a),a)\frac{d\psi(a)}{da} \\ & + \int_{\psi(a)}^{\phi(a)} \frac{d}{da} f(x,a)dx \end{aligned} \tag{3.5}$$

จะได้

$$\frac{dT_c}{d\omega_D}=\frac{T_c}{\omega_D} \tag{3.6}$$

นำ (3.6) แทนลงใน (2.30) จะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็น $\alpha=\frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอส ดังนั้นสมการที่ (3.5) จึงเป็นสมการสำคัญที่ทำให้การหาค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีความซับซ้อนในการคำนวณลดลง

3.2 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

3.2.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

จากการศึกษางานของเกติโนและคณะ (Getino;de Llano;&Rubio. 1993: 597-582; พงษ์แก้ว. 2559) พิจารณาสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี $N(\varepsilon)=N(0)\ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon-E_F}\right|$ ที่อุณหภูมิวิกฤตจะสามารถเขียนสมการช่องว่างพลังงานได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon \tag{3.7}$$

ซึ่งคำนวณอุณหภูมิวิกฤตโดยกำหนดให้มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี โดยใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อทำการเปรียบเทียบกับผลการวิจัยของเกติโนและคณะ ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้วิธีการประมาณร่วมกับการคำนวณเชิงตัวเลข จะประมาณฟังก์ชัน $\tanh(x)\cong 1$ เมื่อ $x\geq 1$ และ $\tanh(x)\cong x$ เมื่อ $x<1$ สมการที่ (3.7) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{2T_c}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\frac{1}{2T_c}d\varepsilon+\int_{2T_c}^{\omega_D}\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon \tag{3.8}$$

ทำการคำนวณเพื่อหาสมการอุณหภูมิวิกฤตจะได้

$$T_c = 1.36 E_F E\text{xp}\left\{ \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) + \ln\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right) - \frac{1}{\lambda} \right\} \tag{3.9}$$

สมการที่ (3.9) คือสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

3.2.2 ศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

พิจารณาสมการที่ (3.7) และสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปสมการที่ (2.30) โดยจะใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปวิธีเดียวกับการหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามทฤษฎีบีซีเอส เมื่อกำหนดให้ $T_c = T_c(\omega_D)$ ดังนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D และใช้สมการที่ (3.5) จะได้

$$\frac{1}{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) - \frac{1}{2T_c^{\,2}}\int_0^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\text{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)\frac{dT_c}{\mathrm{d}\omega_D}d\varepsilon = 0 \tag{3.10}$$

พิจารณาเทอม $\int_0^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\text{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)d\varepsilon$ ทำการอินทิเกรตโดยกำหนดให้ $y = \frac{\varepsilon}{2T_c}$ จะได้เป็น

$$\int_0^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\text{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)d\varepsilon = 2T_c\ln\left(\frac{E_F}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) - 2T_c\int_0^{\frac{\omega_D}{2T_c}}\ln(y)\,\text{sech}^2(y)\,dy \tag{3.11}$$

ในกรณีที่ $\omega_D \gg T_c$ ใช้การประมาณ $\frac{\omega_D}{2T_c} \to \infty$ ดังนั้นสามารถประมาณค่าสมการที่ (3.11) ตามแนวทางของทฤษฎีบีซีเอสและประมาณฟังก์ชัน $\tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้

$$\int_0^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\text{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)d\varepsilon = 2T_c\left(\ln\left(\frac{E_F}{2T_c}\right) + \ln\left(\frac{4e^{\gamma}}{\pi}\right)\right) \tag{3.12}$$

แทนค่าลงใน (3.11) ทำการจัดรูปสมการโดยใช้สมการที่ (2.30) เพื่อหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะได้

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)}{\ln\left(\frac{E_F}{2T_c}\right)-1.78}\right] \tag{3.13}$$

สมการที่ (3.13) คือ สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี และเมื่อพิจารณาในกรณีที่ $\omega_D \gg T_c$ จากสมการที่ (3.10) ใช้การประมาณเชิงตัวเลขในเทอม $\int_0^{\omega_D} \ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)d\varepsilon$ จะได้

$$\int_0^{\frac{\omega_D}{2T_c}} \ln(y)\operatorname{sech}^2(y)\,dy \approx -1.003+0.104\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)-0.015\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 \tag{3.14}$$

เมื่อ $1<\frac{\omega_D}{2T_c}<4$ แทนค่า (3.14) ลงใน (3.11) ในส่วนเทอมที่พิจารณาจะได้

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega_D} \ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)d\varepsilon &= 2T_c\ln\left(\frac{E_F}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\\ &+2T_c\left(1.003-0.104\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)+0.015\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

นำสมการที่ (3.15) แทนลงในสมการที่ (3.10) และคำนวณเพื่อหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\ln\left(\frac{E_F}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)+1.003-0.104\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)+0.015\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2}\right) \tag{3.16}$$

สมการที่ (3.16) เป็นสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

3.3 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว

จากการศึกษางานวิจัยของเบนเดลและคณะ (Bendele; et al. 2017: 4) แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียม (Crossover Temperature: T^*) โดยงานวิจัยดังกล่าวได้ศึกษาในส่วนของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีการเปลี่ยนแปลงมวลไอโซโทปออกซิเจน (oxygen isotope effect : OIE) ของสารกลุ่ม $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ดังตาราง

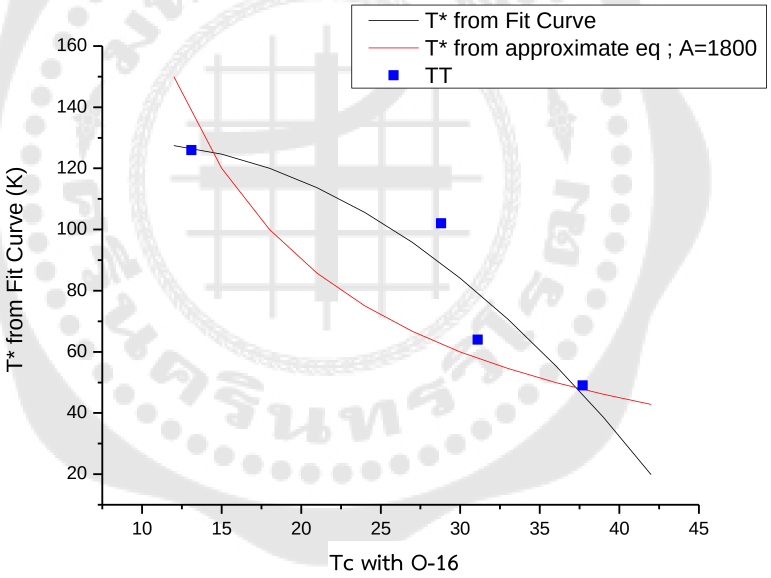
ตาราง 5 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของตัวนำยวดยิ่ง $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ โดยที่ O มีมวลไอโซโทปเป็น 16

