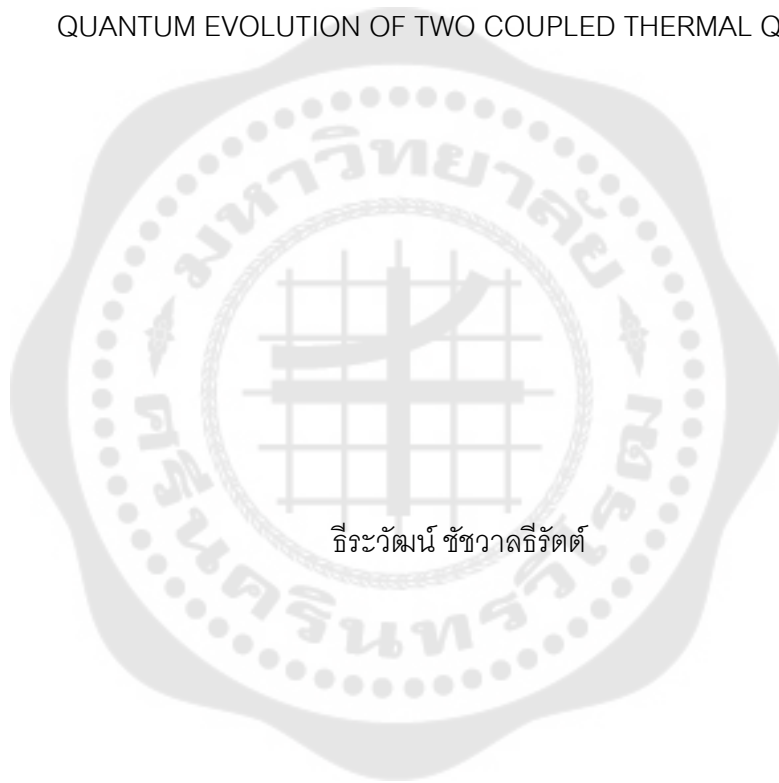




การวิวัฒนาการเชิงควอนตัมของคู่คิวบิตเชิงความร้อน
QUANTUM EVOLUTION OF TWO COUPLED THERMAL QUBITS



ธีระวัฒน์ ชัชวาลธีรัตต์

บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การวิวัฒน์เชิงควอนตัมของคู่ควิบิตเชิงความร้อน



ธีระวัฒน์ ชัชวาลธีรัตต์

ปริญญาานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปีการศึกษา 2561

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

QUANTUM EVOLUTION OF TWO COUPLED THERMAL QUBITS



THEERAWAT CHATCHAWALTHEERAT

A Dissertation Submitted in partial Fulfillment of Requirements
for DOCTOR OF PHILOSOPHY (Physics)
Faculty of Science Srinakharinwirot University

2018

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญาานิพนธ์

เรื่อง

การวิวัฒน์เชิงควอนตัมของคู่ควิบิตเชิงความร่อน

ของ

ธีระวัฒน์ ชัชวาลธีรัตต์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญาานิพนธ์

ที่ปรึกษาหลัก

ประธาน

(อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ แชนมณี)

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุทธิ บุญช่วย)

ที่ปรึกษาร่วม

กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.จูเลียน พอลเตอร์)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

ชื่อเรื่อง	การวิวัฒนาการเชิงควอนตัมของคูควิตเชิงความร้อน
ผู้วิจัย	ธีระวัฒน์ ชัชวาลธีรัตต์
ปริญญา	ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. สุพิชญ์ แคมมณี

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาขีดจำกัดเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม (quantum speed limit time) ภายใต้การประมาณบอร์น-มาร์คอฟ (Born-Markov approximation) ของการวิวัฒนาการก่อนเข้าสู่สมดุลความร้อนของระบบหนึ่งควิตและระบบคู่ควิต โดยสำหรับระบบคู่ควิตนั้นควิตแต่ละตัวซึ่งมีอันตรกิริยาต่อกันจะสัมพันธ์กับอ่างความร้อนที่อุณหภูมิเดียวกัน ในระบบหนึ่งควิต พบว่ากระบวนการวิวัฒนาการจะประกอบด้วยลักษณะที่มีและไม่มียอดวกกลับ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของยอดวกกลับซึ่งมีเพียงยอดเดียวในรูปของสถานะเริ่มต้น ส่วนในระบบคู่ควิตกระบวนการวิวัฒนาการสำหรับสถานะเริ่มต้นเฉพาะสถานะเริ่มต้นเฉพาะสถานะหนึ่งจะเกิดการเพิ่มอัตราเร็วและลดอัตราเร็วสองครั้งก่อนเข้าสู่สมดุลความร้อน พฤติกรรมนี้ เรียกว่า พฤติกรรมยอดวกกลับคู่ (double cusp behavior) ซึ่งถือเป็นพฤติกรรมแปลกประหลาดในกระบวนการวิวัฒนาการสำหรับการควบคุมแบบอ่อนในระบบบอร์น-มาร์คอฟ (Markovian regime) สำหรับสถานะเริ่มต้นบริสุทธิ์ที่เป็นสถานะไอเกนของพลังงาน ได้ทำการศึกษาแบ่งแยกประเภทของกระบวนการวิวัฒนาการพร้อมทั้งได้นำเสนอแผนภาพแสดงเงื่อนไข สำหรับพฤติกรรมยอดวกกลับคู่ในเทอมของอุณหภูมิ อันตรกิริยา และ ความถี่ของควิต

คำสำคัญ : ขีดจำกัดเวลาของอัตราเร็ว, การประมาณ บอร์น-มาร์คอฟ, กระบวนการเพิ่มอัตราเร็วและกระบวนการลดอัตราเร็ว, ควิตเชิงความร้อน, พฤติกรรมยอดวกกลับคู่, ระบบบอร์น-มาร์คอฟ

Title	QUANTUM EVOLUTION OF TWO COUPLED THERMAL QUBITS
Author	THEERAWAT CHATCHAWALTHEERAT
Degree	DOCTOR OF PHILOSOPHY
Academic Year	2018
Thesis Advisor	Dr. Supitch Khemmani

The quantum speed limit time (QSLT) of quantum evolution was investigated before thermal equilibrium for a system of one qubit and as well as a system of two coupled qubits, each of which was coupled to a separate thermal bath at the same temperature and within the Born-Markov approximation. For the system of one qubit, evolution may contain a single cusp according to necessary and sufficient condition for its existence in terms of the initial state. For two coupled qubits, the process of evolution for one particular initial state can change between speeding up and speeding down two times before reaching equilibrium, which is known as double cusp behaviour. This behavior is an anomalous phenomenon in evolution processes in the weak-coupling Markovian regime. QSLT was analyzed for all pure initial energy eigenstates and they were categorized. In addition, the conditions for double cusp behavior were also displayed in terms of temperature, qubit interaction and frequency.

Keyword : Quantum speed limit time (QSLT), Born-Markov approximation, Quantum speed up and speed down processes, Thermal qubits, Double cusp behavior, Markovian regime

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญาานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือและความเอาใจใส่ตลอดจนการให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งสำหรับการปรับแก้ไขข้อบกพร่องจากคณะกรรมการผู้ควบคุมปริญญาานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร. สุพิชญ์ เขมมณี อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก และ ศาสตราจารย์ จูเลียน พอลเตอร์ อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่ได้เสียสละเวลาอันมีค่าและกรุณาถ่ายทอดความรู้และให้คำปรึกษาต่างๆ ทั้งดูแลเอาใจใส่เป็นอย่างดีมาโดยตลอด

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านในภาควิชาฟิสิกส์ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ให้คำชี้แนะตลอดระยะเวลาที่ข้าพเจ้าได้เข้ามาศึกษาที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ขอขอบคุณ เจ้าหน้าที่ พี่ๆ น้องๆ สาขาวิชาฟิสิกส์รวมถึงบุคคลอีกหลายท่านที่ไม่ได้กล่าวนามไว้ ณ ที่นี้ที่ได้ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจมาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ที่ให้ความดูแลและห่วงใยลูกเสมอมา รวมถึงเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ทุกคนที่คอยเป็นกำลังใจมาโดยตลอด

ธีระวัฒน์ ชัชวาลธีรัตต์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญรูปภาพ	ฌ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของงานวิจัย.....	2
ความสำคัญของการวิจัย	2
ขอบเขตของการวิจัย	3
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	3
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
1. ตัวดำเนินการความหนาแน่นในกลศาสตร์ควอนตัม	4
1.1. สมบัติของตัวดำเนินการความหนาแน่น	5
1.2. ผลคูณเทนเซอร์.....	5
2. สถานะเชิงความร้อนของคูควิบิต.....	7
3. สมการมาสเตอร์เชิงควอนตัมแบบมาร์คอฟ.....	8
4. ความบริสุทธิ์สัมพัทธ์และลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม	17
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	20
1. ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมของระบบหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน	20

2. ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมของระบบสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละคิวบิต สัมพันธ์กับอ่างความร้อน.....	21
3. กระบวนการวิวัฒนาการแบบต่อเนื่องและบทนิยามที่เกี่ยวข้อง.....	23
บทที่ 4 ผลการดำเนินงานวิจัย.....	25
1. การวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการของระบบหนึ่งคิวบิตที่สัมพันธ์กับอ่างความร้อน	25
2. การพิสูจน์การมีอยู่ของยอดวงกลับของระบบหนึ่งคิวบิตที่สัมพันธ์กับอ่างความร้อน	28
3. การวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการของระบบสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละ คิวบิต สัมพันธ์กับอ่างความร้อน.....	29
3.1. กรณีที่ 1 ($\rho_{44}(0) = 1$).....	29
3.2. กรณีที่ 2 ($\rho_{22}(0) = 1$).....	30
3.3. กรณีที่ 3 ($\rho_{11}(0) = 1$).....	33
3.4. กรณีที่ 4 ($\rho_{33}(0) = 1$).....	34
3.4.1. พฤติกรรมยอดวงกลับคู่	34
3.4.2. จุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น.....	34
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย.....	39
บรรณานุกรม	41
ภาคผนวก.....	44
ประวัติผู้เขียน.....	47

สารบัญรูปภาพ

หน้า

ภาพประกอบ 1 แสดงระบบควอนตัมแบบเปิด S ที่มีอันตรกิริยากับสิ่งแวดล้อม B	9
ภาพประกอบ 2 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_e(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.1$	26
ภาพประกอบ 3 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_e(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.8$	27
ภาพประกอบ 4 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_g(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.1$	27
ภาพประกอบ 5 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_g(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.8$	28
ภาพประกอบ 6 สถานะเริ่มต้น $\rho_{44}(0) = 1$ กำหนดให้ $\hbar g = 0.1$ คงที่ และ $kT = 0.1$ (เส้นทึบ), $kT = 0.5$ (เส้นประ), $kT = 0.8$ (เส้นจุด) พารามิเตอร์อื่นๆ : $\hbar\omega = 1, \gamma = 0.05$	30
ภาพประกอบ 7 (ก) สถานะเริ่มต้น $\rho_{22}(0) = 1$ กำหนดให้ $kT = 0.8$ คงที่ (ข) สถานะเริ่มต้น $\rho_{11}(0) = 1$ กำหนดให้ $kT = 0.5$ คงที่ และ $\hbar g = 0.1$ (เส้นทึบ), $\hbar g = 0.5$ (เส้นประ), $\hbar g = 0.8$ (เส้นจุด) พารามิเตอร์อื่นๆ : $\hbar\omega = 1, \gamma = 0.05$	33
ภาพประกอบ 8 สถานะเริ่มต้น $\rho_{33}(0) = 1$ (ก) กำหนดให้ $\hbar g = 0.8$ คงที่ และ $kT = 0.1$ (เส้นต่อเนื่อง), $kT = 0.4$ (เส้นประ), $kT = 0.6$ (เส้นจุด), $kT = 0.8$ (เส้นประ-จุด) (ข) กำหนดให้ $kT = 0.7$ คงที่ และ $\hbar g = 0.1$ (เส้นต่อเนื่อง), $\hbar g = 0.3$ (เส้นประ), $\hbar g = 0.7$ (เส้นจุด), $\hbar g = 0.8$ (เส้นประและจุด) พารามิเตอร์อื่นๆ : เลือกเป็น $\hbar\omega = 1, \gamma = 0.05$	36
ภาพประกอบ 9 บริเวณสีเทาแสดงถึงบริเวณที่พบพฤติกรรมมอดวกลับคู่และบริเวณสีดำแสดงถึงกรณีจุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น (ก) กำหนดให้ $\hbar\omega = 1$ คงที่ (ข) กำหนดให้ $kT = 0.5$ คงที่ และ $g = \omega$ (เส้นสีขาว) พารามิเตอร์อื่นๆ : $\omega = 1, \gamma = 0.05$	37

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ลิมิตอัตราเร็วเชิงควอนตัม (quantum speed limit) ซึ่งอธิบายอัตราเร็วมากสุดของการวิวัฒนาการระหว่างสองสถานะที่แตกต่างกันเป็นเรื่องสำคัญในหลากหลายแขนงในปัจจุบัน ได้แก่ การสื่อสารเชิงควอนตัม (quantum communication) (Bekenstein, 1981) และ การคำนวณเชิงควอนตัม (quantum computation) (Nielsen & Chuang, 2002) ลิมิตอัตราเร็วเชิงควอนตัมยังเป็นตัวกำหนดขีดความสามารถในการคำนวณของอุปกรณ์ต่างๆ (Lloyd, 2000) รวมไปถึง การควบคุมเชิงควอนตัม (quantum control) (Caneva et al., 2009) และการสลายของระบบควอนตัมไม่มั่นคง (decay of unstable quantum systems) (Chenu, Beau, Cao, & del Campo, 2017) การพิจารณาลิมิตอัตราเร็วเชิงควอนตัมสามารถเทียบเคียงได้กับการพิจารณาเวลาน้อยที่สุดในการวิวัฒนาการ ซึ่งเรียกว่า ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม (quantum speed limit time) ระหว่างสองสถานะควอนตัม (quantum state) ที่กำหนด ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมระหว่างสองสถานะบริสุทธิ์ที่ตั้งฉากกัน (orthogonal pure state) ในพลศาสตร์ยูนิแทรี (unitary dynamics) ได้เผยแพร่ครั้งแรกโดย มานเดลสแตม (Mandelstam) และ ทามม์ (Tamm) เรียกว่า ขอบเขต เอ็ม. ที. (MT bound) (Mandelstam & Tamm, 1991) ในเวลาถัดมาได้มีอีกขอบเขตหนึ่งที่น่าสนใจโดย มาร์โกลัส (Margolus) และ เลวิติน (Levitin) เรียกว่า ขอบเขต เอ็ม. แอล. (ML bound) (Margolus & Levitin, 1998) ทฤษฎีเหล่านี้ได้รับการพัฒนาให้กว้างขวางขึ้นซึ่งพิจารณาการวิวัฒนาการระหว่างสองสถานะใดๆ ที่ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกันและยังขยายไปสู่กรณีของระบบเปิดและสถานะผสมอีกด้วย (Anandan & Aharonov, 1990; Uhlmann, 1992)

ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมสำหรับระบบเปิดได้รับความสนใจมากขึ้นและได้มีการตีพิมพ์เผยแพร่ผลงานที่มีคุณภาพจำนวนหนึ่งในไม่กี่ปีที่ผ่านมา (Del Campo, Egusquiza, Plenio, & Huelga, 2013) เมื่อเร็วๆ นี้ ได้มีงานวิจัยที่ทำการวิเคราะห์ผลของสิ่งแวดล้อมที่มีผลต่อลิมิตอัตราเร็วเชิงควอนตัมสำหรับระบบเปิดอาทิ (Deffner & Lutz, 2013; Z.Y. Xu, 2014; Zhang, Han, Xia, Cao, & Fan, 2015) ซึ่งพบว่า ความไม่เป็นมาร์คอฟ (non-Markovianity) สามารถเพิ่มอัตราเร็วในการวิวัฒนาการของระบบควอนตัมได้ แต่ก็มีงานวิจัยที่แสดงว่า ความเป็นมาร์คอฟ

(Markovianity) ก็สามารรถเพิ่มอัตราเร็วในการวิวัฒนาการได้เช่นกัน (Mirkin, Toscano, & Wisniacki, 2016)

ในงานวิจัยนี้ จะทำการศึกษาลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมโดยใช้ความบริสุทธิ์สัมพัทธ์ (relative purity) (Audenaert, 2012) เป็นตัววัดระยะทาง (Zhang, Han, Xia, Cao, & Fan, 2014) ภายใต้การประมาณ บอร์น-มาร์คอฟ (Born-Markov approximation) ในงานวิจัยจะทำการวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการซึ่งรวมถึงการเพิ่มและลดอัตราเร็วเชิงควอนตัมที่สอดคล้องกับสถานะเริ่มต้นที่กำหนดขึ้นของระบบคูควิบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละควิบิตสัมผัสกับอ่างความร้อนที่อุณหภูมิจำกัด งานวิจัยนี้ได้อธิบายและจำแนกการวิวัฒนาการของระบบควอนตัมดังกล่าวก่อนเข้าสู่สมดุลความร้อนในรูปแบบของการเพิ่มและลดของอัตราเร็วเชิงควอนตัมผ่านหลักการของลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม ในการวิเคราะห์นี้มีพารามิเตอร์ที่สามารถควบคุมได้ อาทิ อุณหภูมิ อันตรกิริยาระหว่างคูควิบิต และความต่างของระดับพลังงานของควิบิตแต่ละตัว

ความมุ่งหมายของงานวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. ศึกษาการวิวัฒนาการของระบบควอนตัมที่ประกอบด้วยสองควิบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละควิบิตสัมผัสกับอ่างความร้อนผ่านปริมาณที่เรียกว่า ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมในแต่ละขณะที่ระบบวิวัฒนาการไป ตั้งแต่สถานะเริ่มต้นจนระบบเข้าสู่สถานะเชิงความร้อน
2. ศึกษาการมีอยู่ของยอดควงกลับทั้งในระบบควอนตัมที่ประกอบด้วยหนึ่งควิบิตและสองควิบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกัน โดยแต่ละควิบิตสัมผัสกับอ่างความร้อน พร้อมทั้งวิเคราะห์การเกิดกระบวนการเพิ่มและลดของอัตราเร็วเชิงควอนตัมด้วย
3. ศึกษาตัวแปรต่างๆที่มีผลต่อกระบวนการวิวัฒนาการสำหรับสถานะเริ่มต้นต่างๆ ที่กำหนดขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

การวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการวิวัฒนาการของระบบควอนตัมที่ได้รับอิทธิพลจากอุณหภูมิภายนอกซึ่งเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงได้ยากในทางปฏิบัติ เพื่อให้เข้าใจผลของอุณหภูมิที่มีต่อการวิวัฒนาการของระบบควอนตัมซึ่งอาจเป็นประโยชน์ในการควบคุมการวิวัฒนาการของระบบควอนตัม สำหรับการประยุกต์ใช้ในอุปกรณ์เชิงควอนตัมในอนาคต

ขอบเขตของการวิจัย

ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมในงานวิจัยนี้ ได้มาโดยอาศัยตัวดำเนินการความหนาแน่นลดรูปซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการมาสเตอร์ในรูปแบบลินด์บลัด (Lindblad form) ภายใต้การประมาณ บอร์น-มาร์คอฟ (Born - Markov approximation) และการประมาณคลื่นการหมุน (rotating - wave approximation)

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม (quantum speed limit time) คือ เวลาอย่างน้อยที่ระบบควอนตัมใช้ในการวิวัฒนาการจากสถานะเริ่มต้นไปสู่สถานะเป้าหมาย
2. คู่คิวบิต (coupled qubit) คือ ระบบสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาระหว่างกัน
3. คิวบิตเชิงความร้อน (thermal qubit) คือ คิวบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน
4. ตัวดำเนินการความหนาแน่นลดรูป (reduced density operator) คือ ตัวดำเนินการความหนาแน่นของระบบควอนตัมที่บรรจุอิทธิพลของสิ่งแวดล้อม (อ่างความร้อน) โดยผ่านกระบวนการทรานส์เฟอร์ของค่าเฉลี่ยของสิ่งแวดล้อม
5. สมการมาสเตอร์ (master equation) ในงานวิจัยนี้ คือ สมการที่ใช้อธิบายพลศาสตร์ของความหนาแน่นลดรูปของระบบควอนตัมแบบเปิด
6. การประมาณบอร์น (Born approximation) คือ การประมาณที่ประมาณว่าสถานะของระบบที่ใหญ่กว่ามากๆ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง เมื่อมีอันตรกิริยาอย่างอ่อนกับอีกระบบหนึ่งซึ่งเล็กกว่ามาก
7. การประมาณของมาร์คอฟ (Markov approximation) คือ การประมาณในกระบวนการสโตแคสติก (stochastic process) โดยสมมุติว่า ตัวแปรสุ่มที่พารามิเตอร์หนึ่งจะได้รับอิทธิพลจากพารามิเตอร์ก่อนหน้าเท่านั้น
8. การประมาณคลื่นการหมุน (rotating wave approximation) ในงานวิจัยนี้ คือ การประมาณที่เก็บเฉพาะเทอมที่มีค่าความต่างของพลังงานของระบบเท่ากันเท่านั้น

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้เรียบเรียงตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ตัวดำเนินการความหนาแน่น (density operator) ในกลศาสตร์ควอนตัม
2. สถานะเชิงความร้อน (thermal state) ของคูควิบิต
3. สมการมาสเตอร์เชิงควอนตัมแบบมาร์คอฟ (Markovian quantum master equation)
4. ความบริสุทธิ์สัมพัทธ์ (relative purity) และลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม (quantum speed limit time)

1. ตัวดำเนินการความหนาแน่นในกลศาสตร์ควอนตัม

กลศาสตร์ควอนตัมทั้งแบบระบบปิดและระบบเปิด อธิบายได้โดยอาศัยตัวดำเนินการความหนาแน่น โดยเมื่อต้องการข้อมูลของระบบควอนตัม เช่น ค่าเฉลี่ย (expectation value) ของตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน A สามารถหาได้จาก $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$ เป็นต้น ตัวดำเนินการความหนาแน่น (density operator) (Sakurai & Commins, 1995) นิยามในรูปผลรวมของผลคูณภายนอก (outer product) ของสถานะเวกเตอร์ (state vector) ได้เป็น

$$\rho = \sum_{i \in I} p_i |\psi^{(i)}\rangle \langle \psi^{(i)}|, \quad (2.1)$$

เมื่อ $p_i \geq 0$ และ $\sum_{i \in I} p_i = 1$ เมื่อ I เป็นเซตนับได้ (countable set) p_i สามารถตีความได้เป็นความน่าจะเป็นที่จะพบสถานะ $|\psi^{(i)}\rangle$ ในเซตสมบูรณ์ (complete set) $\{|\psi^{(i)}\rangle\}_{i \in I}$ ซึ่งเป็นฐานหลัก (basis) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space)

สถานะบริสุทธิ์ (pure state) คือสถานะ ρ ซึ่ง $p_i = 1$ สำหรับบาง i ในกรณีนี้ สมการที่ (2.1) เขียนได้เป็น

$$\rho = |\psi^{(i)}\rangle \langle \psi^{(i)}|, \quad (2.2)$$

และสถานะที่ไม่ใช่สถานะบริสุทธิ์ เรียกว่า สถานะผสม (mixed state)

1.1. สมบัติของตัวดำเนินการความหนาแน่น

1. ρ เป็นเฮอร์มิเทียน :

$$\rho = \rho^\dagger. \quad (2.3)$$

2. ρ เป็นปกติ (normalized) :

$$\text{Tr}(\rho) = 1. \quad (2.4)$$

3. ρ เป็นบวก (ทุกค่าไอเกน (eigenvalues) ของ ρ ไม่เป็นลบ) :

$$\rho \geq 0. \quad (2.5)$$

4. ρ เป็นสถานะบริสุทธิ์ก็ต่อเมื่อ ρ เป็นตัวดำเนินการการฉาย (projection operator)

$$\rho^2 = \rho. \quad (2.6)$$

หมายเหตุ : โดยทั่วไป $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ เมื่อเครื่องหมายเท่ากับคือ กรณีของสถานะบริสุทธิ์

1.2. ผลคูณเทนเซอร์

พิจารณาระบบควอนตัมซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยตั้งแต่สองระบบขึ้นไป โดยในที่นี้จะขอพิจารณาเพียงสองระบบย่อยก่อนซึ่งอธิบายโดยปริภูมิฮิลเบิร์ต $H^{(1)}$ และ $H^{(2)}$ ตามลำดับ ในทางคณิตศาสตร์ปริภูมิฮิลเบิร์ตของระบบควอนตัมประกอบ (composite quantum system) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูปผลคูณเทนเซอร์ (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \otimes) ของ $H^{(1)}$ และ $H^{(2)}$ เป็น (Cohen-Tannoudji, Diu, & Laloë, 2013)

$$H = H^{(1)} \otimes H^{(2)}. \quad (2.7)$$

ทุกๆเวกเตอร์ $|\Psi\rangle$ ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของฐานหลัก $\{|x_i^{(1)}\rangle \otimes |y_j^{(2)}\rangle\}$ เมื่อ $\{|x_i^{(1)}\rangle\}$ และ $\{|y_j^{(2)}\rangle\}$ เป็นฐานหลัก สำหรับ $H^{(1)}$ และ $H^{(2)}$ ตามลำดับ นั่นคือ

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |x_i^{(1)}\rangle \otimes |y_j^{(2)}\rangle. \quad (2.8)$$

หมายเหตุ : ในทางฟิสิกส์ นิยมใช้สัญลักษณ์ย่อของ $|x\rangle \otimes |y\rangle$ เป็น $|x\rangle|y\rangle$, $|x, y\rangle$ หรือ $|xy\rangle$

ผลคูณเทนเซอร์ระหว่างสองเวกเตอร์ของแต่ละระบบย่อยนิยามได้ตามสมบัติดังต่อไปนี้

1. ให้ c เป็นสเกลาร์ (จำนวนเชิงซ้อน) ใดๆ กำหนดให้ $|x\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน $H^{(1)}$ และ $|y\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน $H^{(2)}$

$$c(|x\rangle \otimes |y\rangle) = (c|x\rangle) \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes (c|y\rangle). \quad (2.9)$$

2. ให้ $|x_1\rangle, |x_2\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน $H^{(1)}$ และ $|y\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน $H^{(2)}$

$$(|x_1\rangle + |x_2\rangle) \otimes |y\rangle = |x_1\rangle \otimes |y\rangle + |x_2\rangle \otimes |y\rangle. \quad (2.10)$$

3. ให้ $|x\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน $H^{(1)}$ และ $|y_1\rangle, |y_2\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน $H^{(2)}$

$$|x\rangle \otimes (|y_1\rangle + |y_2\rangle) = |x\rangle \otimes |y_1\rangle + |x\rangle \otimes |y_2\rangle. \quad (2.11)$$

พิจารณาตัวดำเนินการเชิงเส้น A และ B ซึ่งกระทำบน $H^{(1)}$ และ $H^{(2)}$ ตามลำดับ ให้ $|x\rangle$ และ $|y\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน $H^{(1)}$ และ $H^{(2)}$ ผลคูณเทนเซอร์ระหว่าง A และ B นิยามโดย

$$(A \otimes B)(|x\rangle \otimes |y\rangle) = A|x\rangle \otimes B|y\rangle, \quad (2.12)$$

เมื่อให้ $B = 1^{(2)}$ เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์ (identity operator) ใน $H^{(2)}$ $(A \otimes 1^{(2)})|\Psi\rangle =: A|\Psi\rangle$ สำหรับทุก $|\Psi\rangle$ ใน H ในทำนองเดียวกันเมื่อให้ $A = 1^{(1)}$ เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์ใน $H^{(1)}$ $(1^{(1)} \otimes B)|\Psi\rangle =: B|\Psi\rangle$

ให้ $|\psi_1^{(1)}\rangle, |\psi_2^{(1)}\rangle \in H^{(1)}$ และ $|\phi_1^{(2)}\rangle, |\phi_2^{(2)}\rangle \in H^{(2)}$ ผลคูณภายในของผลคูณเทนเซอร์ระหว่าง $|\psi_1^{(1)}\rangle \otimes |\phi_1^{(2)}\rangle$ และ $|\psi_2^{(1)}\rangle \otimes |\phi_2^{(2)}\rangle$ นิยามเป็น $\langle \psi_1^{(1)} \phi_1^{(2)} | \psi_2^{(1)} \phi_2^{(2)} \rangle =: \langle \psi_1^{(1)} | \psi_2^{(1)} \rangle \langle \phi_1^{(2)} | \phi_2^{(2)} \rangle$ ดังนั้นสำหรับฐานหลักตั้งฉาก $\{|x_i^{(1)} y_j^{(2)}\}$ จะได้

$$\langle x_i^{(1)} y_j^{(2)} | x_i^{(1)} y_j^{(2)} \rangle = \langle x_i^{(1)} | x_i^{(1)} \rangle \langle y_j^{(2)} | y_j^{(2)} \rangle = \delta_{ii} \delta_{jj}. \quad (2.13)$$

เมื่อพิจารณาตัวแทนเมทริกซ์ (matrix representation) ของตัวดำเนินการเชิงเส้น ผลคูณเทนเซอร์ของตัวดำเนินการสามารถพิจารณาได้จาก ผลคูณโคเรเนกเกอร์ (Kronecker product)

กำหนดให้ตัวดำเนินการ A เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ใน $H^{(1)}$ และตัวดำเนินการ B เป็นเมทริกซ์ $p \times p$ ใน $H^{(2)}$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pp} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2. สถานะเชิงความร้อนของคู่ควิบิต

ระบบควอนตัมในงานวิจัยนี้ เป็นระบบของคู่ควิบิตที่มีอันตรกิริยาระหว่างกัน โดยตัวดำเนินการแฮมิลโตเนียนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_Z^A + \frac{1}{2}\hbar\omega_B\sigma_Z^B + \hbar g(\sigma_-^A \otimes \sigma_+^B + \sigma_+^A \otimes \sigma_-^B), \quad (2.15)$$

เมื่อ $\frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_Z^A$ เป็นพลังงานของควิบิต A,

$\frac{1}{2}\hbar\omega_B\sigma_Z^B$ เป็นพลังงานของควิบิต B,

และ $\hbar g(\sigma_-^A \otimes \sigma_+^B + \sigma_+^A \otimes \sigma_-^B)$ เป็นอันตรกิริยาระหว่างควิบิต A และควิบิต B

เมื่อแทน $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ลงในสมการที่ (2.15) จะสามารถ

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$H = \begin{pmatrix} (\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta\hbar}{2} & g\hbar & 0 \\ 0 & g\hbar & -\frac{\delta\hbar}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}; \quad \delta = \omega_A - \omega_B. \quad (2.16)$$

ค่าไอเกนและเวกเตอร์ไอเกนของแฮมิลโตเนียนในสมการข้างต้นสามารถหาได้โดย

พิจารณาจากสมการพหุนามแคแรกเตอร์ริสติก (characteristic polynomial) คือ

$$\det(H - E1) = \begin{vmatrix} (\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2} - E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta\hbar}{2} - E & g\hbar & 0 \\ 0 & g\hbar & -\frac{\delta\hbar}{2} - E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2} - E \end{vmatrix} = 0, \quad (2.17)$$

ซึ่งให้ค่าไอเกนสี่ค่าเป็น

$$\begin{aligned} E_1 &= (\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2} & E_2 &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2 + 4g^2} \\ E_3 &= -\frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2 + 4g^2} & E_4 &= -(\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

และเวกเตอร์ไอเกนสี่เวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกนข้างต้นตามลำดับเป็น

$$|E_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |E_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |E_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |E_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\text{เมื่อ } \cos \theta = \frac{R - \delta}{\sqrt{(R - \delta)^2 + 4g^2}}, \quad \sin \theta = \frac{2g}{\sqrt{(R - \delta)^2 + 4g^2}}, \quad \text{และ } R = \sqrt{\delta^2 + 4g^2}.$$

เมื่อนำระบบนี้มาสัมผัสกับอ่างความร้อนที่อุณหภูมิ T เป็นเวลานานพอ ตัวดำเนินการความหนาแน่นจะเข้าสู่สถานะเชิงความร้อน คือ

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad (2.20)$$

เมื่อ $\beta = 1/kT$ (k คือ ค่าคงที่ของโบลต์ซมันน์)

$$\text{และ } Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \geq 0 \text{ คือ ฟังก์ชันแบ่งกัน (partition function)} \quad (2.21)$$

จากค่าไอเกนและเวกเตอร์ไอเกนตามสมการที่ (2.18) และ (2.19) ตามลำดับ สถานะเชิงความร้อนข้างต้นสามารถเขียนได้เป็น

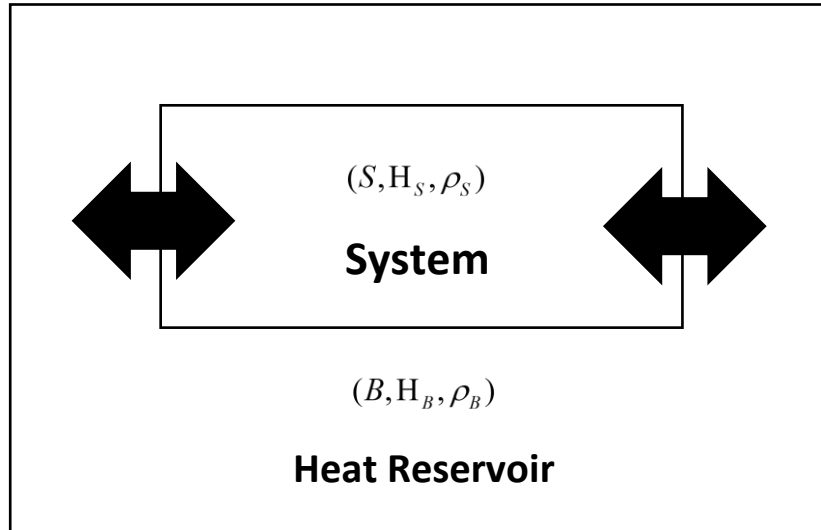
$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^4 e^{-\beta E_i} |E_i\rangle \langle E_i|$$

$$= \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta \hbar(\omega_A + \omega_B)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta \hbar R/2} \sin^2 \theta + e^{\beta \hbar R/2} \cos^2 \theta & (e^{-\beta \hbar R/2} - e^{\beta \hbar R/2}) \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & (e^{-\beta \hbar R/2} - e^{\beta \hbar R/2}) \sin \theta \cos \theta & e^{-\beta \hbar R/2} \cos^2 \theta + e^{\beta \hbar R/2} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta \hbar(\omega_A + \omega_B)/2} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

3. สมการมาสเตอร์เชิงควอนตัมแบบมาร์คอฟ

ระบบควอนตัมที่มีอิทธิพลของสิ่งแวดล้อมมารบกวนซึ่งทำให้ระบบควอนตัมมีพลศาสตร์เกิดขึ้น สามารถพิจารณาได้จากระบบควอนตัมแบบเปิด (open quantum system) โดยระบบควอนตัม S ที่พิจารณาจะมีอันตรกิริยากับสิ่งแวดล้อม B ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ B เป็นอ่างความร้อน (heat reservoir) ในการหาพลศาสตร์ของระบบควอนตัมภายใต้สิ่งแวดล้อมนี้ จะทำโดยการทรานซ์ของศาเสรี (degree of freedom) ของสิ่งแวดล้อมออก ทำให้ได้ตัวดำเนินการความหนาแน่นลดรูป (reduced density operator) ซึ่งอธิบายสถานะของระบบควอนตัม S ที่รวมผลของการรบกวนจากสิ่งแวดล้อม B อยู่ในตัว (ดูภาพด้านล่างประกอบ)

$$(S + B, H_S \otimes H_B, \rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B) \quad ; \quad \rho_S(t) = \text{Tr}_B(\rho(t))$$



ภาพประกอบ 1 แสดงระบบควอนตัมแบบเปิด S ที่มีอันตรกิริยากับสิ่งแวดล้อม B

เพื่อดำเนินการหาตัวดำเนินการความหนาแน่นดังกล่าว เราเริ่มต้นด้วยการพิจารณาสมการลูยิวิลล์-ฟอน นอยมันน์ (Liouville-von Neumann equation) ของระบบรวมคือ (Breuer & Petruccione, 2002)