T_c	T^*
13.1	126
28.8	102
31.1	64
37.7	49

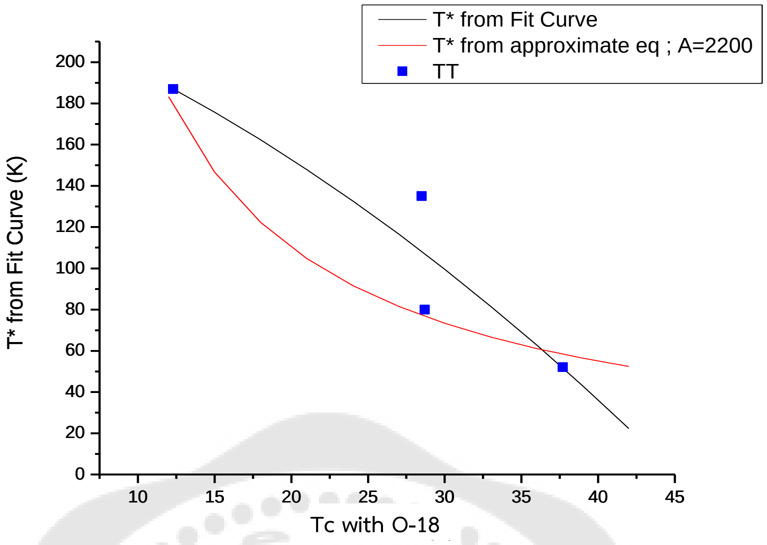
ตาราง 6 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของตัวนำยวดยิ่ง $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ โดยที่ O มีมวลไอโซโทปเป็น 18

T_c	T^*
12.3	187
28.5	135
28.7	80
37.7	52

จากตาราง 1 และ 2 แสดงให้เห็นว่าค่าอุณหภูมิวิกฤต (T_c) เพิ่มขึ้น อุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียม (T^*) จะลดลงโดยกำหนดให้ความสัมพันธ์ของทั้งสองเป็นแบบแปรผกผัน โดย A_1 เป็นค่าคงตัวที่มีผลจากการโดปของสารและจากความสัมพันธ์ใช้วิธีทางคณิตศาสตร์การประมาณเชิงตัวเลข Fit Curve ที่กำลัง 2 ได้ผลดังภาพประกอบ 13 และ 14



ภาพประกอบ 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของสาร $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ที่ ^{16}O



ภาพประกอบ 14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและอุณหภูมิช่องว่างพลังงานเทียมของสาร $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ที่ ^{18}O

3.3.1 **ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว**

ช่องว่างพลังงานเทียมเป็นช่องว่างพลังงานที่สามารถพบได้ในสถานะปกติของตัวนำยวดยิ่งเมื่ออุณหภูมิสูงกว่าที่อุณหภูมิวิกฤตหรือสามารถพบได้เมื่อตัวนำยวดยิ่งอยู่ในสภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต จันปุ่ม (Chanpoom. 2015: 1-9) ได้เสนอให้เติมเทอมของช่องว่างพลังงานเทียมตามสมการที่ (2.29) ใช้สมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสเพื่อให้สามารถอธิบายช่องว่างพลังงานเทียมได้ ที่ความหนาแน่นสถานะคงตัว และพิจารณาที่อุณหภูมิวิกฤตจะสามารถเขียนสมการช่องว่างพลังงานได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{T^*} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}} d\varepsilon + \int_{T^*}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon \qquad (3.17)$$

ในกรณีที่ $E_{pg} \gg T_c$ จะสามารถประมาณ $\tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x \geq 1$ จะเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{T^*} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + E_{pg}^2}} d\varepsilon + \int_{\frac{T^*}{2T_c}}^{\frac{\omega_D}{2T_c}} \frac{\tanh(y)}{y} dy \tag{3.18}$$

ทำการอินทิเกรตโดยเทอมที่สองจะใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \ln\left(\frac{1}{E_{pg}}\left(T^* + \sqrt{T^{*2} + E_{pg}^2}\right)\right) + \left\{\begin{array}{l} \ln\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) \\ -\ln\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right) - F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}, \frac{T^*}{2T_c}\right) \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

เมื่อ

$$F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}, \frac{T^*}{2T_c}\right) \equiv \int_{\frac{T^*}{2T_c}}^{\frac{\omega_D}{2T_c}} \ln(y)\,\mathrm{sech}^2(y)\,dy$$

ทำการจัดรูปสมการจะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = \frac{1}{2}\omega_D Exp\left\{-\coth\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\ln\left[E_{pg} Exp\left(\frac{1}{\lambda} + F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}, \frac{T^*}{2T_c}\right)\right)\left(\frac{\frac{T^{*\,\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}}{2T_c}}{\left(T^* + \sqrt{T^{*2} + E_{pg}^2}\right)}\right)\right]\right\} \tag{3.20}$$

สมการที่ (3.20) คือสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส มีความหนาแน่นสถานะคงตัวและมีช่องว่างพลังงานเทียม โดยอยู่ภายใต้เงื่อนไข $E_{pg} \gg T_c$

3.3.2 ศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส โดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว

พิจารณาสมการที่ (3.17) ซึ่งเป็นสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมที่ความหนาแน่นสถานะคงตัว หาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D ทั้งสมการ เมื่อกำหนดให้ $T^* = T^*(\omega_D)$ และ $T_c = T_c(\omega_D)$ จะสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{d\omega_D}\int_0^{T^*}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}d\varepsilon+\frac{d}{d\omega_D}\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon=0 \tag{3.21}$$

ใช้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (3.5) และทำการจัดรูปสมการจะได้เป็น

$$\left(\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}-\frac{\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}\right)\frac{dT^*}{d\omega_D}-\frac{1}{2T_c^2}\frac{dT_c}{d\omega_D}\left(I_1+2T_c\left(\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)-\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)\right)\right)+\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\omega_D}=0 \tag{3.22}$$

เมื่อ

$$I_1=\int_{T^*}^{\omega_D}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)d\varepsilon$$

สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปคำนวณได้จากสมการที่ (2.30) โดยแทนค่าความสัมพันธ์ระหว่าง T_c และ T^* ดังสมการ

$$T^*=\frac{A_1}{T_c} \tag{3.23}$$

ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (3.23) ได้จากการศึกษางานวิจัยของเบนเดเลและคณะ (Bendele ; et al. 2017: 1-5) ซึ่งเป็นการทดลองเกี่ยวกับการหาหลักฐานเพื่อสนับสนุนผลแลททิซอย่างเข้มโดยตัวนำยวดยิ่งแบบ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ นำความสัมพันธ์ดังกล่าวแทนลงในสมการที่ (3.22) และทำการจัดรูปจะได้

$$\left(-\frac{A_1}{T_c^{\,2}}\left(\frac{\tanh\left(\dfrac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}-\frac{\tanh\left(\dfrac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}\right)-\frac{I}{2T_c^{\,2}}-\frac{1}{T_c}\left(\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)-\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)\right)\right)\frac{dT_c}{d\omega_D}+\frac{1}{\omega_D}\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)=0$$