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)], \quad (2.23)$$

โดยแฮมิลโตเนียนของระบบรวมสามารถเขียนได้เป็น

$$H = H_S + H_B + H_I, \quad (2.24)$$

เมื่อ H_I เป็นแฮมิลโตเนียนอันตรกิริยา (interaction Hamiltonian) โดยเป็นอันตรกิริยาระหว่างระบบควอนตัม S กับอ่างความร้อน B สมการที่ (2.23) สามารถเขียนได้ในภาพอันตรกิริยา (interaction picture) เป็น

$$\frac{d}{dt} \rho^{(I)}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_I^{(I)}(t), \rho^{(I)}(t)], \quad (2.25)$$

เมื่อ $H_I^{(I)}(t)$ คือ ภาพอันตรกิริยาของแฮมิลโตเนียนอันตรกิริยาโดย

$$H_I^{(I)}(t) = e^{i(H_S+H_B)t/\hbar} H_I e^{-i(H_S+H_B)t/\hbar}. \quad (2.26)$$

อินทิเกรตสมการที่ (2.25) ทั้งสองข้างจะได้

$$\rho^{(l)}(t) = \rho^{(l)}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [H_I^{(l)}(s), \rho^{(l)}(s)] ds. \quad (2.27)$$

แทนค่าสมการที่ (2.27) ในสมการที่ (2.25) จะได้

$$\frac{d}{dt} \rho^{(l)}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_I^{(l)}(t), \rho^{(l)}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [H_I^{(l)}(t), [H_I^{(l)}(s), \rho^{(l)}(s)]] ds. \quad (2.28)$$

เมื่อทำการเทรซสิ่งแวดล้อยในสมการที่ (2.28) จะได้สมการพลศาสตร์ของตัวดำเนินการความหนาแน่นลดรูป $\rho_S^{(l)}(t)$ คือ

$$\frac{d}{dt} \rho_S^{(l)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_B [H_I^{(l)}(t), \rho^{(l)}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_B [H_I^{(l)}(t), [H_I^{(l)}(s), \rho^{(l)}(s)]] ds. \quad (2.29)$$

โดยทั่วไปแล้วอ่างความร้อน B จะมีขนาดใหญ่มากเมื่อเปรียบเทียบกับระบบควอนตัม S ดังนั้นในขณะที่ระบบ S มีการเปลี่ยนแปลงไปเนื่องมาจากการแลกเปลี่ยนพลังงานกับอ่างความร้อน B ตัวอ่างความร้อน B เองจึงพอประมาณได้ว่าจะยังคงอยู่ในสถานะเดิม (ρ_B) นั่นคือสามารถประมาณได้ว่า

$$\rho^{(l)}(t) \approx \rho_S^{(l)}(t) \otimes \rho_B, \quad (2.30)$$

ซึ่งทำให้สมการที่ (2.29) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dt} \rho_S^{(l)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_B [H_I^{(l)}(t), [H_I^{(l)}(s), \rho_S^{(l)}(s) \otimes \rho_B]] ds. \quad (2.31)$$

การประมาณในสมการที่ (2.30) เรียกว่า การประมาณของบอร์น (Born approximation)

จากสมการที่ (2.31) เปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยให้ $s = t - s'$ จะได้

$$\frac{d}{dt} \rho_S^{(l)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_B [H_I^{(l)}(t), [H_I^{(l)}(t-s'), \rho_S^{(l)}(t-s') \otimes \rho_B]] ds', \quad (2.32)$$

ซึ่ง s' เป็นตัวแปรที่แสดงถึงเวลาความจำ (memory time) ของระบบควอนตัมที่สัมผัสกับอ่างความร้อน ในขั้นตอนนี้หากทำการประมาณเพิ่มเติมซึ่งเรียกว่า การประมาณมาร์คอฟ (Markov approximation) ซึ่งหมายถึงการประมาณว่า อดีตที่ส่งผลมาถึงปัจจุบันที่เวลา t มาจากที่เวลา $t - \varepsilon$ เมื่อ $\varepsilon \rightarrow 0^+$ เท่านั้น นั่นคือ $\rho_S^{(l)}(t-s')$ สามารถประมาณได้เป็น $\rho_S^{(l)}(t)$ ทำให้สมการข้างต้นสามารถเขียนใหม่เป็น

$$\frac{d}{dt} \rho_S^{(l)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_B [H_I^{(l)}(t), [H_I^{(l)}(t-s'), \rho_S^{(l)}(t) \otimes \rho_B]] ds'. \quad (2.33)$$

โมเดลในงานวิจัยนี้ เป็นระบบสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละตัวสัมผัสกับอ่างความร้อนที่อุณหภูมิต่างกันหรือไม่ต่างกันก็ได้ ซึ่งมีแฮมิลโตเนียนรวมของระบบเป็น

$$H = H_S + H_{B_A} + H_{B_B} + H_{I_A} + H_{I_B}, \quad (2.34)$$

เมื่อแฮมิลโตเนียนของระบบควอนตัม

$$H_S = \frac{1}{2} \hbar \omega_A \sigma_A^Z + \frac{1}{2} \hbar \omega_B \sigma_B^Z + \hbar g (\sigma_A^+ \otimes \sigma_B^- + \sigma_A^- \otimes \sigma_B^+), \quad (2.35)$$

ซึ่งแฮมิลโตเนียน H_S อธิบายพลังงานของคูควิบิต A กับ B ที่มีอันตรกิริยาระหว่างกันและ $\sigma_{A,B}^{\pm}$, $\sigma_{A,B}^Z$ เป็นเมทริกซ์เพาลี (Pauli matrices) และแฮมิลโตเนียนของอ่างความร้อนที่สัมผัสแต่ละควิบิต $j = A, B$ เป็น

$$H_{B_j} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k},j} b_{\vec{k},j}^\dagger b_{\vec{k},j}, \quad (2.36)$$

โดยอ่างความร้อนเปรียบเสมือนเซตอนันต์ของตัวกวัดแกว่งฮาร์มอนิก (infinite set of harmonic oscillators) และแฮมิลโตเนียนอันตรกิริยา H_{I_j} อยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างควิบิตแต่ละตัวกับอ่างความร้อนแต่ละอ่างโดย

$$\begin{aligned} H_{I_j} &= \hbar \left(\sigma_j^+ \otimes \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{(j)} b_{\vec{k},j} + \sigma_j^- \otimes \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{*(j)} b_{\vec{k},j}^\dagger \right) \\ &= \hbar \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu} \left(V_j^\dagger(-\omega_\mu) \otimes f_j^{(\vec{k})} + V_j(\omega_\mu) \otimes f_j^{\dagger(\vec{k})} \right) \\ &= \hbar \sum_{\vec{k}} \sum_{\mu} \left(V_j^\dagger(\omega_\mu) \otimes f_j^{(\vec{k})} + V_j(\omega_\mu) \otimes f_j^{\dagger(\vec{k})} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

เมื่อ \vec{k} เป็นเวกเตอร์คลื่น (wave vector) $\sum_{\mu} := \sum_{\hbar\omega_\mu}$ หมายถึง การบวกไปทุกๆ ค่าของผลต่างของพลังงานของระบบที่เป็นไปได้และ $V_j(\omega_\mu)$ และ $f_j^{(\vec{k})}$ เป็นตัวดำเนินการที่กระทำบนระบบควอนตัมและอ่างความร้อนตามลำดับโดย

$$\begin{aligned} V_j(\omega_\mu) &= \sum_{E'_n - E_n = \hbar\omega_\mu} \Pi(E_n) \sigma_j^- \Pi(E'_n) \\ &= \sum_{E'_n - E_n = \hbar\omega_\mu} |E_n\rangle \langle E_n| \sigma_j^- |E'_n\rangle \langle E'_n| \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\text{และ} \quad V_j^\dagger(-\omega_\mu) = \sum_{E'_n - E_n = \hbar\omega_\mu} \Pi(E_n) \sigma_j^+ \Pi(E'_n) \quad (2.39)$$

เมื่อ $\Pi(E_n) = |E_n\rangle \langle E_n|$ เป็นตัวดำเนินการฉาย (projection operator) และ $f_j^{(\vec{k})} = g_{\vec{k}}^{(j)} b_{\vec{k},j}$ ในสมการที่ (2.37) สังเกตว่า $V_j^\dagger(-\omega_\mu)$ สามารถเปลี่ยนเป็น $V_j^\dagger(\omega_\mu)$ ภายในเครื่องหมาย \sum_{μ} ได้เนื่องจากถ้า $\hbar\omega_\mu$ เป็นผลต่างของพลังงานค่าหนึ่งแล้ว $-\hbar\omega_\mu$ ก็จะเป็นด้วยเช่นกัน

จากแฮมิลโตเนียน H_S ซึ่งมีค่าไอเกนและเวกเตอร์ไอเกนเป็น

$$\begin{aligned} |E_1\rangle &= |11\rangle & ; \quad E_1 &= (\omega_A + \omega_B) \frac{\hbar}{2} \\ |E_2\rangle &= \sin \theta |10\rangle + \cos \theta |01\rangle & ; \quad E_2 &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\delta^2 + 4g^2} \end{aligned}$$

$$|E_3\rangle = \cos\theta|10\rangle - \sin\theta|01\rangle \quad ; \quad E_3 = -\frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2 + 4g^2}$$

$$|E_4\rangle = |00\rangle \quad ; \quad E_4 = -(\omega_A + \omega_B)\frac{\hbar}{2}$$

$$\text{โดยที่ } \sin\theta = \frac{2g}{\sqrt{(R-\delta)^2 + 4g^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{R-\delta}{\sqrt{(R-\delta)^2 + 4g^2}} \quad ; \quad R = \sqrt{\delta^2 + 4g^2}$$

จะได้ความถี่เปลี่ยนสถานะ (transition frequency) ω_μ ที่ $V_j(\omega_\mu)$ ไม่เป็นศูนย์เป็น

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left((\omega_A + \omega_B) - \sqrt{\delta^2 + 4g^2}\right),$$

$$\text{และ} \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left((\omega_A + \omega_B) + \sqrt{\delta^2 + 4g^2}\right).$$

ดังนั้น $V_j(\omega_\mu)$ เขียนได้เป็น

$$V_A(\omega_1) = \cos\theta(|E_2\rangle\langle E_1| + |E_4\rangle\langle E_3|) \quad , \quad V_A(\omega_2) = \sin\theta(|E_4\rangle\langle E_2| - |E_3\rangle\langle E_1|)$$

$$\text{และ} \quad V_B(\omega_1) = \sin\theta(|E_2\rangle\langle E_1| - |E_3\rangle\langle E_4|) \quad , \quad V_B(\omega_2) = \cos\theta(|E_3\rangle\langle E_1| + |E_4\rangle\langle E_2|).$$

พิจารณาแฮมิลโตเนียนอันตรกิริยาในภาพอันตรกิริยา คือ

$$H_{I_j}^{(I)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_S + \sum_j H_{B_j})t} H_{I_j} e^{-\frac{i}{\hbar}(H_S + \sum_j H_{B_j})t} \quad , \quad (2.40)$$

โดยอาศัยคุณสมบัติดังนี้

$$e^{iH_S t/\hbar} V_j(\omega_\mu) e^{-iH_S t/\hbar} = e^{-i\omega_\mu t} V_j(\omega_\mu) \quad , \quad e^{iH_S t/\hbar} V_j^\dagger(\omega_\mu) e^{-iH_S t/\hbar} = e^{i\omega_\mu t} V_j^\dagger(\omega_\mu)$$

$$e^{iH_{B_j} t/\hbar} f_j^{(\bar{k})} e^{-iH_{B_j} t/\hbar} = f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) = e^{-i\omega_{\bar{k}} t} f^{(\bar{k})} \quad , \quad e^{iH_{B_j} t/\hbar} f_j^{\dagger(\bar{k})} e^{-iH_{B_j} t/\hbar} = f_j^{\dagger(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) = e^{i\omega_{\bar{k}} t} f_j^{\dagger(\bar{k})}$$

และสมการที่ (2.37) สมการที่ (2.40) สามารถเขียนได้เป็น

$$H_{I_j}^{(I)}(t) = \sum_k \sum_\mu \hbar \left(e^{i\omega_\mu t} V_j^\dagger(\omega_\mu) \otimes f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t)) + e^{-i\omega_\mu t} V_j(\omega_\mu) \otimes f_j^{\dagger(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t)) \right) \quad (2.41)$$

$$H_{I_j}^{(I)}(t-s) = \sum_k \sum_\mu \hbar \left(e^{i\omega_\mu(t-s)} V_j^\dagger(\omega_\mu) \otimes f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t-s)) + e^{-i\omega_\mu(t-s)} V_j(\omega_\mu) \otimes f_j^{\dagger(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t-s)) \right) \quad (2.42)$$

นำสมการที่ (2.41) และ (2.42) แทนในสมการที่ (2.33) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S^{(I)}(t) = & \sum_{\mu, \nu} \sum_{\bar{k}, \bar{k}'} \sum_{j=A}^B \int Tr_B \left[-e^{i(\omega_\mu - \omega_\nu)t} V_j^\dagger(\omega_\mu) V_j(\omega_\nu) \rho_S^{(I)}(t) e^{i\omega_\nu s'} \left\{ f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s')) \rho_B \right\} \right. \\ & - e^{i(\omega_\nu - \omega_\mu)t} V_j(\omega_\mu) V_j^\dagger(\omega_\nu) \rho_S^{(I)}(t) e^{-i\omega_\nu s'} \left\{ f_j^{\dagger(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) f_j^{(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s')) \rho_B \right\} \\ & + e^{i(\omega_\nu - \omega_\mu)t} V_j^\dagger(\omega_\nu) \rho_S^{(I)}(t) V_j(\omega_\mu) e^{-i\omega_\nu s'} \left\{ f_j^{\dagger(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) f_j^{(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s')) \rho_B \right\} \\ & \left. + e^{i(\omega_\mu - \omega_\nu)t} V_j(\omega_\nu) \rho_S^{(I)}(t) V_j^\dagger(\omega_\mu) e^{-i\omega_\nu s'} \left\{ f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s')) \rho_B \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{i(\omega_\mu-\omega_\nu)t}V_j^\dagger(\omega_\mu)\rho_S^{(I)}(t)V_j(\omega_\nu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)\rho_B\right\} \\
& +e^{i(\omega_\nu-\omega_\mu)t}V_j(\omega_\nu)\rho_S^{(I)}(t)V_j^\dagger(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t-s'))f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}t)\rho_B\right\} \\
& -e^{i(\omega_\nu-\omega_\mu)t}\rho_S^{(I)}(t)V_j^\dagger(\omega_\nu)V_j(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))\rho_B\right\} \\
& -e^{i(\omega_\mu-\omega_\nu)t}\rho_S^{(I)}(t)V_j(\omega_\nu)V_j^\dagger(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)\rho_B\right\}+\dots\Big]ds', \quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ} \quad \rho_B = \frac{e^{-\beta_A H_{B_A}}}{\text{Tr}[e^{-\beta_A H_{B_A}}]} \otimes \frac{e^{-\beta_B H_{B_B}}}{\text{Tr}[e^{-\beta_B H_{B_B}}]}; \quad \beta_A = \frac{1}{kT_A}, \quad \beta_B = \frac{1}{kT_B}, \quad (2.44)$$

โดยที่ T_A และ T_B คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์ของอ่างความร้อนที่สัมผัสกับคิวบิต A และคิวบิต B ตามลำดับ จากการประมาณคลื่นการหมุน (rotating wave approximation) เทอมที่ $\omega_\mu \neq \omega_\nu$ สามารถละทิ้งได้ หากสเกลเวลาของการวิวัฒนาการภายใน (the time scale of the intrinsic evolution) τ_S มีค่าน้อยกว่าเวลาในการผ่อนคลายของระบบ (relaxation time) τ_R มากๆ เมื่อทำการเก็บเฉพาะเทอมที่ $\omega_\mu = \omega_\nu$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_S^{(I)}(t) & = \sum_{\mu=1}^2 \sum_{\bar{k}, \bar{k}'}^B \sum_{j=A}^t \int \text{Tr}_B \left[V_j^\dagger(\omega_\mu)V_j(\omega_\mu)\rho_S^{(I)}(t)e^{i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))\rho_B\right\} \right. \\
& \quad -V_j(\omega_\mu)V_j^\dagger(\omega_\nu)\rho_S^{(I)}(t)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}t)f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t-s'))\rho_B\right\} \\
& \quad +V_j^\dagger(\omega_\nu)\rho_S^{(I)}(t)V_j(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}t)f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t-s'))\rho_B\right\} \\
& \quad +V_j(\omega_\nu)\rho_S^{(I)}(t)V_j^\dagger(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))\rho_B\right\} \\
& \quad +V_j^\dagger(\omega_\mu)\rho_S^{(I)}(t)V_j(\omega_\nu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)\rho_B\right\} \\
& \quad +V_j(\omega_\nu)\rho_S^{(I)}(t)V_j^\dagger(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}(t-s'))f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}t)\rho_B\right\} \\
& \quad \left. -\rho_S^{(I)}(t)V_j^\dagger(\omega_\nu)V_j(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))\rho_B\right\} \right. \\
& \quad \left. -\rho_S^{(I)}(t)V_j(\omega_\nu)V_j^\dagger(\omega_\mu)e^{-i\omega_\nu s'}\left\{f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s'))f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t)\rho_B\right\}+\dots\right]ds'. \quad (2.45)
\end{aligned}$$

พิจารณาฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (correlation functions) ในสมการที่ (2.45) ที่ไม่เป็นศูนย์ (คือทุกตัวที่แสดงยกเว้นที่อยู่ใน ... *) เช่น ในเทอมแรกจะได้

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{k}, \bar{k}'}^t \int_0^t e^{i\omega_\mu s'} \text{Tr}_B \left\{ f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}}t) f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s')) \rho_B \right\} ds' = \\
& = \sum_{\bar{k}, \bar{k}'} g_{\bar{k}}^{(j)} g_{\bar{k}'}^{(j)*} \int_0^t e^{-i(\omega_{\bar{k}}-\omega_{\bar{k}'})t} e^{-i(\omega_{\bar{k}'}-\omega_\mu)s'} \text{Tr}_B (b_{\bar{k},j} b_{\bar{k}',j}^\dagger \rho_B) ds'. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

* ในที่นี้รวมถึงเทอมไขว้ที่มีค่า j ไม่ตรงกันด้วยซึ่งเทอมเหล่านี้จะเป็นศูนย์ทั้งหมดเพราะว่า

$$\langle b_{\bar{k},A}, b_{\bar{k},B} \rangle = \langle b_{\bar{k},A}^\dagger, b_{\bar{k},B}^\dagger \rangle = \langle b_{\bar{k},A}, b_{\bar{k},B}^\dagger \rangle = \langle b_{\bar{k},A}^\dagger, b_{\bar{k},B} \rangle = 0$$

จากสูตรค่าเฉลี่ยต่างๆของตัวดำเนินการสิ่งแวดล้อมสำหรับสถานะเชิงความร้อน ρ_B ตามสมการที่ (2.46) คือ

$$\begin{aligned}\langle b_{\bar{k},j} b_{\bar{k}',j} \rangle &= Tr_B (b_{\bar{k},j} b_{\bar{k}',j} \rho_B) = 0 \\ \langle b_{\bar{k},j}^\dagger b_{\bar{k},j}^\dagger \rangle &= Tr_B (b_{\bar{k},j}^\dagger b_{\bar{k},j}^\dagger \rho_B) = 0 \\ \langle b_{\bar{k},j} b_{\bar{k},j}^\dagger \rangle &= Tr_B (b_{\bar{k},j} b_{\bar{k},j}^\dagger \rho_B) = \delta_{\bar{k},\bar{k}'} (1 + N_j(\omega_{\bar{k}})) \\ \langle b_{\bar{k},j}^\dagger b_{\bar{k},j} \rangle &= Tr_B (b_{\bar{k},j}^\dagger b_{\bar{k},j} \rho_B) = \delta_{\bar{k},\bar{k}'} N_j(\omega_{\bar{k}}),\end{aligned}$$

เมื่อ $N_j(\omega_{\bar{k}}) = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\bar{k}}} - 1}$ เป็นการกระจายของพลังค์ (Planck distribution) จะได้สมการที่ (2.46) เป็น

$$\sum_{\bar{k}} |g_{\bar{k}}^{(j)}|^2 \int_0^\infty e^{-i(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu)s'} \langle b_{\bar{k},j} b_{\bar{k},j}^\dagger \rangle ds' = \sum_{\bar{k}} |g_{\bar{k}}^{(j)}|^2 \int_0^\infty e^{-i(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu)s'} (1 + N_j(\omega_{\bar{k}})) ds'. \quad (2.47)$$

กำหนดให้ $|g_{\bar{k}}^{(j)}|^2 = \frac{1}{V} G_j(\omega_{\bar{k}}, \theta)$ จะได้ว่า

$$\sum_{\bar{k}} |g_{\bar{k}}^{(j)}|^2 \int_0^\infty e^{-i(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu)s'} \langle b_{\bar{k},j} b_{\bar{k},j}^\dagger \rangle ds' = \frac{1}{V} \sum_{\bar{k}} G_j(\omega_{\bar{k}}, \theta) \int_0^\infty e^{-i(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu)s'} (1 + N_j(\omega_{\bar{k}})) ds'. \quad (2.48)$$

สำหรับอ่างความร้อนที่เป็นสนามโฟตอน (photon field) ที่มี $\omega_{\bar{k}} = c|\bar{k}|$ สามารถพิจารณา $\sum_{\bar{k}}$ ในรูปแบบลิมิตความต่อเนื่อง (continuum limit) ได้เป็น[†]

$$\frac{1}{V} \sum_{\bar{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty d\omega_{\bar{k}} \omega_{\bar{k}}^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (2.49)$$

ดังนั้น สมการที่ (2.46) สามารถประมาณได้เป็น

$$\begin{aligned}\sum_{\bar{k}, \bar{k}'} \int_0^t e^{i\omega_\mu s'} Tr_B \left\{ f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s')) \rho_B \right\} ds' \\ \approx \frac{2\pi}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty \int_0^\pi G_j(\omega_{\bar{k}}, \theta) \omega_{\bar{k}}^2 \sin \theta (1 + N_j(\omega_{\bar{k}})) \left[\int_0^\infty e^{-i(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu)s'} ds' \right] d\omega_{\bar{k}} d\theta. \quad (2.50)\end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์

$$\int_0^\infty e^{\pm i(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu)s'} ds' = \pi \delta(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu) \pm i \frac{PV}{(\omega_{\bar{k}} - \omega_\mu)} \quad (2.51)$$

เมื่อ PV เป็นค่ามุกสำคัญโคชี (Cauchy principal value) ซึ่งจะนำไปสู่เทอมที่เทียบเคียงได้กับการเลื่อนแลมบ์ (Lamb shift) และการเลื่อนสตาร์ค (Stark shift) ซึ่งมีค่าน้อยมากจึงสามารถละทิ้งได้ (Breuer & Petruccione, 2002) สมการที่ (2.50) โดยอาศัยสมการที่ (2.51) จึงเขียนได้เป็น

[†] ผลสุดท้ายของการคำนวณยังคงเป็นจริงแม้ว่าอ่างความร้อนจะไม่ใช่สนามโฟตอน

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{k}, \bar{k}'} \int_0^t e^{i\omega_{\mu} s'} Tr_B \left\{ f_j^{(\bar{k})}(\omega_{\bar{k}} t) f_j^{\dagger(\bar{k}')}(\omega_{\bar{k}'}(t-s')) \rho_B \right\} ds' \\ = \frac{2\pi}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^{2\pi} G_j(\omega_{\mu}, \theta) \omega_{\mu}^2 \sin \theta d\theta (1 + N_j(\omega_{\mu})) \end{aligned} \quad (2.52)$$

นิยามให้ $\frac{2\pi}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^{2\pi} G_j(\omega_{\mu}, \theta) \omega_{\mu}^2 \sin \theta d\theta =: \frac{1}{2} \gamma_j(\omega_{\mu})$ ซึ่งแสดงถึง ความแรงคู่ควบ

(coupling strength) ระหว่างคิวบิตตัวที่ j กับอ่างความร้อน โดยในเบื้องต้นจะกำหนดให้ $\gamma_j(\omega_{\mu})$ ไม่ขึ้นกับความถี่เปลี่ยนสถานะ ω_{μ}^{\dagger} ซึ่งทำให้สมการที่ (2.45) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S^{(I)}(t) = \sum_{\mu=1}^2 \sum_{j=A}^B \left[J^{(j)}(-\omega_{\mu}) \left(V_j(\omega_{\mu}) \rho_S^{(I)}(t) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) - \frac{1}{2} V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) V_j(\omega_{\mu}) \rho_S^{(I)}(t) - \frac{1}{2} \rho_S^{(I)}(t) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) V_j(\omega_{\mu}) \right) \right. \\ \left. + J^{(j)}(\omega_{\mu}) \left(V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) \rho_S^{(I)}(t) V_j(\omega_{\mu}) - \frac{1}{2} V_j(\omega_{\mu}) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) \rho_S^{(I)}(t) - \frac{1}{2} \rho_S^{(I)}(t) V_j(\omega_{\mu}) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\text{เมื่อ } J^{(j)}(\omega_{\mu}) = \gamma_j N_j(\omega_{\mu}) = \gamma_j \left(\frac{1}{e^{\beta_j \omega_{\mu}} - 1} \right), \quad J^{(j)}(-\omega_{\mu}) = \gamma_j (1 + N_j(\omega_{\mu})) = \gamma_j \left(\frac{e^{\beta_j \omega_{\mu}}}{e^{\beta_j \omega_{\mu}} - 1} \right) \quad (2.54)$$

จากนั้นนำสมการที่ (2.53) ซึ่งอยู่ในภาพอันตรกิริยามาทำการแปลงกลับให้อยู่ในภาพชเรอดิงเงอร์ (Schrödinger picture) ได้เป็น

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + e^{-iH_S t} \left(\frac{d}{dt} \rho_S^{(I)}(t) \right) e^{iH_S t} \quad (2.55)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + L_A(\rho_S(t)) + L_B(\rho_S(t)) \quad (2.56)$$

เมื่อตัวดำเนินการ L_j คือ ตัวดำเนินการการกระจาย (dissipation operator) ของคิวบิตตัวที่ j โดย

$$\begin{aligned} L_j(\rho_S(t)) = \sum_{\mu=1}^2 \left[J^{(j)}(-\omega_{\mu}) \left(V_j(\omega_{\mu}) \rho_S(t) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) - \frac{1}{2} V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) V_j(\omega_{\mu}) \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) V_j(\omega_{\mu}) \right) \right. \\ \left. + J^{(j)}(\omega_{\mu}) \left(V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) \rho_S(t) V_j(\omega_{\mu}) - \frac{1}{2} V_j(\omega_{\mu}) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) V_j(\omega_{\mu}) V_j^{\dagger}(\omega_{\mu}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

เมื่อพิจารณาตัวแทนเมทริกซ์ของ $\rho_S(t)$ ในฐานหลัก $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle, |E_4\rangle\}$ จะได้สมาชิกทแยงมุม (diagonal elements) ของตัวดำเนินการความหนาแน่นลดรูป สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของเมทริกซ์เป็น

[‡] ข้อกำหนดนี้ตรงกับกรณีของความหนาแน่นสเปกตรัมสม่ำเสมอ (uniform spectral density)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) \\ \rho_{22}(t) \\ \rho_{33}(t) \\ \rho_{44}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[X_1^- + Y_2^-] & X_1^+ & Y_2^+ & 0 \\ X_1^- & -[X_1^+ + Y_2^-] & 0 & Y_2^+ \\ Y_2^- & 0 & -[X_1^- + Y_2^+] & X_1^+ \\ 0 & Y_2^- & X_1^- & -[X_1^+ + Y_2^+] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) \\ \rho_{22}(t) \\ \rho_{33}(t) \\ \rho_{44}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\text{โดยที่} \quad X_1^\pm = J^{(1)}(\pm\omega_1) \cos^2 \theta + J^{(2)}(\pm\omega_1) \sin^2 \theta, \quad (2.59)$$

$$Y_2^\pm = J^{(1)}(\pm\omega_2) \sin^2 \theta + J^{(2)}(\pm\omega_2) \cos^2 \theta, \quad (2.60)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \sin \theta = \frac{2g}{\sqrt{(R-\delta)^2 + 4g^2}}, \quad \cos \theta = \frac{R-\delta}{\sqrt{(R-\delta)^2 + 4g^2}}; \quad R = \sqrt{\delta^2 + 4g^2}.$$

สมการที่ (2.58) มีผลเฉลยเป็น (Sinaysky, Petruccione, & Burgarth, 2008)

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}(t) \\ \rho_{22}(t) \\ \rho_{33}(t) \\ \rho_{44}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) \\ \rho_{22}(0) \\ \rho_{33}(0) \\ \rho_{44}(0) \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ a_{ij} มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11} &= (X_1^+ + X_1^- e^{-\Omega_1 t})(Y_2^+ + Y_2^- e^{-\Omega_2 t}) & a_{31} &= (X_1^+ + X_1^- e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})Y_2^- \\ a_{12} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})X_1^+(Y_2^+ + Y_2^- e^{-\Omega_2 t}) & a_{32} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})X_1^+Y_2^- \\ a_{13} &= (X_1^+ + X_1^- e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})Y_2^+ & a_{33} &= (X_1^+ + X_1^- e^{-\Omega_1 t})(Y_2^- + Y_2^+ e^{-\Omega_2 t}) \\ a_{14} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})X_1^+Y_2^+ & a_{34} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})X_1^+(Y_2^- + Y_2^+ e^{-\Omega_2 t}) \\ a_{21} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})X_1^-(Y_2^+ + Y_2^- e^{-\Omega_2 t}) & a_{41} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})X_1^-Y_2^- \\ a_{22} &= (X_1^- + X_1^+ e^{-\Omega_1 t})(Y_2^+ + Y_2^- e^{-\Omega_2 t}) & a_{42} &= (X_1^- + X_1^+ e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})Y_2^- \\ a_{23} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})X_1^-Y_2^+ & a_{43} &= (1 - e^{-\Omega_1 t})X_1^-(Y_2^- + Y_2^+ e^{-\Omega_2 t}) \\ a_{24} &= (X_1^- + X_1^+ e^{-\Omega_1 t})(1 - e^{-\Omega_2 t})Y_2^+ & a_{44} &= (X_1^- + X_1^+ e^{-\Omega_1 t})(Y_2^- + Y_2^+ e^{-\Omega_2 t}) \end{aligned}$$

โดยที่

$$\Omega_1 = X_1^+ + X_2^-, \quad \Omega_2 = Y_2^+ + Y_2^- \quad (2.62)$$

สำหรับสมาชิกนอกแนวทแยงมุม (off-diagonal elements) จะอยู่ในรูป

$$\rho_{ij} = e^{Is_{ij}} \rho_{ij}(0) \quad (2.63)$$

เมื่อ s_{ij} เป็นจำนวนเชิงซ้อน

4. ความบริสุทธิ์สัมพัทธ์และลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม

ปัญหาลิมิตอัตราเร็วเชิงควอนตัมเริ่มจากคำถามที่ว่า “ระบบควอนตัมสามารถวิวัฒน์จากสถานะเริ่มต้นไปจนถึงสถานะตั้งฉาก (orthogonal state) ได้เร็วที่สุดเท่าใด” หนึ่งในคำตอบของปัญหานี้แนะนำโดย มาร์โกลัส (Margolus) และ เลวิติน (Levitin) (Margolus & Levitin, 1998) ซึ่งแสดงว่าเวลาที่ เป็นขอบเขตล่างจะเป็นส่วนกลับของความแปรปรวน (variance) ในพลังงานของระบบดังกล่าว

$$\tau \geq \tau_{\min} = \frac{\pi \hbar}{2 \Delta H} \quad ; \quad \Delta H = \sqrt{(\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2)}, \quad (2.64)$$

ซึ่งสมการที่ (2.64) แสดงว่าการวิวัฒน์ของระบบควอนตัมใช้เวลาอย่างน้อยที่สุดเท่าใดจากสถานะเริ่มต้นจนถึงสถานะตั้งฉาก τ_{\min} นี้เรียกว่า ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม (Quantum speed limit time) อย่างไรก็ตาม สมการที่ (2.64) นี้ใช้ได้เฉพาะกับระบบควอนตัมแบบปิด

ในกรณีของระบบควอนตัมแบบเปิด พิจารณาความบริสุทธิ์สัมพัทธ์ (relative purity) (Audenaert, 2012)

$$f(t) = \frac{\text{Tr}[\rho(0)\rho(t)]}{\text{Tr}[\rho^2(0)]}, \quad (2.65)$$

โดยที่ $\rho(0)$ เป็นสถานะเริ่มต้นและ $\rho(t)$ เป็นสถานะเป้าหมาย ทั้งนี้สังเกตว่า $f(t) = 1$ เมื่อ $\rho(0) = \rho(t)$ และ $f(t) = 0$ เมื่อ $\rho(0)$ และ $\rho(t)$ ตั้งฉากกัน^S

สำหรับงานวิจัยนี้จะพิจารณาความบริสุทธิ์สัมพัทธ์ของการวิวัฒน์จากเวลา t ไปยัง $t + \tau_D$ ($\tau_D > 0$) ในรูป

$$f(t + \tau_D) = \frac{\text{Tr}[\rho(t + \tau_D)\rho(t)]}{\text{Tr}[\rho^2(t)]}, \quad (2.66)$$

โดย τ_D นี้บางครั้งเรียกว่า เวลาขับเคลื่อน (driven time) (Zhang et al., 2014) จากสมการที่ (2.66) อนุพันธ์ของ $f(t)$ เทียบกับเวลาจะอยู่ในรูป

$$\dot{f}(t) = \frac{\text{Tr}[\rho(t)\dot{\rho}(t)]}{\text{Tr}[\rho^2(t)]}, \quad (2.67)$$

เมื่อ $\rho(t)$ เป็นสถานะเริ่มต้น โดยสามารถเป็นสถานะบริสุทธิ์หรือผสมก็ได้

จากอสมการเทรซของฟอน นอยมันน์ (von Neumann trace inequality) สำหรับตัวดำเนินการคือ

$$|\text{Tr}(A_1 A_2)| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_{1,i} \sigma_{2,i} \quad (2.68)$$

^S ในที่นี้ผลคูณภายใน (inner product) ของตัวดำเนินการ A และ B นิยามเป็น $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$

เมื่ออสมการนี้ครอบคลุมสำหรับทุกๆ เมทริกซ์ $n \times n$ เชิงซ้อน A_1 และ A_2 โดยมีค่าเอกฐาน (singular values) เรียงลำดับของ A_1 และ A_2 ตามลำดับ เป็น $\sigma_{1,1} \geq \dots \geq \sigma_{1,n}$ และ $\sigma_{2,1} \geq \dots \geq \sigma_{2,n}$ โดยค่าเอกฐานของตัวดำเนินการ A คือ ค่าไอเกนของ $\sqrt{A^\dagger A}$ ในกรณีที่ A เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน ค่าเอกฐานสามารถหาได้จากค่าสัมบูรณ์ของค่าไอเกนของตัวดำเนินการ A

โดยอาศัยสมการที่ (2.68) สมการที่ (2.67) เขียนได้เป็น

$$|\dot{f}(t)| \leq \frac{1}{\text{Tr}[\rho^2(t)]} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t), \quad (2.69)$$

โดยที่ $\sigma_i(t)$ เป็นค่าเอกฐานของ $d\rho/dt$ และ $\rho_i(t)$ เป็นค่าเอกฐานของ $\rho(t)$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ (2.69) จาก t ถึง $t + \tau_D$ จะได้

$$\left| \int_t^{t+\tau_D} \dot{f}(t') dt' \right| \leq \int_t^{t+\tau_D} |\dot{f}(t')| dt' \leq \int_t^{t+\tau_D} \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t')}{\text{Tr}[\rho^2(t')]} dt' = \frac{1}{\text{Tr}[\rho^2(\tilde{t})]} \int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt',$$

เมื่อ $t < \tilde{t} < t + \tau_D$ ทำการอินทิเกรตทางซ้ายมือของอสมการข้างต้นจะได้

$$\begin{aligned} |f(t + \tau_D) - 1| &\leq \frac{1}{\text{Tr}[\rho^2(\tilde{t})]} \int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt' \\ &\geq \frac{|f(t + \tau_D) - 1| \text{Tr}[\rho^2(\tilde{t})]}{\int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt'} \\ \tau_D &\geq \frac{|f(t + \tau_D) - 1| \text{Tr}[\rho^2(\tilde{t})]}{\frac{1}{\tau_D} \int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt'} \\ \tau_D &\geq \frac{|f(t + \tau_D) - 1| \text{Tr}[\rho^2(\tilde{t})]}{\sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t)} \end{aligned}$$