จากเงื่อนไขที่กำหนดในกรณีที่ $E_{pg} \gg T_c$ จะประมาณค่า $I_1 \cong 0$ และประมาณ $\tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x \geq 1$ ทำการจัดรูปโดยใช้สมการที่ (2.30) จะได้

$$\alpha_{CI} = \frac{\dfrac{1}{2}\tanh\left(\dfrac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\dfrac{A_1}{T_c}\left(\dfrac{1}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}-\dfrac{\tanh\left(\dfrac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}\right)+\tanh\left(\dfrac{\omega_D}{2T_c}\right)-\tanh\left(\dfrac{T^*}{2T_c}\right)} \tag{3.24}$$

สมการที่ (3.24) เป็นสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม ภายใต้เงื่อนไข $E_{pg} \gg T_c$ ซึ่งประมาณ $\tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x \geq 1$ และ T_c และ T^* มีความสัมพันธ์กันตามสมการที่ (3.23)

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาสมการที่ (3.22) เมื่อกำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่าง T_c และ T^* มีความสัมพันธ์เป็น

$$T^* = A_2T_c^2 + BT_c + C \tag{3.25}$$

จะได้สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่เป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอส โดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัวและ $E_{pg} \gg T_c$

$$\alpha_{CP}=\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{2T_c\left(\left(2A_2T_c+B\right)\left(\frac{\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}-\frac{1}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}\right)+\frac{1}{T_c}\left(\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)-\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)\right)\right)} \qquad (3.26)$$

3.4 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

3.4.1 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

จากสมการช่องว่างพลังงานเทียมตามทฤษฎีบีซีเอสเมื่อพิจารณาความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป $N(\varepsilon)=N_0\ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon-E_F}\right|$ โดยมีช่องว่างพลังงานเทียมจะสามารถเขียนสมการช่องว่างพลังงานใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{T^*}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon+\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon \qquad (3.27)$$

พิจารณาในกรณีที่ $E_{pg}\gg T_c$ จะสามารถใช้การประมาณ $\tanh(x)\cong 1$ เมื่อ $x\geq 1$ และใช้การประมาณฟังก์ชัน $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}$ ให้อยู่ในรูปของอนุกรมโดย

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}=\frac{1}{E_{pg}}-\frac{1}{2E_{pg}^3}\varepsilon^2+\frac{3}{8E_{pg}^5}\varepsilon^4-\frac{5}{16E_{pg}^7}\varepsilon^6+\ldots$$

จะประมาณฟังก์ชันถึงแค่อนุกรมลำดับที่ 2 ค่าจะใช้ได้ดียิ่ง E_{pg} มีค่ามาก แทนลงในสมการที่ (3.27) และทำการอินทิเกรตส่วนแรกของสมการจะได้

$$\int_0^{T^*}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon\approx\frac{T^*}{E_{pg}}\left(1-0.17\left(\frac{T^*}{E_{pg}}\right)^2\right)\ln\left(\frac{eE_F}{T^*}\right)+0.11\left(\frac{T^*}{E_{pg}}\right)^3 \quad (3.28)$$

พิจารณาในส่วนที่สองของสมการและทำการจัดรูปจะได้

$$\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon=\int_{\frac{T^*}{2T_c}}^{\frac{\omega_D}{2T_c}}\frac{\tanh(x)}{x}\ln\left(\frac{E_F}{2T_cx}\right)dx \quad (3.29)$$

เมื่อ $x=\frac{\varepsilon}{2T_c}$ เนื่องจากค่า T^* จะถูกกำหนดให้มีค่า $T_c<T^*<4T_c$ ดังนั้นเพื่อที่จะใช้การประมาณฟังก์ชัน $\tanh(x)$ ซึ่งจากการแทนค่า x ของฟังก์ชัน $\tanh(x)$ พบว่าที่ $x>4$ จะสามารถได้ค่าประมาณที่ดีกว่า $x>1$ ดังนั้นเทอมที่สองของสมการที่ (3.27) จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon=\int_{\frac{T^*}{2T_c}}^{\frac{\omega_D}{2T_c}}\frac{\tanh(x)}{x}\ln\left(\frac{E_F}{2T_cx}\right)dx \quad (3.30)$$

ทำการอินทิเกรตและจัดรูปสมการจะได้

$$\begin{aligned}\int_{\frac{T^*}{2T_c}}^{\frac{\omega_D}{2T_c}}\frac{\tanh(x)}{x}\ln\left(\frac{E_F}{2T_cx}\right)dx&=\ln\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\ln\left(\frac{E_F}{\sqrt{2T_c\omega_D}}\right)\\&-\ln\left(\frac{E_F{}^2}{T_cT^*}\right)\ln\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)\\&-\ln\left(\frac{E_F}{3.3T_c}\right)I_2\left(T_c,T^*\right)-0.96\end{aligned} \quad (3.31)$$

เมื่อ $I_2 = I_2\left(T_c, T^*\right) \equiv \int\limits_{\frac{T^*}{2T_c}}^{4} \operatorname{sech}^2\left(x\right)\ln\left(x\right)dx$ นำสมการที่ (3.29) และ (3.31) แทนลงในสมการที่ (3.27) ทำการจัดรูป จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = \frac{1}{2}E_F E\,\mathrm{xp}\left[\frac{1}{I_2\left(T_c,T^*\right)}\left(\begin{array}{l} -0.11\left(\dfrac{T^*}{E_{pg}}\right)^3 - \ln\left(\dfrac{\omega_D}{2T_c}\right)\ln\left(\dfrac{E_F}{\sqrt{2T_c\omega_D}}\right) \\ +\ln\left(\dfrac{E_F{}^2}{T_cT^*}\right)\ln\left(\dfrac{T^*}{2T_c}\right)\tanh\left(\dfrac{T^*}{2T_c}\right) + 0.96 \end{array}\right) - 0.511\right] \tag{3.32}$$

สมการที่ (3.32) คือสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีช่องว่างพลังงานเทียมโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

3.4.2 ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

พิจารณาสมการที่ (3.27) โดยหาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D ทั้งสมการ เมื่อกำหนดให้ $T^* = T^*\left(\omega_D\right)$ และ $T_c = T_c\left(\omega_D\right)$ จะได้

$$\frac{d}{d\omega_D}\int_0^{T^*} \frac{\tanh\left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon + \frac{d}{d\omega_D}\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\dfrac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon = 0 \tag{3.33}$$

ใช้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (3.5)

$$\begin{aligned} &\ln\left(\frac{E_F}{T^*}\right)\frac{\tanh\left(\dfrac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}\frac{dT^*}{d\omega_D} + \int_0^{T^*}\frac{d}{d\omega_D}\left(\frac{\tanh\left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\right)d\varepsilon + \\ &\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)\frac{\tanh\left(\dfrac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\omega_D} - \ln\left(\frac{E_F}{T^*}\right)\frac{\tanh\left(\dfrac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*} + \int_0^{T^*}\frac{d}{d\omega_D}\left(\frac{\tanh\left(\dfrac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\right)d\varepsilon = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

จัดรูปสมการจะได้

$$\left(\ln\left(\frac{E_F}{T^*}\right)\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}-\ln\left(\frac{E_F}{T^*}\right)\frac{\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}\right)\frac{dT^*}{d\omega_D}$$

$$-\frac{1}{2T_c^2}\frac{dT_c}{d\omega_D}\left(I_3+I_4\right)+\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\omega_D}=0 \tag{3.35}$$