สมมติว่าค่าเฉลี่ย $\sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t)$ ไม่ขึ้นกับ τ_D ** ดังนั้นหากให้ τ_D มีค่าน้อยๆ จะได้ว่า $\tilde{t} \approx t$

และได้อสมการเป็น

$$\tau_D \geq \frac{|f(t + \tau_D) - 1| \text{Tr}[\rho^2(t)]}{\sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t)} \quad (2.70)$$

** ค่าเฉลี่ยดังกล่าวจะไม่ขึ้นกับ τ_D แน่ๆ หาก τ_D มีค่าน้อยพอ

สมการที่ (2.70) นี้ให้ขอบเขตล่างของเวลาในการวิวัฒนาการ ซึ่งเรียกว่า ระยะเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัม (τ_{QSL}) เป็น

$$\tau_{QSL} = \frac{|f(t+\tau_D) - 1| \text{Tr}[\rho^2(t)]}{\sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t)} \quad (2.71)$$

เมื่อ $f(t+\tau_D)$ หาได้จากสมการที่ (2.66) และ $\sigma_i(t)$ และ $\rho_i(t)$ เป็นค่าเอกฐานของ $d\rho(t)/dt$ และ $\rho(t)$ ตามลำดับ สมการที่ (2.70) หรือ (2.71) ให้ความหมายว่า สำหรับค่าความบริสุทธิ์สัมพัทธ์ $f(t+\tau_D)$ หนึ่งๆ เวลาในการวิวัฒนาการ τ_D จะมีค่าไม่น้อยกว่า τ_{QSL} หรือพูดอีกนัยหนึ่งคือ τ_{QSL} เป็นเวลาน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ ที่ระบบจะใช้ในการวิวัฒนาการจากสถานะ $\rho(t)$ ไปยัง $\rho(t+\tau_D)$ ที่กำหนดหนึ่งๆ



บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมของระบบหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน
2. ศึกษาเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมของระบบสองควิบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละควิบิตสัมผัสกับอ่างความร้อน
3. กระบวนการวิวัฒน์แบบต่อเนื่องและบทนิยามที่เกี่ยวข้อง

1. ศึกษาเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมของระบบหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน

พิจารณาแฮมิลโตเนียนของระบบรวมของหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน คือ

$$H = H_S + H_B + H_I, \quad (3.1)$$

เมื่อแฮมิลโตเนียนของควิบิต (ระบบควอนตัม) คือ $H_S = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_Z$, (3.2)

ส่วนแฮมิลโตเนียนของอ่างความร้อน คือ $H_B = \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k$, (3.3)

ซึ่งเปรียบเสมือนเซตอนุพันธ์ของตัวกวัดแกว่งฮาร์มอนิก

และแฮมิลโตเนียนอันตรกิริยา คือ $H_I = \hbar \left(\sigma_+ \otimes \sum_k g_k b_k + \sigma_- \otimes \sum_k g_k^* b_k^\dagger \right)$, (3.4)

สมการมาสเตอร์ของหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อนคือ (Breuer & Petruccione, 2002)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_S(t) = & -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + \gamma(N+1) \left(\sigma_- \rho_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) \sigma_+ \sigma_- \right) \\ & + \gamma N \left(\sigma_+ \rho_S(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) \sigma_- \sigma_+ \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

เมื่อ γ แสดงถึง ความแรงคู่ควบระหว่างควิบิตกับอ่างความร้อนตามสมการที่ (2.52) และ

$N = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ เป็นการกระจายของพลังค์

สมการที่ (3.5) มีผลเฉลยในฐานหลัก $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ เป็น

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} \rho_e(t) & \rho_{eg}(t) \\ \rho_{ge}(t) & \rho_g(t) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\text{โดยที่ } \rho_e(t) = \frac{1}{\gamma(N+1)(2N+1)} \left[N\gamma(N+1)(\rho_e(0) + \rho_g(0)) - \gamma(N+1)(N\rho_g(0) - (N+1)\rho_e(0))e^{-\gamma(2N+1)t} \right], \quad (3.7)$$

$$\rho_g(t) = \frac{1}{\gamma(N+1)(2N+1)} \left[(N+1)\gamma(N+1)(\rho_e(0) + \rho_g(0)) + \gamma(N+1)(N\rho_g(0) - (N+1)\rho_e(0))e^{-\gamma(2N+1)t} \right], \quad (3.8)$$

เมื่อ $\rho_e(0)$ เป็นประชากร (population) ของสถานะกระตุ้นที่ $t = 0$ และ $\rho_g(0)$ เป็นประชากรของสถานะพื้นๆที่ $t = 0$

นำสมการที่ (3.6) ไปแทนในสมการที่ (2.71) ได้เป็น^{††}

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{QSL}}{\tau_D} &= \frac{|f(t + \tau_D) - 1| \text{Tr}[\rho_S^2(t)]}{\int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt'} \\ &= \frac{|\text{Tr}(\rho_S(t + \tau_D) \rho_S(t)) - \text{Tr}(\rho_S^2(t))|}{\int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt'} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$= \left| \frac{1}{(2N+1)} \left[(\rho_e(0) + \rho_g(0)) + 2(N\rho_g(0) - (N+1)\rho_e(0))e^{-\gamma(2N+1)t} \right] \right|. \quad (3.10)$$

2. ลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมของระบบสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละคิวบิตสัมผัสกับอ่างความร้อน

ในกรณีของระบบควอนตัมที่ประกอบด้วยสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละคิวบิตสัมผัสกับอ่างความร้อน เมื่อให้สถานะเริ่มต้นของระบบ $\rho_S(0)$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมจะได้ว่า $\rho_S(t)$ ก็จะเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมด้วย โดยมีสมาชิกในแนวทแยงเป็น $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}$ และ ρ_{44} ตามลำดับ เมื่อ ρ_{ii} เหล่านี้หาได้จากสมการที่ (2.61)

ในกรณีนี้สมการที่ (2.71) เขียนได้เป็น

$$\frac{\tau_{QSL}}{\tau_D} = \frac{\left| \sum_{i=1}^4 (\rho_{ii}(t + \tau_D) \rho_{ii}(t)) - \sum_{i=1}^4 (\rho_{ii}^2(t)) \right|}{\int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt'} \quad (3.11)$$

^{††} ในที่นี้กำหนดให้ $\rho_{eg}(t) = \rho_{ge}(t) = 0$

เนื่องจากงานวิจัยนี้มุ่งหมายที่จะพิจารณาพฤติกรรมของกระบวนการวิวัฒนาการที่เวลา t ใดๆ แบบต่อเนื่อง นั่นคือ เราต้องพิจารณาการวิวัฒนาการของสถานะจาก $\rho(t)$ ไปยัง $\rho(t + \tau_D)$ เมื่อ τ_D มีค่าน้อยๆ ด้วยเหตุนี้ เมื่อทำการแทน ρ_{ii} ในสมการที่ (2.61) ลงในสมการที่ (3.11) แล้ว และพิจารณาที่ τ_D น้อยๆ ซึ่งในที่นี้คือ $\gamma\tau_D \ll 1$ จะได้ τ_{OSL}/τ_D ในรูป

$$\frac{\tau_{OSL}}{\tau_D} = \frac{\gamma^4 |f_{ii}(t)|}{4(\Omega_1\Omega_2)^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i(t)\rho_i(t)} \quad (3.12)$$

$$\text{เมื่อ } f_{11}(t) = \alpha_1\Omega_1(1-\alpha_1)\left[(1-\alpha_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}\right] + \alpha_2\Omega_2(1-\alpha_2)\left[(1-\alpha_1)^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2}\right], \quad (3.13)$$

สำหรับสถานะเริ่มต้นเป็น $\rho_s(0) = |E_1\rangle\langle E_1|$ หรือ $\rho_{11}(0) = 1$,

$$f_{22}(t) = -\beta_1\Omega_1(1+\beta_1)\left[(1-\alpha_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}\right] + \alpha_2\Omega_2(1-\alpha_2)\left[(1+\beta_1)^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2}\right], \quad (3.14)$$

สำหรับสถานะเริ่มต้นเป็น $\rho(0) = |E_2\rangle\langle E_2|$ หรือ $\rho_{22}(0) = 1$,

$$f_{33}(t) = \alpha_1\Omega_1(1-\alpha_1)\left[(1+\beta_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}\right] - \beta_2\Omega_2(1+\beta_2)\left[(1-\alpha_1)^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2}\right], \quad (3.15)$$

สำหรับสถานะเริ่มต้นเป็น $\rho(0) = |E_3\rangle\langle E_3|$ หรือ $\rho_{33}(0) = 1$,

$$f_{44}(t) = -\beta_1\Omega_1(1+\beta_1)\left[(1+\beta_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}\right] - \beta_2\Omega_2(1+\beta_2)\left[(1+\beta_1)^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2}\right], \quad (3.16)$$

สำหรับสถานะเริ่มต้นเป็น $\rho(0) = |E_4\rangle\langle E_4|$ หรือ $\rho_{44}(0) = 1$.

ในที่นี้พารามิเตอร์ α_1 , β_1 , α_2 และ β_2 มีนิยามดัง

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1\right) e^{-\Omega_1 t}, \\ \alpha_2 &= \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1\right) e^{-\Omega_2 t}, \\ \beta_1 &= \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} - 1\right) e^{-\Omega_1 t}, \\ \beta_2 &= \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} - 1\right) e^{-\Omega_2 t}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ในการจัดรูปชุดสมการที่ (3.13) - (3.16) สามารถดูรายละเอียดได้ในภาคผนวก โดยการได้มาของสมการที่ (3.12) และชุดสมการดังกล่าว ได้มีการกำหนดให้อุณหภูมิของทั้งสองอ่างความร้อนมีค่า

เท่ากัน นั่นคือ $T_A = T_B = T$ ซึ่งมีความหมายเสมือนกับการมีอ่างความร้อนเดียวที่อุณหภูมิ T สำหรับคิวบิตทั้งสอง ในกรณีนี้สมการที่ (2.62) สามารถลดรูปได้เป็น

$$\Omega_i = \gamma(2N(\omega_i) + 1) \quad (3.18)$$

เมื่อ $i=1,2$ โดยในลำดับแรก จะกำหนดให้ $\omega_i > 0$ หรือก็คือ $\omega > g$ ก่อน

3. กระบวนการวิวัฒนาการแบบต่อเนื่องและบทนิยามที่เกี่ยวข้อง

จากสมการที่ (3.9) หรือ (3.11) สังเกตว่า τ_{QSL}/τ_D โดยทั่วไปแล้วอาจยังขึ้นกับ τ_D อยู่ สำหรับกรณีของหนึ่งคิวบิตถือเป็นกรณีพิเศษที่ไม่ขึ้นกับ τ_D (ตามสมการที่ (3.10)) เพราะผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้มี τ_D ซึ่งตัดกันทั้งในเศษและส่วน ในขณะที่สมการที่ (3.12) ไม่ขึ้นกับ τ_D เฉพาะที่ τ_D มีค่าน้อยๆ ($\gamma\tau_D \ll 1$) ด้วยเหตุนี้ หากปริมาณ τ_{QSL}/τ_D เป็นปริมาณที่เหมาะสมในการพิจารณากระบวนการวิวัฒนาการที่พิจารณาแบบต่อเนื่องในแต่ละขณะที่ระบบวิวัฒนาการไปจริง τ_{QSL}/τ_D ก็ไม่ควรขึ้นกับ τ_D อย่างน้อยเมื่อ τ_D มีค่าน้อยๆ เพื่อให้เห็นจริงในข้อสังเกตนี้พิจารณาสมการที่ (3.9) เมื่อ τ_D มีค่าน้อยๆ ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{QSL}}{\tau_D} &= \frac{|\text{Tr}(\rho(t+\tau_D)\rho(t)) - \text{Tr}(\rho^2(t))|}{\int_t^{t+\tau_D} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t') \rho_i(t') dt'} \\ &\approx \frac{|\text{Tr}[(\rho(t) + \tau_D \dot{\rho}(t))\rho(t)] - \text{Tr}[\rho^2(t)]|}{\tau_D \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t) \right)} \\ &= \frac{\text{Tr}[\dot{\rho}(t)\rho(t)]}{\sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t)} =: S(t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

เห็นได้ชัดว่า τ_{QSL}/τ_D โดยทั่วไปแล้วจะไม่ขึ้นกับ τ_D เมื่อ τ_D มีค่าน้อยๆ^{##} ด้วยเหตุนี้เราจะอาศัยฟังก์ชัน $S(t)$ ซึ่งขอเรียกว่า ฟังก์ชันอัตราเร็ว (speed function) ในการกำหนดนิยามเกี่ยวกับกระบวนการวิวัฒนาการดังต่อไปนี้

^{##} หากนำ $\rho(t)$ ตามสมการที่ (2.61) มาแทนในสมการที่ (3.19) จะได้ผลเช่นเดียวกับสมการที่ (3.12)-(3.16) และ τ_D ซึ่งมีค่าน้อยๆ สำหรับกรณีนี้ คือ $\tau_D \ll 1/\gamma$.

บทนิยาม : สำหรับการวิวัฒนาการเชิงควอนตัมของระบบควอนตัมแบบเปิด เราเรียกกระบวนการวิวัฒนาการ ณ ระยะเวลาใดๆ (instantaneous evolution process) ว่า

เป็นกระบวนการเพิ่มอัตราเร็ว (speed up process) ถ้า $\dot{S}(t) < 0$,

เป็นกระบวนการลดอัตราเร็ว (speed down process) ถ้า $\dot{S}(t) > 0$,

เป็นกระบวนการคงที่ (stationary process) ถ้า $\dot{S}(t) = 0$,

เมื่อ $S(t)$ นิยามตามสมการที่ (3.19)

ในงานวิจัยหลายชิ้น อาทิ (Deffner & Lutz, 2013; Wu, Yan, Wu, & Hao, 2016) ได้ให้นิยามว่า ระบบจะมีสมรรถภาพศักยภาพ (potential capacity) ในการเพิ่มอัตราเร็ว ถ้า $\tau_{OSL}/\tau_D < 1$ ทั้งนี้พิจารณาจากความเป็นจริงที่ว่า เวลาที่ใช้ในการวิวัฒนาการ ระหว่างสองสถานะควอนตัมที่กำหนดโดยทั่วไปแล้วไม่ได้มีค่าเดียวสำหรับระบบควอนตัมแบบเปิดและขอบเขตล่างของเวลาเหล่านี้ คือ τ_{OSL} (Meng, Wu, & Guo, 2015) อย่างไรก็ดี ผลการศึกษาที่จะกล่าวถึงในบทที่สี่ แสดงว่า เมื่อระบบเข้าสู่สมดุลความร้อน ค่า τ_{OSL} อาจเท่ากับหนึ่งหรือน้อยกว่าหนึ่งก็ได้ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในขณะที่ระบบที่กำลังเข้าสู่สมดุลความร้อน ไม่ควรจะมีกระบวนการเพิ่มหรือลดอัตราเร็วใดๆ แล้ว เนื่องจากสถานะของระบบแทบจะไม่เปลี่ยนแปลงแล้ว ด้วยเหตุนี้เราจึงให้นิยามใหม่ที่ชัดเจนขึ้นตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น และจะใช้นิยามนี้ในการวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการที่จะกล่าวถึงต่อไปในบทที่สี่

บทที่ 4

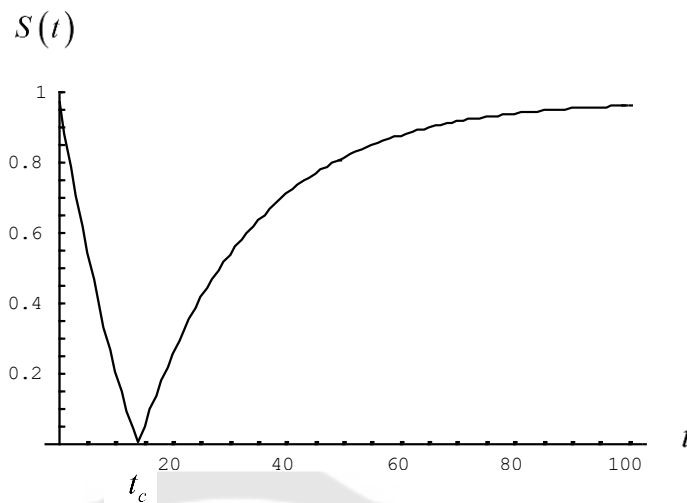
ผลการดำเนินงานวิจัย

การวิจัยนี้ศึกษาลิมิตเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมในระบบควอนตัมหนึ่งควิบิต และสองควิบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกัน โดยแต่ละควิบิตสัมผัสกับอ่างความร้อนภายใต้การประมาณบอร์น-มาร์คอฟ ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยโดยการศึกษาจากการคำนวณผ่านพารามิเตอร์ต่างๆ จนกระทั่งได้ทำการวิเคราะห์และเรียบเรียงเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดดังนี้

1. การวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการของระบบหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน
2. การพิสูจน์การมีอยู่ของยอดวงกลับของระบบหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน
3. การวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการของระบบสองควิบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละควิบิตสัมผัสกับอ่างความร้อน

1. การวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการของระบบหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน

พิจารณาระบบหนึ่งควิบิตที่เริ่มจากสถานะกระตุ้น คือ $\rho_e(0) = 1$ สมการที่ (3.10) ให้กราฟระหว่าง $S(t)$ กับ t ตามภาพประกอบ 2 สำหรับค่าอุณหภูมิของอ่างความร้อน $kT = 0.1$ ซึ่งมีค่าพลังงานความร้อนต่ำเมื่อเปรียบเทียบกับค่าพลังงานของควิบิต $\hbar\omega = 1$ พบว่าค่า $S(t)$ มีค่าลดลงไปเรื่อยๆ แสดงว่า ในช่วงเวลาเริ่มต้นจนถึงประมาณ $t_c \approx 14$ วินาที เกิดกระบวนการเร่ง (acceleration process) หรือ กระบวนการเพิ่มความอัตราเร็ว (speed up process) แต่ทันทีเมื่อพ้นเวลา t_c ค่า $S(t)$ กลับมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จากศูนย์จนเข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่งเมื่อระยะเวลาผ่านไปนานๆ แสดงว่า ระบบควอนตัมเกิดกระบวนการหน่วง (deceleration process) หรือ กระบวนการลดอัตราเร็ว (speed down process) จนกระทั่งเข้าสู่สถานะเชิงความร้อน

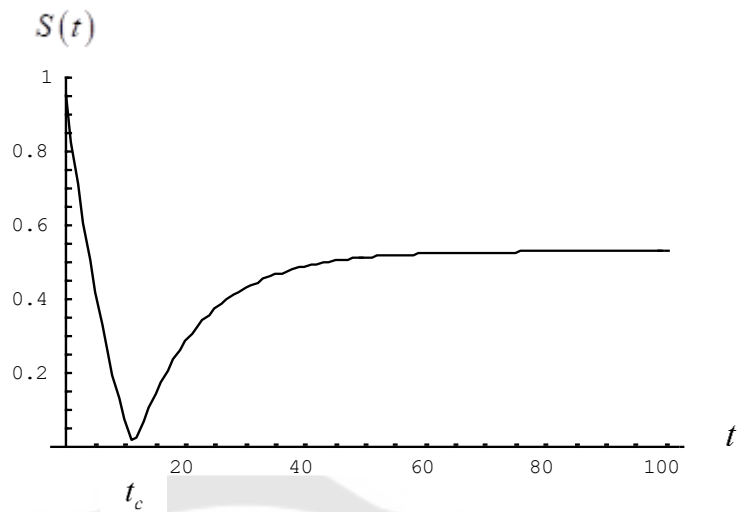


ภาพประกอบ 2 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_e(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.1$

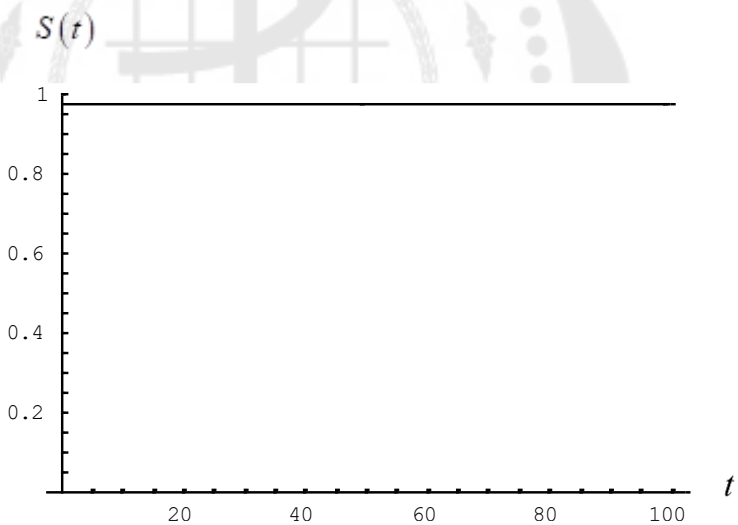
เมื่อสถานะเริ่มต้น $\rho_e(0) = 1$ ในภาพประกอบ 3 ที่มีค่าอุณหภูมิต่ำกว่าความร้อน $kT = 0.8$ และค่าพลังงานของคิวบิต $\hbar\omega = 1$ พบว่าค่า $S(t)$ มีค่าลดลงเรื่อยๆ แสดงว่า ในช่วงเวลาเริ่มต้นจนถึงประมาณ $t_c \approx 11$ วินาที ระบบควอนตัมเกิดกระบวนการเร่ง เมื่อเปรียบเทียบกับภาพประกอบ 2 ซึ่งมีค่าอุณหภูมิต่ำกว่า $kT = 0.1$ ปรากฏว่าที่อุณหภูมิต่ำกว่ามีความชันในช่วงกระบวนการเร่งมากกว่าที่อุณหภูมิต่ำกว่าแสดงว่า อุณหภูมิต่ำกว่ามีอิทธิพลทำให้เกิดกระบวนการเร่งได้มากกว่า จากภาพประกอบ 3 เมื่อเวลาผ่านไปพ้นเวลา t_c ค่า $S(t)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนเข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่งได้เร็วกว่าสถานการณ์ที่อุณหภูมิต่ำกว่า (ตามภาพประกอบ 2) แสดงว่า ระบบควอนตัมในกรณีนี้เข้าสู่สถานะเชิงความร้อนได้เร็วกว่า

ในภาพประกอบ 2 และ 3 จะเรียกบริเวณกราฟที่เป็นยอดแหลมๆ ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงจากกระบวนการเร่งไปสู่กระบวนการหน่วงอย่างฉับพลันว่า “ยอดวกกลับ” (cusp)

เมื่อสถานะเริ่มต้น $\rho_e(0) = 1$ ภาพประกอบ 4 ที่มีค่าอุณหภูมิต่ำกว่าความร้อน $kT = 0.1$ และค่าพลังงานของคิวบิต $\hbar\omega = 1$ แสดงว่า $S(t)$ มีค่าประมาณเกือบหนึ่งในทุกๆ เวลา ซึ่งหมายความว่าระบบควอนตัมนี้เข้าสู่สถานะเชิงความร้อนในทันทีโดยแทบจะไม่มีกระบวนการเร่งที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากสถานะเริ่มต้นเป็นสถานะพื้นซึ่งเป็นสถานะที่พอใช้ประมาณสำหรับสถานะเชิงความร้อนได้ที่อุณหภูมิต่ำพอ

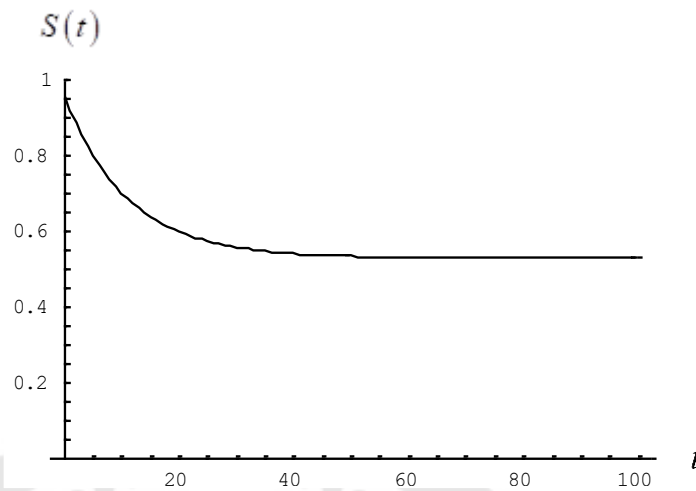


ภาพประกอบ 3 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_e(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.8$



ภาพประกอบ 4 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_g(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.1$

เมื่อสถานะเริ่มต้น $\rho_g(0) = 1$ ภาพประกอบ 5 ที่มีค่าอุณหภูมิอย่างความร้อน $kT = 0.8$ และค่าพลังงานของคิวบิต $\hbar\omega = 1$ แสดงว่า $S(t)$ มีค่าลดลงและเข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่ง ซึ่งหมายความว่า ระบบควอนตัมเกิดกระบวนการเร่งแล้วค่อยๆ เข้าสู่สถานะเชิงความร้อนโดยไม่มีกระบวนการหน่วงเกิดขึ้น



ภาพประกอบ 5 แสดงกราฟที่สถานะเริ่มต้น $\rho_g(0) = 1$ ค่า $\hbar\omega = 1$ ค่าความแรงคู่ควบ $\gamma = 0.05$ ค่าอุณหภูมิ $kT = 0.8$

2. การพิสูจน์การมีอยู่ของยอดวงกลับของระบบหนึ่งควิบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อน จากสมการที่ (3.10) กำหนดให้ $A = \rho_e(0) + \rho_g(0)$ และ $B = 2(N\rho_g(0) - (N+1)\rho_e(0))$ จะเห็นได้ว่า เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอ (necessary and sufficient condition) ที่จะทำให้เทอมในเครื่องหมายสัมบูรณ์เปลี่ยนค่าจากลบเป็นบวกหรือก็คือเกิดยอดวงกลับคือ $B < 0$ และ $|B| > A$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} -2(N\rho_g(0) - (N+1)\rho_e(0)) &> \rho_e(0) + \rho_g(0) \\ -(2N+1)\rho_g(0) + (2N+1)\rho_e(0) &> 0 \end{aligned}$$

หรือก็คือ

$$\rho_g(0) < \rho_e(0) \quad (4.1)$$

เพราะฉะนั้น เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการเกิดยอด คือ $\rho_g(0) < \rho_e(0)$ ซึ่งสอดคล้องกับผลในภาพประกอบ 2 และ 3 ที่มี $\rho_e(0) = 1$ ซึ่งมียอดวงกลับ และภาพประกอบที่ 4 และ 5 ที่มี $\rho_g(0) = 1$ ซึ่งไม่เกิดยอดวงกลับ สังเกตว่าที่เวลา $t \rightarrow \infty$ สมการที่ (3.10) จะเข้าสู่

$$S(t) \rightarrow \left| \frac{1}{(2N+1)} [(\rho_e(0) + \rho_g(0))] \right| = \frac{1}{2N+1}$$

ซึ่งมีค่า $S(t) \approx 1$ ที่อุณหภูมิต่ำๆ และ $S(t) < 1$ เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น นอกจากการพิสูจน์เงื่อนไขการมีอยู่ของยอดวงกลับแล้ว เรายังสามารถหาค่าเวลาที่ยอดวงกลับได้อีกด้วย เช่นกรณีของภาพประกอบ 2 เมื่อแทน $\rho_c(0) = 1$ และ $\rho_g(0) = 0$ ที่ $kT = 0.1$ และ $\hbar\omega = 1$ ลงในสมการที่ (3.10) เวลาที่ยอดวงกลับ (t_c) หาได้จาก

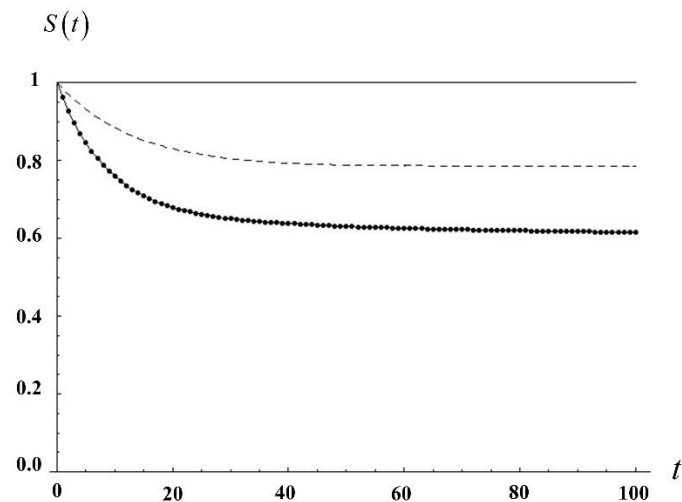
$$S(t_c) = \left| \frac{1}{(2N+1)} \left[(1-2(N+1))e^{-\gamma(2N+1)t_c} \right] \right| = 0 \text{ หรือ } t_c = \frac{\ln(2(N+1))}{\gamma(2N+1)} \approx 14 \text{ วินาที}$$

3. การวิเคราะห์กระบวนการวิวัฒนาการของระบบสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกันโดยแต่ละคิวบิตสัมผัสกับอ่างความร้อน

นำสมการที่ (3.12) มาคำนวณเชิงตัวเลขโดยอาศัยชุดสมการที่ (3.13) - (3.16) ซึ่งสอดคล้องกับสถานะเริ่มต้นต่างๆ จะได้กราฟระหว่าง $S(t)$ กับ t ในช่วงเวลาจาก $t = 0$ ถึง $t = 100$ วินาที ในกรณีต่างๆดังต่อไปนี้

3.1. กรณีที่ 1 ($\rho_{44}(0) = 1$)

ในกรณีนี้ สถานะเริ่มต้นเป็นสถานะพื้น คือ $\rho_S(0) = |E_4\rangle\langle E_4|$ หรือ $\rho_{44}(0) = 1$ เมื่อนำสมการที่ (3.16) แทนในสมการที่ (3.12) จะได้กราฟในช่วงเวลาจาก $t = 0$ ถึง $t = 100$ ดังภาพประกอบ 6 สำหรับเส้นทึบ (solid line) ที่อุณหภูมิต่ำ $kT = 0.1$ พบว่าค่า $S(t) \approx 1$ แสดงว่ากระบวนการวิวัฒนาการเป็นกระบวนการคงที่ซึ่งเข้าสู่สมดุลความร้อนแทบจะทันที ในขณะที่ $kT = 0.5$ (เส้นประ) และ $kT = 0.8$ (เส้นจุด) $S(t)$ มีค่าลดลงเรื่อยๆ ซึ่งแสดงว่า กระบวนการวิวัฒนาการเป็นกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วแล้วจึงค่อยๆ เข้าสู่กระบวนการคงที่ในขณะที่ระบบกำลังเข้าสู่สมดุลความร้อน



ภาพประกอบ 6 สถานะเริ่มต้น $\rho_{44}(0)=1$ กำหนดให้ $\hbar g=0.1$ คงที่ และ $kT=0.1$ (เส้นทึบ), $kT=0.5$ (เส้นประ), $kT=0.8$ (เส้นจุด) พารามิเตอร์อื่นๆ : $\hbar\omega=1$, $\gamma=0.05$.

3.2. กรณีที่ 2 ($\rho_{22}(0)=1$)

ในกรณีนี้ สถานะเริ่มต้นคือ $\rho_{22}(0)=|E_2\rangle\langle E_2|$ หรือ $\rho_{22}(0)=1$ เมื่อนำสมการที่ (3.14) แทนค่าในสมการที่ (3.12) จะได้กราฟดังภาพประกอบ 7(ก) จะเห็นว่ากระบวนการวิวัฒนาการสำหรับสถานะเริ่มต้น $\rho_{22}(0)=1$ มีรูปแบบที่แตกต่างกับของสถานะเริ่มต้น $\rho_{44}(0)=1$ ในภาพประกอบ 6 อย่างชัดเจน นั่นก็คือ การมีอยู่ของยอดวงกลับ ที่เวลา t_c ภาพประกอบ 7(ก) แสดงให้เห็นว่า ที่เวลา $t < t_c$ กระบวนการวิวัฒนาการเป็นกระบวนการเพิ่มอัตราเร็ว และที่เวลา $t > t_c$ กระบวนการวิวัฒนาการเปลี่ยนไปเป็นกระบวนการลดอัตราเร็วแล้วจึงค่อยๆ สู่เข้าสู่สมดุลความร้อน สำหรับการมีอยู่ของยอดวงกลับนี้ ยังสามารถแสดงได้อีกด้วยว่า จะมีเพียงหนึ่งยอดเท่านั้น โดยรายละเอียดการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีดังต่อไปนี้

จาก α_2 และ β_1 ในสมการที่ (3.17) ค่า β_1 สามารถเขียนได้ในเทอมของ α_2 เป็น

$$\beta_1 = G\alpha_2^p, \quad (4.2)$$

เมื่อ $p = \Omega_1/\Omega_2 \geq 1$,

และ

$$G = \frac{\left(\frac{\Omega_1}{\gamma} - 1\right)}{\left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1\right)^p} < 1. \quad (4.3)$$

นำสมการที่ (4.2) แทนในสมการที่ (3.14) จะได้ $f_{22}(t)$ ในเทอมของ $\alpha_2(t)$ เป็น

$$f_{22}(t) = f_{22}(\alpha_2(t)) = -G\alpha_2^{p-1}p(1+G\alpha_2^p)[(1-\alpha_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}] + (1-\alpha_2)[(1+G\alpha_2^p)^2 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}] \quad (4.4)$$

บทตั้ง : $f_{22}(\alpha_2)$ เป็นฟังก์ชันลดทางเดียว (monotonic decreasing function)

การพิสูจน์ : จากสมการที่ (4.4) พิจารณาคอนุพันธ์เทียบกับ α_2 ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha_2} f_{22}(\alpha_2) &= -G(p-1)\alpha_2^{p-2}(p)(1+G\alpha_2^p)[(1-\alpha_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}] \\ &\quad -G\alpha_2^{p-1}(p)(pG\alpha_2^{p-1})[(1-\alpha_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2}] \\ &\quad + 4pG\alpha_2^{p-1}(1+G\alpha_2^p)(1-\alpha_2) - [(1+G\alpha_2^p)^2 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

สังเกตว่า เฉพาะเทอมที่สามในสมการที่ (4.5) อาจเป็นบวกได้ ดังนั้นเราอ้างว่า

$$4pG\alpha_2^{p-1}(1+G\alpha_2^p)(1-\alpha_2) - [(1+G\alpha_2^p)^2 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}] \leq 0.$$

ในเบื้องต้น สังเกตว่า

$$4pG\alpha_2^{p-1}(1+G\alpha_2^p)(1-\alpha_2) < 4pG(1+G) \text{ และ } -\left[(1+G\alpha_2^p)^2 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}\right] < -\left(1 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}\right).$$

ดังนั้น

$$4pG\alpha_2^{p-1}(1+G\alpha_2^p)(1-\alpha_2) - \left[(1+G\alpha_2^p)^2 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}\right] < 4pG(1+G) - \left(1 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}\right).$$

จากเทอมทางด้านขวาของอสมการ สมมติให้

$$4Gp(1+G) - (1 + (p\Omega_2)^2/\gamma^2) > 0 \text{ หรือ } G > \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{(p\Omega_2)^2}{\gamma^2}} - 1 \right) =: F$$

เนื่องจากสำหรับที่ Ω_1 หนึ่งๆ สามารถแสดงได้ว่า $\frac{\partial \ln G}{\partial \Omega_2} > 0$ ซึ่งเป็นผลให้ $\partial G / \partial \Omega_2 > 0$ (เพราะ

$G > 0$). เพราะฉะนั้น

$$G_{\max} = G(\Omega_2 = \Omega_1) = \frac{\left(\frac{\Omega_1}{\gamma} - 1\right)}{\left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1\right)}.$$

ในลำดับต่อไป เนื่องจาก $\Omega_2 \geq \gamma$,

$$F_{\min} = F(\Omega_2 = \gamma) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\Omega_1}\right) \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2}\right)} - 1 \right).$$

จาก G_{\max} และ F_{\min} โดยอาศัยอสมการ $y^4 - 6y^3 + 10y^2 + 2y + 1 > 0$ สามารถแสดงได้ว่า $(y = \Omega_1/\gamma) G_{\max} < F_{\min}$ ซึ่งเป็นการขัดแย้งกับข้อสมมติ ดังนั้นข้อกล่าวอ้างจึงเป็นจริงและได้ว่า $df_{22}(\alpha_2)/d\alpha_2 < 0$.