โดย

$$I_3\equiv\int_0^{T^*}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)d\varepsilon$$

$$I_4\equiv\int_{T^*}^{\omega_D}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)d\varepsilon$$

จากความสัมพันธ์ระหว่าง T_c และ T^* ตามสมการที่ (3.23) แทนลงในสมการที่ (3.35) และจัดรูปโดยใช้สมการที่ (2.30) จะได้สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็น

$$\alpha_{VI}=\frac{\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{2T_c\left(\left(\frac{A_1}{T_c^2}\right)\ln\left(\frac{E_F}{T^*}\right)\left(\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}-\frac{\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}\right)+\frac{1}{2T_c}\left(I_3+I_4\right)\right)} \tag{3.36}$$

และจากความสัมพันธ์ระหว่าง T_c และ T^* ตามสมการที่ (3.29) แทนลงในสมการที่ (3.39) และจัดรูปโดยใช้สมการที่ (2.30) จะได้สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็น

$$\alpha_{VP}=\frac{\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{2T_c\left(\left(2A_2T_c+B\right)\ln\left(\frac{E_F}{T^*}\right)\left(\frac{\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}-\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}\right)+\frac{1}{2T_c}\left(I_3+I_4\right)\right)} \tag{3.37}$$

สมการที่ (3.36) และสมการที่ (3.37) คือ สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตามสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีโดย เมื่อ T_c และ T^* มีความสัมพันธ์กันตามสมการที่ (3.24) และ (3.25)

บทที่ 4
ผลการดำเนินงานวิจัย

จากสมการคำนวณในบทที่ 3 ซึ่งได้จากการคำนวณโดยใช้การคำนวณโดยตรง การประมาณค่า และการใช้ร่วมกันระหว่างทั้งสองแบบ โดยผลการคำนวณมีดังนี้

4.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส

4.1.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส

จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสสมการที่ (3.1)

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon$$

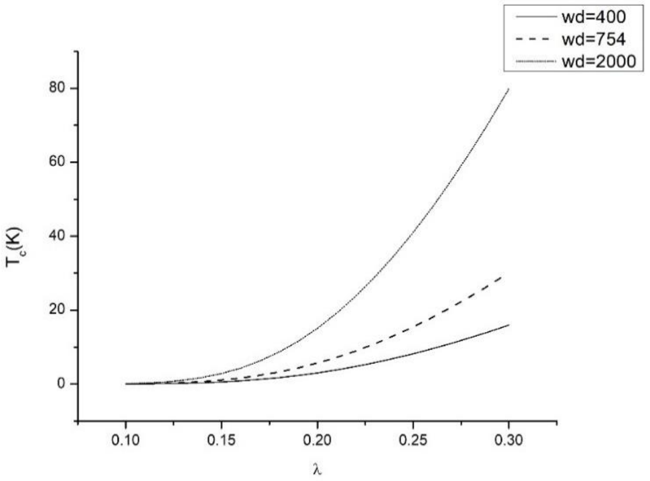
โดยพิจารณาในกรณีที่ $\omega_D \gg T_c$ จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตตามทฤษฎีบีซีเอสเป็น (Bardeen;Cooper;&Schrieffer. 1957: 1186)

$$T_c = 1.14\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

และเมื่อใช้การประมาณ $\tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x > 1$ จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = 1.12\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบ (Coupling Constant : λ) กับอุณหภูมิวิกฤตที่กำหนดให้ ω_D มีค่า 400 , 754 และ 2000 เคลวิน ซึ่งกำหนดค่าตามตาราง 1 ของตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม La-Sr-Cu-O และ Y-Ba-Cu-O ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 40 และ 90 เคลวิน ตามลำดับ



ภาพประกอบ 15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

4.1.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส

จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสสมการที่ (3.1) โดยใช้สมการที่ (3.9) และสมการความสัมพันธ์ตามสมการที่ (2.30) เมื่อกำหนดให้ $T_c = T_c\left(\omega_D\right)$ จะได้สัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็น

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

4.2 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

4.2.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

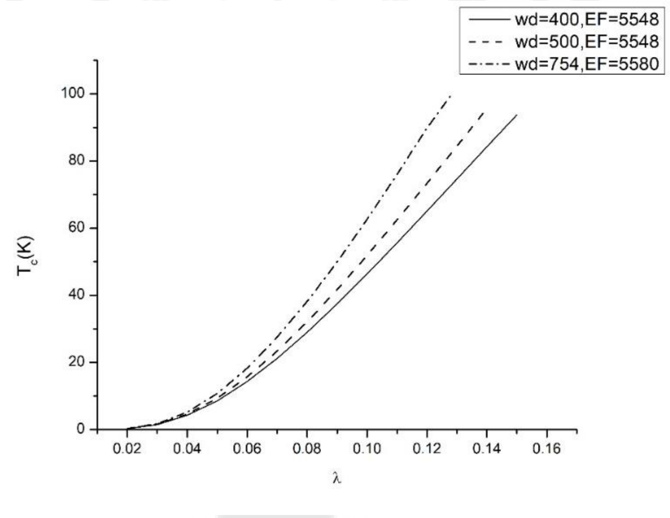
จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสเมื่อกำหนดให้ค่าความหนาแน่นสถานะ (Density of State : DOS) เป็นแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี van Hove singularity : vHs) ดังสมการ

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\omega_D} \ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right) \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon$$

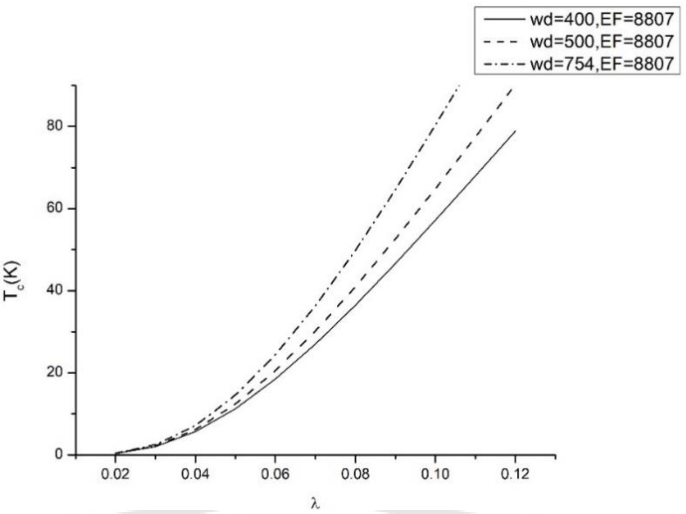
ประมาณฟังก์ชัน $\tanh(x) \cong 1$ เมื่อ $x > 1$ และ $\tanh(x) \cong x$ เมื่อ $x < 1$ คำนวณค่าสมการอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้จากการประมาณเป็นไปตามสมการที่ (3.13)

$$T_c = 1.36 E_F E\,\mathrm{xp}\left\{ \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) + \ln\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right) - \frac{1}{\lambda} \right\}$$

กำหนดค่าต่าง ๆ ตามตาราง 1 ของตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม La-Sr-Cu-O และ Y-Ba-Cu-O ที่มีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 40 และ 90 เคลวิน ตามลำดับ



ภาพประกอบ 16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาริตีของตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม La-Sr-Cu-O



ภาพประกอบ 17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีของตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม Y-Ba-Cu-O

สมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี ตามสมการที่ (3.9) โดยผลการคำนวณของเกติโนและคณะ และผลคำนวณที่ได้จากวิธีการเชิงตัวเลข โดยได้ผลตามตาราง 7

ตาราง 7 ตารางเปรียบเทียบอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้และสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากงานวิจัยของเกติโนและคณะ

กลุ่มของสารประกอบ	T_c (K)	ω_D (K)	E_F (K)	λ จาก สมการ ที่ (3.7)	T_c จาก สมการ ที่ (2.16)	T_c จาก สมการ ที่ (3.9)
La-Sr-Cu-O	40	400	5548	0.100	39.942	46.407
		500	5548	0.095	40.228	46.733
		754	5580	0.087	39.863	46.313
Y-Ba-Cu-O	90	300	8807	0.164	86.592	102.990
		400	8807	0.143	88.365	103.760
		754	8807	0.115	90.554	105.002

4.2.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสเมื่อกำหนดให้มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีตามสมการที่ (3.11) โดยใช้สมการความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega_D}{T_c}\frac{dT_c}{d\omega_D}$$

โดยกำหนดให้ $T_c = T_c\left(\omega_D\right)$ และทำการคำนวณเพื่อหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปโดยใช้สมการที่ (3.9) ซึ่งในกรณีที่ $\frac{\omega_D}{2T_c} \to \infty$ จะได้สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็น

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)}{\ln\left(\frac{E_F}{2T_c}\right)-1.78}\right]$$

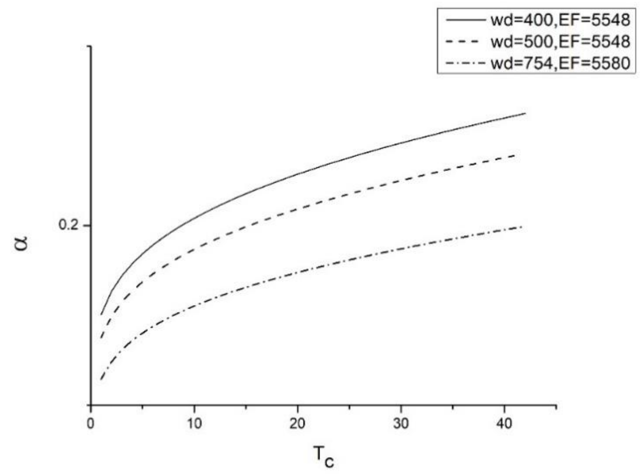
ในกรณีที่ใช้การประมาณเชิงตัวเลข เมื่อ $1 < \frac{\omega_D}{2T_c} < 4$ จะได้การประมาณตามสมการ

$$\int_0^{\frac{\omega_D}{2T_c}} \ln\left(y\right)\operatorname{sech}^2\left(y\right)dy \approx -1.003 + 0.104\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) - 0.015\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2$$

สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี ภายใต้เงื่อนไข $1 < \frac{\omega_D}{2T_c} < 4$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\ln\left(\frac{E_F}{2T_c}\right)\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) + 1.003 - 0.104\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) + 0.015\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2}\right]$$

ใช้ข้อมูลตามตาราง 1 ผลที่ได้แสดงดังภาพประกอบ 18 และ 19



ภาพประกอบ 18 กราฟแสดงความสัมพันธ์อุณหภูมิวิกฤตกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีของตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม La-Sr-Cu-O

4.3 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว

4.3.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมที่มีความหนาแน่นสถานะคงตัว

จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานตัวนำยวดยิ่งและช่องว่างพลังงานเทียมตามสมการที่ (2.25) สมการช่องว่างพลังงานจะสามารถเขียนได้ตามสมการที่ (3.21)

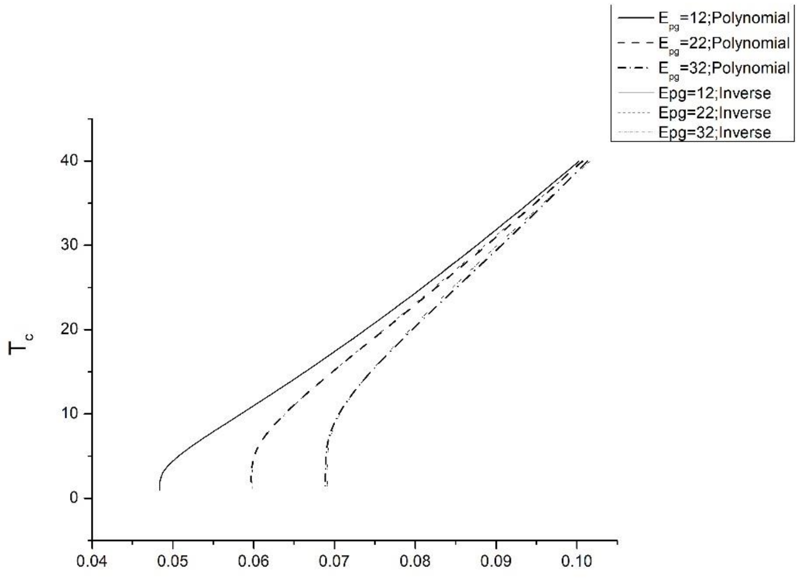
$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^{T^*}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}d\varepsilon+\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon$$

คำนวณเพื่อหาสมการอุณหภูมิวิกฤตโดยพิจารณาในกรณีที่ $E_{pg} \gg T_c$ จะได้

$$T_c = \frac{1}{2}\omega_D Exp\left\{-\coth\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\ln\left[E_{pg} Exp\left(\frac{1}{\lambda} + I_1\left(\frac{\omega_D}{2T_c}, \frac{T^*}{2T_c}\right)\right)\left(\frac{\frac{T^{*\,\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}}{2T_c}}{\left(T^* + \sqrt{T^{*2} + E_{pg}^2}\right)}\right)\right]\right\}$$

เมื่อ $I_1\left(\frac{\omega_D}{2T_c}, \frac{T^*}{2T_c}\right) \equiv \int_{\frac{T^*}{2T_c}}^{\frac{\omega_D}{2T_c}} \ln(y)\operatorname{sech}^2(y)\,dy$

ใช้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (3.27) แทนลงในสมการที่ (3.26) เพื่อคำนวณค่าความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและค่าคงตัวคู่ควบ (Coupling Constant) และกำหนดค่าตัวแปรโดย A_1=1800 ในกรณีที่มีความสัมพันธ์แบบแปรผกผัน $T^* = \frac{A_1}{T_c}$ และ A_2 = -0.098 , B = 1.715 และ C = 120.987 ในกรณีที่มีความสัมพันธ์แบบโพลิโนเมียล $T^* = A_2T_c^2 + BT_c + C$ ได้ผลดังนี้