#

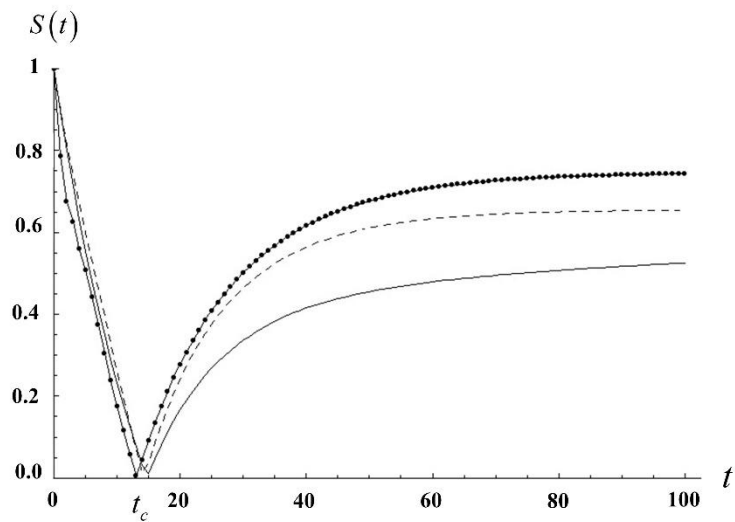
ทฤษฎีบท : สำหรับสถานะเริ่มต้น $\rho_{22}(0) = 1$, $S(t)$ จะมียอดวงกลับเพียงยอดเดียว

การพิสูจน์ : จาก α_2 ในสมการที่ (3.17) จะได้ว่า $0 < \alpha_2 \leq \frac{\Omega_2}{\gamma} + 1$. เนื่องจาก

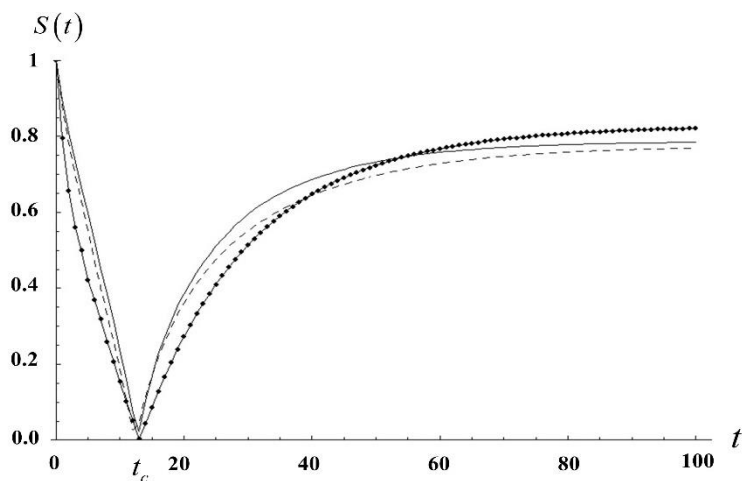
$f_{22}(\alpha_2 = 0) > 0$ และ $f_{22}(\alpha_2 = 1) < 0$ ดังนั้นจากบทตั้งขั้นต้นแสดงได้ว่า $f_{22}(\alpha_2)$ มีรากเพียงรากเดียว และเพราะ $\alpha_2(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $f_{22}(t)$ จึงมีรากเพียงรากเดียวด้วย ซึ่งทำให้เราได้ทฤษฎีบท

#

เป็นที่สังเกตว่า ในกรณีที่ 1 ที่มีสถานะเริ่มต้นเป็น $\rho_{44}(0) = 1$ จะไม่ปรากฏยอดวงกลับ เนื่องจากทุกเทอมใน $f_{44}(t)$ เป็นลบ ซึ่งหมายความว่ากระบวนการวิวัฒนาการโดยรวมเป็นกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วจนกระทั่งระบบค่อยๆ ลู่เข้าสู่สมดุลความร้อนโดยไม่มีกระบวนการลดอัตราเร็วเกิดขึ้นเลย



(ก)



(ข)

ภาพประกอบ 7 (ก) สถานะเริ่มต้น $\rho_{22}(0)=1$ กำหนดให้ $kT=0.8$ คงที่ (ข) สถานะเริ่มต้น $\rho_{11}(0)=1$ กำหนดให้ $kT=0.5$ คงที่ และ $\hbar g=0.1$ (เส้นทึบ), $\hbar g=0.5$ (เส้นประ), $\hbar g=0.8$ (เส้นจุด) พารามิเตอร์อื่นๆ : $\hbar\omega=1, \gamma=0.05$.

3.3. กรณีที่ 3 ($\rho_{11}(0)=1$)

จากภาพประกอบ 7(ข) สำหรับสถานะเริ่มต้น $\rho_s(0)=|E_1\rangle\langle E_1|$ หรือ $\rho_{11}(0)=1$ จะเห็นว่ากระบวนการวิวัฒนาการมีความคล้ายคลึงกับกรณีที่ 2 ซึ่งมียอดวงกลับที่เวลา t_c (ค่า t_c อาจไม่เท่ากับ t_c ในภาพประกอบ 7(ก) พอดี) ซึ่งแสดงถึงจุดเปลี่ยนอย่างฉับพลันระหว่างกระบวนการ

เพิ่มอัตราเร็วและลดอัตราเร็ว จากการพิจารณาการคำนวณเชิงตัวเลขในหลายๆ ตัวอย่างพบว่า ยอดวกกลับในกรณีนี้จะมีเพียงยอดเดียว เช่นเดียวกับในกรณีที่ 2

3.4. กรณีที่ 4 ($\rho_{33}(0)=1$)

สำหรับกรณีนี้ ซึ่งมีสถานะเริ่มต้นคือ $\rho_S(0)=|E_3\rangle\langle E_3|$ หรือ $\rho_{33}(0)=1$ จะทำการแบ่งกระบวนการวิวัฒนาการออกเป็นสองกรณีย่อยดังต่อไปนี้

3.4.1. พฤติกรรมยอดวกกลับคู่ (Double cusp behaviour)

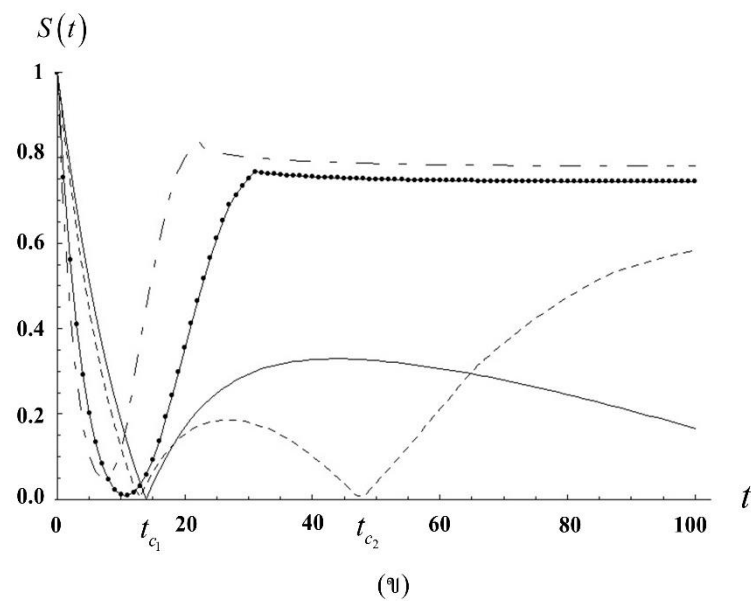
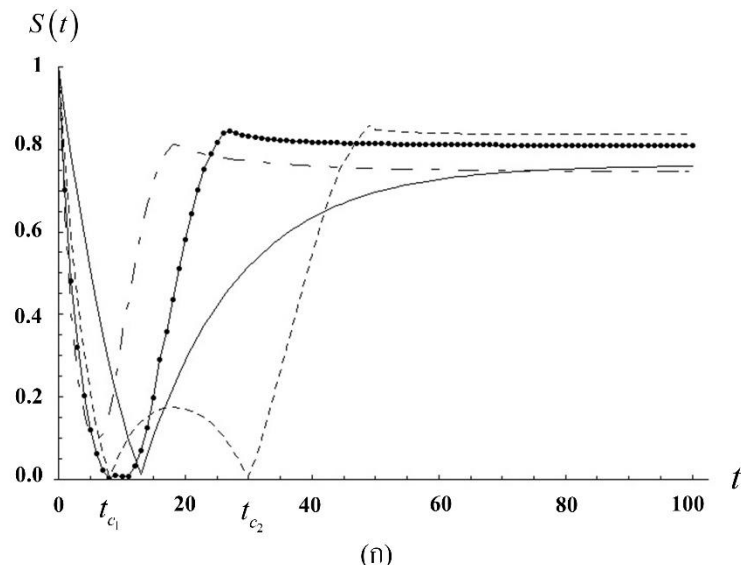
จากการสำรวจการคำนวณเชิงตัวเลขในกรณีต่างๆ ได้พบรูปแบบพฤติกรรมที่น่าสนใจเช่นในภาพประกอบ 8(ก) ซึ่งให้ $hg=0.8$ คงที่และ $kT=0.4$ (เส้นประ) ได้ปรากฏยอดวกกลับสองยอดที่เวลา t_{c_1} และ t_{c_2} ซึ่งแสดงว่า มีกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วและการลดอัตราเร็วถึงสองครั้งก่อนเข้าสู่สมดุล และหากถาลดอุณหภูมิ T ให้ต่ำลงเรื่อยๆ เวลา t_{c_2} จะมีค่ามากขึ้นและไปสู่อนันต์เมื่ออุณหภูมิ T เข้าสู่ศูนย์ (ตามเส้นทึบ) ซึ่งแสดงว่าจะมียอดวกกลับเพียงยอดเดียวที่อุณหภูมิเป็นศูนย์ จากตัวอย่างในภาพประกอบ 8 (ข) ซึ่งให้ $kT=0.7$ คงที่ และ $hg=0.3$ (เส้นประ) พบว่ามียอดวกกลับสองยอดเช่นกัน และถาลดความแรงอันตรกิริยาระหว่างคูควิบิต g ลงเรื่อยๆ เวลา t_{c_2} จะมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ (ตามเส้นทึบ)และไปสู่อนันต์เมื่อ g เข้าสู่ศูนย์ ซึ่งหมายความว่า จะมียอดวกกลับเพียงยอดเดียว เมื่อความแรงอันตรกิริยาระหว่างคูควิบิตเป็นศูนย์ ซึ่งก็คือกรณีของหนึ่งคูควิบิตนั่นเอง

3.4.2. จุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น (Smoothed single minimum)

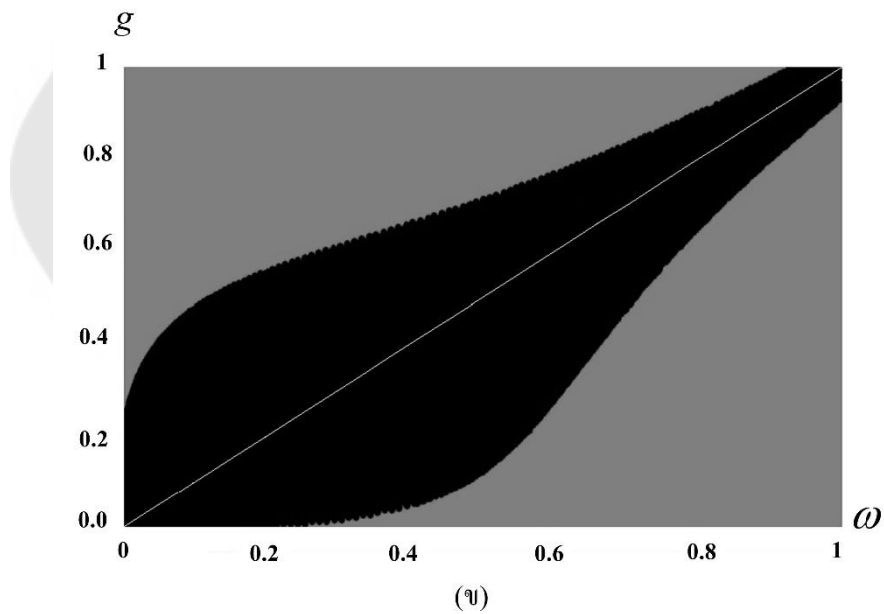
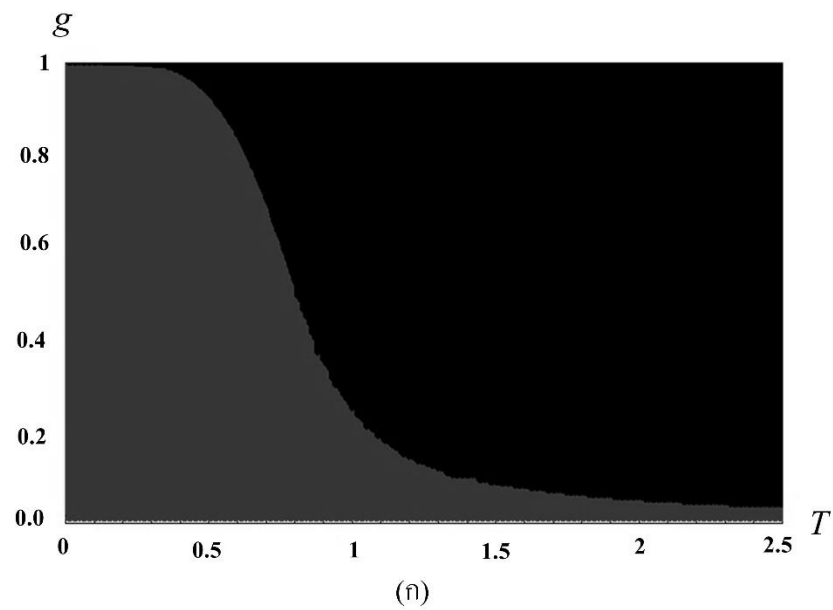
พิจารณาเส้นประในภาพประกอบ 8(ก) เมื่ออุณหภูมิ T มีค่าเพิ่มขึ้น พบว่า t_{c_2} จะเข้ามาใกล้กับ t_{c_1} (t_{c_1} มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากเสมือนตรึงอยู่กับที่) จนกระทั่งที่อุณหภูมิเหมาะสมค่าหนึ่ง t_{c_2} จะเท่ากับ t_{c_1} ซึ่งแสดงตามเส้นจุดในภาพประกอบ 8(ก) เมื่อเพิ่มอุณหภูมิ T ขึ้นไปอีกกราฟจะเป็นตามเส้นประ-จุด (dot-dashed line) เนื่องจากเส้นกราฟทั้งสองนี้มีจุดต่ำสุดเพียงจุดเดียวและมีลักษณะราบรื่น (smooth) แทนที่จะเป็นปลายแหลมแบบกรณีของยอดวกกลับ จึงเรียกกรณีนี้ว่า จุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น อย่างไรก็ตามในทางฟิสิกส์ การวิวัฒนาการกรณีนี้ก็มีพฤติกรรมเหมือนกับกรณีของหนึ่งยอดวกกลับ เพียงแต่การเปลี่ยนจากกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วไปเป็นการ

ลดอัตราเร็วเป็นแบบราบรื่นแทนที่จะเป็นแบบฉับพลัน สำหรับภาพประกอบ 8(ข) ก็มีพฤติกรรมในลักษณะเดียวกับที่กล่าวมานี้ เพียงแต่อุณหภูมิจะคงที่ ในขณะที่ค่าความเร่งอันตรกิริยา g จะเปลี่ยนแปลงไป

จากคำอธิบายข้างต้น เห็นได้ชัดว่าการเปลี่ยนจากยอดวงกลับคู่ไปเป็นจุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่นเริ่มเกิดเมื่อ $t_{c_1} = t_{c_2}$ (เส้นประในภาพประกอบ 8) ซึ่งสอดคล้องกับพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้ได้ว่า $f_{33} = 0$ และ $\dot{f}_{33} = 0$ ที่เวลาดังกล่าวนี้ จากเงื่อนไขนี้ ทำให้ได้แผนภาพในการแสดงอาณาบริเวณของพารามิเตอร์ที่การวิวัฒนาการมีพฤติกรรมแบบยอดวงกลับคู่ (สีเทา) และแบบจุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น (สีดำ) ซึ่งแบ่งกันด้วยขอบเขตร่วมที่สอดคล้องกันเงื่อนไขข้างต้นดังภาพประกอบ 9(ก) ในพื้นที่ที่แกน g และ T จะสอดคล้องกับกรณีของหนึ่งยอดวงกลับและเมื่อให้ค่า g คงที่ (หรือ T คงที่) จะมีกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วและลดอัตราเร็วในทุกอุณหภูมิ T (หรือทุกความเร่งอันตรกิริยาของคู่ควิบิต g) โดยมีแนวโน้มที่จะพบ พฤติกรรมยอดวงกลับคู่ที่อุณหภูมิต่ำ (หรือที่ความเร่งอันตรกิริยาของคู่ควิบิตน้อย) นอกจากนี้ค่าของจุดต่ำสุดของเส้นประ-จุดในภาพประกอบ 8(ก) จะค่อยๆสูงขึ้นเรื่อยๆ เมื่ออุณหภูมิมีค่าสูงขึ้นและเมื่ออุณหภูมิมีค่าสูงพอ รูปกราฟจะมีลักษณะคล้ายกับในภาพประกอบ 6 ของกรณีที่ 1 ซึ่งหมายความว่ากระบวนการลดอัตราเร็วจะสามารถละลายได้ที่อุณหภูมิสูงพอ



ภาพประกอบ 8 สถานะเริ่มต้น $\rho_{33}(0) = 1$ (ก) กำหนดให้ $\hbar g = 0.8$ คงที่ และ $kT = 0.1$ (เส้นต่อเนื่อง), $kT = 0.4$ (เส้นประ), $kT = 0.6$ (เส้นจุด), $kT = 0.8$ (เส้นประ-จุด)
 (ข) กำหนดให้ $kT = 0.7$ คงที่ และ $\hbar g = 0.1$ (เส้นต่อเนื่อง), $\hbar g = 0.3$ (เส้นประ), $\hbar g = 0.7$ (เส้นจุด), $\hbar g = 0.8$ (เส้นประและจุด) พารามิเตอร์อื่นๆ : เลือกเป็น $\hbar\omega = 1$, $\gamma = 0.05$.