ภาพประกอบ 19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและความหนาแน่นสถานะคงตัว

4.3.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัว

จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะคงตัวตามสมการที่ 3.21 โดยกำหนดให้ $T^* = T^*(\omega_D)$ และ $T_c = T_c(\omega_D)$ จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{d}{d\omega_D}\int_0^{T^*}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_0^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_0^2}}d\varepsilon+\frac{d}{d\omega_D}\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon=0$$

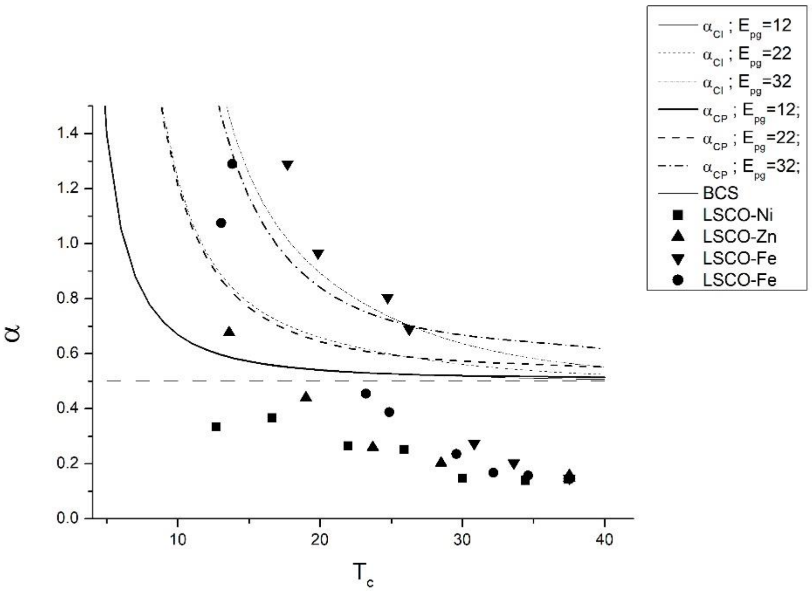
ในกรณีที่มีความสัมพันธ์แบบโพลิโนเมียลกำลังสองที่ได้จากการทดลองตัวนำยวดยิ่งกลุ่ม La-Sr-Cu-O ได้สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็น

$$\alpha_{CP}=\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{2T_c\left((2A_1T_c+B)\left(\frac{1}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}-\frac{\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}\right)+\frac{1}{T_c}\left(\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)-\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)\right)\right)}$$

และในกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่าง T^* และ T_c มีความสัมพันธ์แบบแปรผกผัน จะได้สมการสัมประสิทธิ์ไอโทป

$$\alpha_{CI}=\frac{\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\frac{A_2}{T_c}\left(\frac{1}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}-\frac{\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}{T^*}\right)+\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)-\tanh\left(\frac{T^*}{2T_c}\right)}$$

ภาพประกอบ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเทียบกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 20 กราฟแสดงความสัมพันธ์อุณหภูมิวิกฤตกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและมีช่องว่างพลังงานเทียมเทียบกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส

4.4 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

4.4.1 ผลการศึกษาอุณหภูมิวิกฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

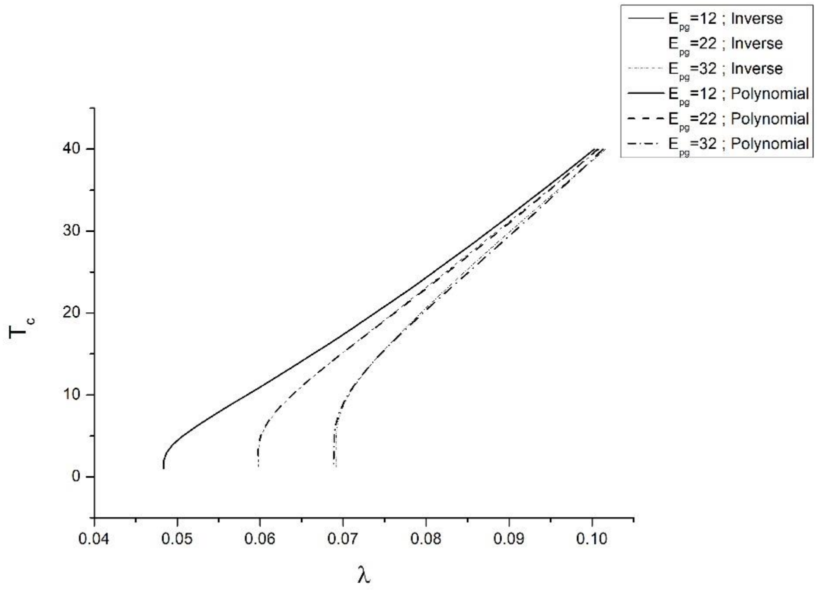
จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสเมื่อพิจารณาความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี สมการที่ (2.12) และใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมตามสมการที่ (2.25) จะได้สมการช่องว่างพลังงานใหม่เป็น

$$\frac{1}{\lambda}=\int_{0}^{T^*}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon+\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon$$

พิจารณาในกรณีที่ $E_{pg} \gg T_c$ จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตที่เกิดจากการประมาณโดยใช้การประมาณเชิงตัวเลขร่วมกับการคำนวณโดยการอินทริเกรต กำหนดให้ $T_c < T^* < 4T_c$ จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = \frac{1}{2} E_F Exp\left(\frac{1}{I\left(T_c, T^*\right)} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\lambda} - \frac{T^*}{E_{pg}} \left(1 - 0.17 \left(\frac{T^*}{E_{pg}} \right)^2 \right) \ln \left(\frac{eE_F}{T^*} \right) - 0.11 \left(\frac{T^*}{E_{pg}} \right)^3 \\ -\ln \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) \ln \left(\frac{E_F}{\sqrt{2T_c \omega_D}} \right) \\ +\ln \left(\frac{E_F{}^2}{T_c T^*} \right) \ln \left(\frac{T^*}{2T_c} \right) \tanh \left(\frac{T^*}{2T_c} \right) + 0.96 \end{array} \right) - 0.511 \right)$$

ใช้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (3.27) แทนลงในสมการ เพื่อคำนวณค่าอุณหภูมิวิกฤต โดยความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตและค่าคงตัวคู่ควบ (Coupling Constant)



ภาพประกอบ 21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิฤตด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีและมีช่องว่างพลังงานเทียม

4.4.2 ผลการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี

พิจารณาสมการที่ (3.29) ซึ่งเป็นสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม เมื่อมีความหนาแน่นสถานะคงตัวซึ่งเขียนได้

$$\frac{1}{\lambda}=\int_{0}^{T^*}\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2+E_{pg}^2}}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon+\int_{T^*}^{\omega_D}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}\ln\left(\frac{E_F}{\varepsilon}\right)d\varepsilon$$

โดยหาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D ทั้งสมการ เมื่อกำหนดให้ $T^*=T^*(\omega_D)$ และ $T_c=T_c(\omega_D)$ และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปหาได้จากสมการที่ (2.31) เมื่อ $E_{pg}\gg T$ ความสัมพันธ์ระหว่าง T^* และ T_c ในกรณีที่มีความสัมพันธ์แบบแปรผกผัน

$$\alpha_{VI}=\frac{\ln\left[\frac{E_F}{\omega_D}\right]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]}{2T_c\left((-\frac{A}{T_c^2})\ln\left[\frac{E_F}{T^*}\right]\left(\frac{\tanh\left[\frac{T^*}{2T_c}\right]}{T^*}-\frac{\tanh\left[\frac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right]}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}\right)+\frac{I_2+I_3}{2T_c^2}\right)}$$

และในกรณีที่มีความสัมพันธ์แบบโพลิโนเมียลกำลังสอง

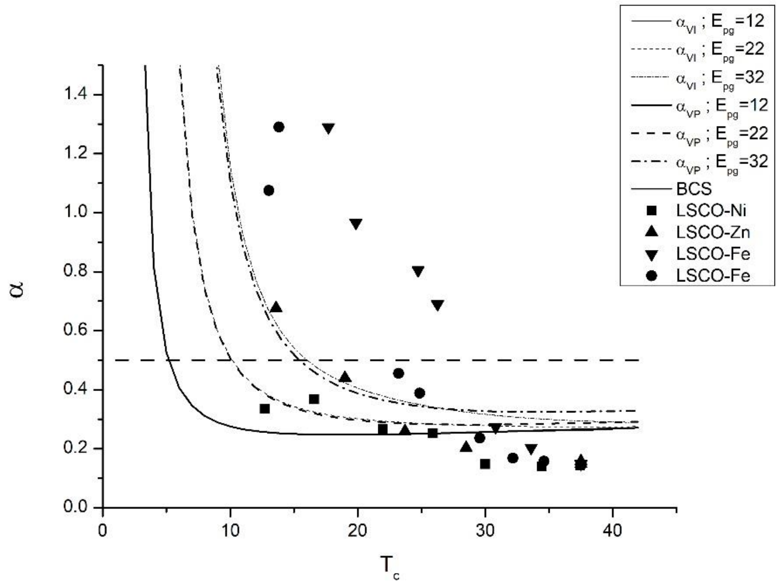
$$\alpha_{VP}=\frac{\ln\left[\frac{E_F}{\omega_D}\right]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]}{2T_c\left((2A_2T_c+B)\ln\left[\frac{E_F}{T^*}\right]\left(\frac{\tanh\left[\frac{T^*}{2T_c}\right]}{T^*}-\frac{\tanh\left[\frac{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}{2T_c}\right]}{\sqrt{T^{*2}+E_{pg}^2}}\right)+\frac{I_2+I_3}{2T_c^2}\right)}$$

เมื่อ

$$I_2 = \int_0^{T^*} \ln\left[\frac{E_F}{\varepsilon}\right] Sech^2\left[\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + E_g^2}}{2T_c}\right] d\varepsilon$$

$$I_3 = \int_{T^*}^{\omega_D} Sech^2\left[\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + E_g^2}}{2T_c}\right] d\varepsilon$$

ใช้ข้อมูลตามตารางที่ 1 ในการกำหนดค่าตัวแปรเพื่อคำนวณสัมประสิทธิ์ไอโซโทป โดยใช้ความสัมพันธ์ทั้งสองแบบได้ผลดังนี้



ภาพประกอบ 22 กราฟแสดงความสัมพันธ์อุณหภูมิวิกฤตกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปด้วยสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีและมีช่องว่างพลังงานเทียมเทียบกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส

บทที่ 5
สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ

การวิจัยในหัวข้ออิทธิพลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี มีจุดมุ่งหมายคือเพื่อคำนวณสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีและมีช่องว่างพลังงานเทียม และเพื่อศึกษาผลของช่องว่างพลังงานเทียมที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป โดยสมการที่คำนวณได้แสดงไว้ในบทที่ 3 และผลการคำนวณแสดงไว้ในบทที่ 4

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากผลการคำนวณสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียมและมีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตี กำหนดให้ $E_g \gg T_c$ พบว่าค่าคงตัวคู่ควบและอุณหภูมิวิกฤตมีแนวโน้มที่สอดคล้องกันคือเมื่อค่าคงตัวคู่ควบเพิ่มขึ้นค่าอุณหภูมิวิกฤตจะเพิ่มขึ้นด้วย โดยการกำหนดให้ค่าความถี่เดอบายมีค่า 400 เคลวิน และค่าช่องว่างพลังงานเทียมเป็น 12, 22 และ 32 เคลวิน จะได้ค่าคงตัวคู่ควบมีค่าอยู่ระหว่าง 0.048-0.100

ผลการคำนวณสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะได้สองสมการคือ สมการที่ได้จากการแทนความสัมพันธ์ระหว่าง T^* และ T_c เป็นแบบแปรผกผัน และแบบโพลิโนเมียลกำลังสอง โดยกำหนดให้ค่า E_F มีค่า 5548 เคลวิน ค่าความถี่เดอร์บายเป็น 400 เคลวิน และค่าช่องว่างพลังงานเทียมเป็น 12 , 22 และ 32 เคลวิน จะพบว่าในช่วงที่อุณหภูมิวิกฤตต่ำ ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วโดยมีค่าต่ำกว่า 0.5 ซึ่งเป็นค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีบีซีเอส และเมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้กับการทดลอง ค่าที่ได้มีความสอดคล้องกัน และในช่วงของค่าช่องว่างพลังงานเทียมที่มากจะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกลับไม่สอดคล้องกับผลการทดลอง

5.2 อภิปรายผลการวิจัย

ค่าคงตัวคู่ควบเป็นค่าคงตัวที่แสดงถึงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองตัวที่จับกันเป็นคู่คูเปอร์ เกิดจากพลังงานศักย์ของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน (Mourachkine. 2004: 146-147) ดังนั้นจึงส่งผลต่ออุณหภูมิวิกฤต สอดคล้องกับผลการวิจัยที่เกิดขึ้นคือเมื่อค่าคงตัวคู่ควบมีค่ามากขึ้น ค่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย และเมื่อพิจารณาผลของช่องว่าง

พลังงานเทียม จากแบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม (Chanpoom. 2015: 1) ภาวะการแข่งกันระหว่างช่องว่างพลังงานในสถานะตัวนำยวดยิ่งและช่องว่างพลังงานเทียมซึ่งส่งผลต่อค่าช่องว่างพลังงานรวม ดังนั้นค่าช่องว่างพลังงานเทียมที่เพิ่มขึ้นจึงส่งผลต่อค่าอุณหภูมิวิกฤต นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบค่าคงตัวคู่ควบที่คำนวณได้เทียบกับงานวิจัยของเกติโนและคณะ (Getino;de Llano;&Rubio. 1993) จะพบว่ามีค่าใกล้เคียงกันคือ 0.100 ที่อุณหภูมิวิกฤตเป็น 40 เคลวิน

เมื่อพิจารณาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลการทดลองของบาบูชคินาและคณะ (Babushkina; et al. 1996) พบว่ามีความสอดคล้องกัน โดยผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าเมื่อเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ไอโซโทประหว่างตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีอุณหภูมิวิกฤตแตกต่างกัน ที่อุณหภูมิวิกฤตมากกว่าจะมีแนวโน้มของสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ต่ำลง โดยค่าอยู่ระหว่าง 0.1-1.3 ใช้ตัวนำยวดยิ่งในกลุ่ม La-Sr-Cu-O นอกจากนี้ในสารที่มีการโดปแตกต่างกันเมื่อมีการโดปเพิ่มขึ้นส่งผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและพบช่องว่างพลังงานเทียมในช่วงดังกล่าวจนถึงการโดปที่เหมาะสม ดังนั้นช่องว่างพลังงานเทียมจึงส่งผลต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

5.3 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากการคำนวณสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็นการคำนวณโดยใช้สมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยใช้ความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปซิงกูลาร์ริตีและใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานเทียม ดังนั้นการคำนวณจึงเป็นตัวนำยวดยิ่งแบบ s-wave แต่สำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในกลุ่ม La-Sr-Cu-O เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบ D-wave ผู้วิจัยจึงเสนอให้มีการคำนวณโดยใช้เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบ D-wave ในการคำนวณ

บรรณานุกรม

Abd-Shukor, R. (2007). *Electron–Phonon Coupling Constant of Cuprate Based High Temperature Superconductors*. *Solid State Communications*. 142(10): 587-590.

Babushkina, N.; et al. (1996). *Anomalous Isotope Effect in High-Temperature Superconductor Lsco with 3d Impurities*.

Bandyopadhyay, B.; & Poddar, A. (2001). Pseudogap in High-Tc Cuprates. *Journal of Alloys and Compounds*. 326(1): 137-142.

Bardeen, J.; Cooper, L. N.; & Schrieffer, J. R. (1957). Theory of Superconductivity. *Physical Review*. 108(5): 1175-1204.

Bendele, M.; et al. (2017). Evidence for Strong Lattice Effects as Revealed from Huge Unconventional Oxygen Isotope Effects on the Pseudogap Temperature in ${\Mathrm{La}}_{2\Ensuremath{-}X}{\Mathrm{Sr}}_{X}{\Mathrm{Cuo}}_{4}$. *Physical Review B*. 95(1): 014514.

Bok, Julien; & Bouvier, Jacqueline. (2007). Van Hove Scenario for High Tc Superconductors. *Physica C: Superconductivity*. 460-462: 1010-1012.

Buckel, Werner. (1991). *Superconductivity Fundamental and Application*. 2 ed. Newyork: VCH Publishes.

C. Tsuei, C.; et al. (1991). *Anomalous Isotope Effect and Van Hove Singularity in Superconducting Cu Oxides*.

Chanpoom, Thaipanya. (2015). *Effect of Pseudogap on the Specific Heat of Superconductor*.

Crawford, M. K.; et al. (1990). Oxygen Isotope Effect and Structural Phase Transitions in La≪Sub≫2≪/Sub≫Cuo≪Sub≫4≪/Sub≫-Based Superconductors. *Science*. 250(4986): 1390.

Fetter, A.L; & Walecka, J. D. (1971). *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. San Francisco: McGraw-Hill.

Froehlich, H. (1950). Theory of the Superconducting State. I. The Ground State at the Absolute Zero of Temperature. *Phys Rev*. 79: 845-856.

Getino, J. M; de Llano, M; & Rubio, H. (1993). Properties of the Gap Energy in the Van Hove Scenario of High-Temperature Superconductivity. *Physical Review B*. 48: 597-599.

GRADSHTEYN, S I; & RYZHIK, M I. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. 4th ed. San Francisco: Academic Press.

Kishore, R. (1995). Isotope Coefficient: Some Inequalities and the Effect of Mass Dependence of Carrier Concentration within the Van Hove Scenario in High-Tc Superconductors. *Physica C: Superconductivity*. 253(3): 367-372.

Kittel, C. (2005). *Introduction to Solid State Physics*. 8 ed. Hoboken: John Wiley & Sons.

Mahan, G.D. (2000). *Many Particle Physics*. 3 ed. New York: Kluwer Academic/Plenum.

Mourachkine, A. (2004). *Room-Temperature Superconductivity*. Cambridge: Cambridge International Science.

Q. Huang, X. (2018). Does the Isotope Effect of Mercury Support the Bcs Theory?

Ratanaburi, S.; Udomsamuthirun, P.; & Yoksan, S. (1996). Ratio 2δ0/Ktc in a Van Hove Superconductor. *Journal of Superconductivity*. 9(5): 485-486.

Schneider, T.; & Singer, J. M. (2000). *Phase Transition Approach to High Temperature Superconductivity*. (doi:10.1142/p206). PUBLISHED BY IMPERIAL COLLEGE PRESS AND DISTRIBUTED BY WORLD SCIENTIFIC PUBLISHING CO. Retrieved 2019/01/20

Tsuei, C. C.; & Doderer, T. (1999). Charge Confinement Effect in Cuprate Superconductors: An Explanation for the Normal-State Resistivity and Pseudogap. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*. 10(2): 257-262.

Udomsamuthirun, P. (2001). Effect of Pseudogap on the Isotope Exponent of High-Tc Superconductors. *physica status solidi (b)*. 226(2): 315-321. Retrieved 2019/01/20

Wikipedia. (2018). *Van Hove Singularity.* Retrieved December, 10 18, from https://en.wikipedia.org/wiki/Van_Hove_singularity

-------. (2019). *Bcs Theory.* Retrieved March, 17, from https://en.wikipedia.org/wiki/BCS_theory

Wu, M. K.; et al. (1987). Superconductivity at 93 K in a New Mixed-Phase Y-Ba-Cu-O Compound System at Ambient Pressure. *Physical Review Letters*. 58(9): 908-910.

Zettili, N. (2009). *Quantum Mechanics Concepts and Applications*. 2 ed. United Kingdom: John Wiley & Sons.

เกศริน, มีมล. (2551). อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ. ปริญญานิพนธ์ (วท.ม. (ฟิสิกส์)) -- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2551.

พงษ์แก้ว, อุดมสมุทรหิรัญ. (2555). ทฤษฎีตัวนำยวดยิ่ง. 2 ed. กรุงเทพฯ: วัน โอ ไฟว์ ดิจิตอลพริ้นติ้ง.

-------. (2559). ตัวนำยวดยิ่งพื้นฐาน. พิมพ์ครั้งที่ 1.. ed.: กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายปราชญ์กิตติ หมายเจริญ
วัน เดือน ปี เกิด	12 สิงหาคม 2533
สถานที่เกิด	จังหวัดอ่างทอง
วุฒิการศึกษา	พ.ศ.2551 มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนสาธิตจุฬาฯ (ฝ่ายมัธยม) พ.ศ.2556 กศ.บ. (วิทยาศาสตร์-ฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พ.ศ.2562 วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วทม.
ที่อยู่ปัจจุบัน	11/88 ลาดปลาเค้า 38 แขวงจรเข้บัว เขตลาดพร้าว จ.กรุงเทพฯ 10230