ภาพประกอบ 9 บริเวณสีเทาแสดงถึงบริเวณที่พบพฤติกรรมยกตัวกลับคู่และบริเวณสีดำแสดงถึง
 กรณีจุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น (ก) กำหนดให้ $\hbar\omega=1$ คงที่ (ข) กำหนดให้ $kT=0.5$ คงที่ และ
 $g = \omega$ (เส้นสีขาว) พารามิเตอร์อื่นๆ: $\omega=1, \gamma=0.05$.

ภาพประกอบ 9(ข) แสดงแผนภาพของทั้งสองบริเวณที่ $\omega > g$ และ $\omega < g$ สังเกตว่าภาพประกอบ 9(ข) มีสมมาตรเทียบกับเส้น $g = \omega$ (เส้นขาว) ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากการที่พลศาสตร์โดยรวมของการวิวัฒนาการไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การสลับที่ของพารามิเตอร์ ω และ g

จากภาพประกอบ 9(ข) สำหรับ ω คงที่ (หรือ g คงที่) จะเกิดกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วและลดอัตราเร็วในทุกความแรงอันตรกิริยา g (หรือทุกความถี่ ω) โดยมีแนวโน้มที่จะพบพฤติกรรมยอดดวกกลับคู่ที่ g ต่ำ (หรือ ω สูง) สำหรับกรณี $\omega > g$ (ความแรงอันตรกิริยาของคู่ควิบิตแบบอ่อน) และมีแนวโน้มที่จะพบพฤติกรรมยอดดวกกลับคู่ที่ g สูง (หรือ ω ต่ำ) สำหรับกรณี $\omega < g$ (ความแรงอันตรกิริยาของคู่ควิบิตแบบแข็ง)

เมื่อพิจารณาภาพประกอบ 9 (ก) และ (ข) พร้อมๆกัน จะพบว่าบริเวณสีดำในภาพประกอบ 9 (ข) จะมีขนาดใหญ่ขึ้นเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ซึ่งแสดงว่า กระบวนการลดอัตราเร็วสามารถละทิ้งได้ที่อุณหภูมิสูงพอ ไม่ว่าความแรงอันตรกิริยาของคู่ควิบิตจะอ่อนหรือแข็งก็ตาม อย่างไรก็ตาม สำหรับกรณีที่อุณหภูมิ T คงที่ (ขนาดบริเวณสีดำคงที่) ค่า g ที่เพิ่มขึ้นจากแบบอ่อน ($g < \omega$) ไปแบบแข็ง ($g > \omega$) จะไม่สามารถทำลายกระบวนการลดอัตราเร็วได้ โดยกระบวนการจะเปลี่ยนจากพฤติกรรมยอดดวกกลับคู่ (สีเทา) ไปสู่จุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น (สีดำ) และกลับไปเป็นพฤติกรรมยอดดวกกลับคู่อีกครั้ง

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาวิจัยจำกัดเวลาของอัตราเร็วเชิงควอนตัมของระบบหนึ่งคิวบิตที่สัมผัสกับอ่างความร้อนที่อุณหภูมิจำกัดภายใต้การประมาณ บอร์น - มาร์คอฟ พบว่า กระบวนการวิวัฒนาการอาจเกิดการเปลี่ยนจากกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วไปเป็นการลดอัตราเร็วแบบฉับพลันที่เวลาหนึ่งก่อนเข้าสู่สมดุลความร้อนได้ เราเรียกจุดเปลี่ยนนี้ว่า ยอดวกกลับ จากการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แสดงได้ว่า ยอดวกกลับนี้จะมีเพียงยอดเดียวและการปรากฏของยอดวกกลับจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อสถานะเริ่มต้นมีประชากรในสถานะกระตุ้นมากกว่าสถานะพื้น เมื่อกำหนดให้สถานะเริ่มต้นของเมทริกซ์ความหนาแน่นลดรูปของคิวบิตไม่มีสมาชิกนอกแนวทแยงมุม

จากนั้นการวิจัยนี้ได้ขยายไปสู่ระบบสองคิวบิตที่มีอันตรกิริยาต่อกัน โดยแต่ละคิวบิตสัมผัสกับอ่างความร้อนที่อุณหภูมิจำกัด ภายใต้การประมาณ บอร์น - มาร์คอฟ สถานะเริ่มต้นในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้เป็นสถานะไอเกนของพลังงานของระบบคู่คิวบิต เราได้ศึกษากระบวนการวิวัฒนาการของระบบคู่คิวบิตนี้สำหรับสถานะเริ่มต้นดังกล่าวก่อนเข้าสู่สมดุลความร้อน ซึ่งแบ่งได้เป็นสี่ประเภทดังต่อไปนี้

รูปแบบที่หนึ่ง: เป็นกระบวนการวิวัฒนาการที่ปรากฏยอดวกกลับเพียงยอดเดียวซึ่งแสดงถึงกระบวนการที่เปลี่ยนจากการเพิ่มอัตราเร็วไปสู่การลดอัตราเร็วแบบฉับพลัน เช่นเดียวกับที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่งคิวบิต

รูปแบบที่สอง: เป็นกระบวนการวิวัฒนาการที่มีการเพิ่มอัตราเร็วเพียงอย่างเดียวก่อนค่อยๆ เข้าสู่สมดุลความร้อน โดยไม่ปรากฏกระบวนการลดอัตราเร็วหรือยอดวกกลับ รูปแบบนี้จะเกิดขึ้นเมื่อสถานะเริ่มต้นเป็นสถานะพื้นเท่านั้น

รูปแบบที่สาม: เป็นกระบวนการวิวัฒนาการที่มียอดวกกลับสองยอดก่อนเข้าสู่สมดุลความร้อน ซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะของระบบสองคิวบิต ที่แสดงว่าจะเกิดกระบวนการเพิ่มอัตราเร็วและลดอัตราเร็วถึงสองครั้งก่อนเข้าสู่สมดุลความร้อน จากการคำนวณเชิงตัวเลขในหลายๆ ตัวอย่างพบว่า ตัวแบบที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะมียอดวกกลับได้มากที่สุดเพียงสองยอด แต่อย่างไรก็ดีในบางตัวอย่างอาจปรากฏจำนวนยอดวกกลับหลายยอดก็เป็นได้ ตัวอย่างเช่น (Cheng, Zhang, & Xu, 2018)

รูปแบบที่สี่: เป็นกระบวนการวิวัฒนาการที่มีพฤติกรรมคล้ายกับรูปแบบที่หนึ่งเพียงแต่การเปลี่ยนกระบวนการจากการเพิ่มอัตราเร็วไปสู่การลดอัตราเร็วเป็นแบบราบรื่นแทนที่จะเป็นแบบฉับพลัน ซึ่งเราเรียกว่า จุดต่ำสุดเดี่ยวราบรื่น รูปแบบนี้อาจพิจารณาเป็นรูปแบบที่สามได้เมื่อยอด

วงกลับสองยอดมารวมกันสำหรับค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่เหมาะสม กระบวนการในลักษณะนี้จะไม่พบในระบบหนึ่งควิบิต

จากการศึกษาพบว่า กระบวนการเพิ่มอัตราเร็วและลดอัตราเร็วสามารถเกิดได้ในทุกรูปแบบของกระบวนการ (ยกเว้นรูปแบบที่สอง) และทุกพารามิเตอร์รวมถึงอุณหภูมิด้วย นอกจากนี้ยังพบอีกว่าพฤติกรรมยอดวงกลับคู่จะมีแนวโน้มเกิดขึ้นที่อุณหภูมิต่ำๆหรือค่าความแรงอันตรกิริยาระหว่างควิบิตน้อยๆ (หรือหลายๆ) สำหรับค่าความแรงอันตรกิริยาระหว่างควิบิตแบบอ่อน (แบบแข็ง) และเมื่ออุณหภูมิมีค่าสูงพอ กระบวนการลดอัตราเร็วในรูปแบบที่สี่จะสามารถละทิ้งได้ ในขณะที่ค่าความแรงอันตรกิริยาสูงๆจะไม่สามารถทำลายกระบวนการลดอัตราเร็วได้ จากการศึกษาวิจัยนี้ ผู้วิจัยคาดหวังว่า ผลลัพธ์ต่างๆที่ได้จะสามารถใช้เป็นฐานความรู้ที่เป็นประโยชน์ในการอธิบายอัตราเร็วในการคำนวณเชิงควอนตัมหรือการสื่อสารเชิงควอนตัมที่อุณหภูมิจำกัดได้



บรรณานุกรม

- Anandan, J., & Aharonov, Y. (1990). Geometry of quantum evolution. *Physical Review Letters*, 65(14), 1697.
- Audenaert, K. M. (2012). Comparisons between quantum state distinguishability measures. *arXiv preprint arXiv:1207.1197*.
- Bekenstein, J. D. (1981). Energy cost of information transfer. *Physical Review Letters*, 46(10), 623.
- Breuer, H.-P., & Petruccione, F. (2002). *The theory of open quantum systems*: Oxford University Press on Demand.
- Caneva, T., Murphy, M., Calarco, T., Fazio, R., Montangero, S., Giovannetti, V., & Santoro, G. E. (2009). Optimal control at the quantum speed limit. *Physical Review Letters*, 103(24), 240501.
- Cheng, J.-Q., Zhang, G.-Q., & Xu, J.-B. (2018). Quantum evolution speed in the finite-temperature bosonic environment. *JOSA B*, 35(9), 2192-2201.
- Chenu, A., Beau, M., Cao, J., & del Campo, A. (2017). Quantum simulation of generic many-body open system dynamics using classical noise. *Physical Review Letters*, 118(14), 140403.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloë, F. (2013). *Claude Cohen-Tannoudji; Bernard Diu; Franck Laloë: Quantenmechanik (Vol. 1)*: Walter de Gruyter.
- Deffner, S., & Lutz, E. (2013). Quantum speed limit for non-Markovian dynamics. *Physical Review Letters*, 111(1), 010402.
- Del Campo, A., Egusquiza, I., Plenio, M. B., & Huelga, S. (2013). Quantum speed limits in open system dynamics. *Physical Review Letters*, 110(5), 050403.
- Lloyd, S. (2000). Ultimate physical limits to computation. *Nature*, 406(6799), 1047.
- Mandelstam, L., & Tamm, I. (1991). The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. In *Selected Papers* (pp. 115-123): Springer.
- Margolus, N., & Levitin, L. B. (1998). The maximum speed of dynamical evolution. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 120(1-2), 188-195.

- Meng, X., Wu, C., & Guo, H. (2015). Minimal evolution time and quantum speed limit of non-Markovian open systems. *Scientific reports*, 5, 16357.
- Mirkin, N., Toscano, F., & Wisniacki, D. A. (2016). Quantum-speed-limit bounds in an open quantum evolution. *Physical Review A*, 94(5), 052125.
- Nielsen, M. A., & Chuang, I. (2002). Quantum computation and quantum information. In: AAPT.
- Sakurai, J. J., & Commins, E. D. (1995). Modern quantum mechanics, revised edition. In: AAPT.
- Sinaysky, I., Petruccione, F., & Burgarth, D. (2008). Dynamics of nonequilibrium thermal entanglement. *Physical Review A*, 78(6), 062301.
- Uhlmann, A. (1992). An energy dispersion estimate. *Physics Letters A*, 161(4), 329-331.
- Wu, W.-J., Yan, K., Wu, Y., & Hao, X. (2016). Thermal quantum speed limit for classical-driving open systems. *Modern Physics Letters B*, 30(32n33), 1650389.
- Z.Y. Xu, S. L., W. L. Yang, C. Liu, S. Zhu. (2014). Quantum speedup in a memory environment. *Physical Review A*, 89, 012307.
doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.012307>
- Zhang, Y.-J., Han, W., Xia, Y.-J., Cao, J.-P., & Fan, H. (2014). Quantum speed limit for arbitrary initial states. *Scientific reports*, 4, 4890.
- Zhang, Y.-J., Han, W., Xia, Y.-J., Cao, J.-P., & Fan, H. (2015). Classical-driving-assisted quantum speed-up. *Physical Review A*, 91(3), 032112.



ภาคผนวก

ภาคผนวก

จากสมการที่ (3.11) สำหรับสถานะเริ่มต้น $\rho(0) = |E_1\rangle\langle E_1|$ พิจารณา

$$\begin{aligned} |Tr[\rho(t+\tau_D)\rho(t)] - Tr[\rho^2(t)]| &= \frac{1}{(\Omega_1\Omega_2)^2} \left[-\gamma \left(X_1^- \left[(Y_2^+)^2 + (Y_2^-)^2 \right] \right) \left[e^{-\Omega_1\tau_D} - 1 \right] e^{-\Omega_1 t} \right. \\ &\quad - \gamma \left(Y_2^- \left[(X_1^+)^2 + (X_1^-)^2 \right] \right) \left[e^{-\Omega_2\tau_D} - 1 \right] e^{-\Omega_2 t} \\ &\quad + \gamma \left(X_1^- Y_2^- \left[Y_2^- - Y_2^+ \right] \right) \left[e^{-(\Omega_1+\Omega_2)\tau_D} + e^{-\Omega_1\tau_D} + e^{-\Omega_2\tau_D} - 3 \right] e^{-(\Omega_1+\Omega_2)t} \\ &\quad + \left(2(X_1^-)^2 \left[(Y_2^+)^2 + (Y_2^-)^2 \right] \right) \left[e^{-\Omega_1\tau_D} - 1 \right] e^{-2\Omega_1 t} \\ &\quad + \left(2(Y_2^-)^2 \left[(X_1^+)^2 + (X_1^-)^2 \right] \right) \left[e^{-\Omega_2\tau_D} - 1 \right] e^{-2\Omega_2 t} \\ &\quad - \gamma \left((X_1^-)^2 Y_2^- \right) \left[2e^{-(\Omega_1+\Omega_2)\tau_D} + 2e^{-\Omega_1\tau_D} - 4 \right] e^{-2(\Omega_1+\Omega_2)t} \\ &\quad - \gamma \left(X_1^- (Y_2^-)^2 \right) \left[2e^{-(\Omega_1+\Omega_2)\tau_D} + 2e^{-\Omega_2\tau_D} - 4 \right] e^{-(\Omega_1+2\Omega_2)t} \\ &\quad \left. + 4(X_1^- Y_2^-)^2 \left[e^{-(\Omega_1+\Omega_2)\tau_D} - 1 \right] e^{-2(\Omega_1+\Omega_2)t} \right] \end{aligned}$$

โดยที่ $X_1^+ = \gamma N(\omega_1)$, $X_1^- = \gamma(N(\omega_1)+1)$, $Y_2^+ = \gamma N(\omega_2)$, $Y_2^- = \gamma(N(\omega_2)+1)$
เมื่อ $\Omega_i\tau_D \ll 1$ หรือก็คือ $\gamma\tau_D \ll 1$ สมการข้างต้นจัดรูปได้เป็น

$$\begin{aligned} |Tr[\rho(t+\tau_D)\rho(t)] - Tr[\rho^2(t)]| &= \frac{\gamma^4}{(\Omega_1\Omega_2)^2} \left[\left[(N(\omega_1)+1) \left[2N^2(\omega_2) + 2N(\omega_2) + 1 \right] \right] \left[\Omega_1\tau_D \right] e^{-\Omega_1 t} \right. \\ &\quad + \left(N(\omega_2)+1 \right) \left[2N^2(\omega_1) + 2N(\omega_1) + 1 \right] \left[\Omega_2\tau_D \right] e^{-\Omega_2 t} \\ &\quad - \left(N(\omega_1)N(\omega_2) + N(\omega_1) + N(\omega_2) + 1 \right) \left[2(\Omega_1 + \Omega_2)\tau_D \right] e^{-(\Omega_1+\Omega_2)t} \\ &\quad - 2 \left[N^2(\omega_1) + 2N(\omega_1) + 1 \right] \left[2N^2(\omega_2) + 2N(\omega_2) + 1 \right] \left[\Omega_1\tau_D \right] e^{-2\Omega_1 t} \\ &\quad - 2 \left[N^2(\omega_2) + 2N(\omega_2) + 1 \right] \left[2N^2(\omega_1) + 2N(\omega_1) + 1 \right] \left[\Omega_2\tau_D \right] e^{-2\Omega_2 t} \\ &\quad + \left[N^2(\omega_1) + 2N(\omega_1) + 1 \right] \left[N(\omega_2) + 1 \right] \left[(4\Omega_1 + 2\Omega_2)\tau_D \right] e^{-(2\Omega_1+\Omega_2)t} \\ &\quad + \left[N(\omega_1) + 1 \right] \left[N^2(\omega_2) + 2N(\omega_2) + 1 \right] \left[(2\Omega_1 + 4\Omega_2)\tau_D \right] e^{-(\Omega_1+2\Omega_2)t} \\ &\quad \left. - 4 \left[N(\omega_1) + 1 \right]^2 \left[N(\omega_2) + 1 \right]^2 \left[(\Omega_1 + \Omega_2)\tau_D \right] e^{-2(\Omega_1+\Omega_2)t} \right] \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3.18) $N(\omega_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} - 1 \right)$ และ $N(\omega_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} - 1 \right)$ สมการข้างต้นจัดรูป

ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
|Tr[\rho(t+\tau_D)\rho(t)]-Tr[\rho^2(t)]| &= \frac{\gamma^4\tau_D}{4(\Omega_1\Omega_2)^2} \left[\left[\left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_1] e^{-\Omega_1 t} \right. \right. \\
&\quad + \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_2] e^{-\Omega_2 t} \\
&\quad - \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) [2(\Omega_1 + \Omega_2)] e^{-(\Omega_1 + \Omega_2)t} \\
&\quad - \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_1] e^{-2\Omega_1 t} - \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_1] e^{-2\Omega_2 t} \\
&\quad + \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) [2\Omega_1 + \Omega_2] e^{-(2\Omega_1 + \Omega_2)t} \\
&\quad + \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right)^2 [\Omega_1 + 2\Omega_2] e^{-(\Omega_1 + 2\Omega_2)t} \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right)^2 \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right)^2 [\Omega_1 + \Omega_2] e^{-(\Omega_1 + \Omega_2)t} \right] \right]
\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
|Tr[\rho(t+\tau_D)\rho(t)]-Tr[\rho^2(t)]| &= \frac{\gamma^4\tau_D}{4(\Omega_1\Omega_2)^2} \left[\left[\left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_1] e^{-\Omega_1 t} \left[1 - \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) e^{-\Omega_1 t} \right] \right. \right. \\
&\quad + \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_2] e^{-\Omega_2 t} \left[1 - \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) e^{-\Omega_2 t} \right] \\
&\quad - \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) [\Omega_1 + \Omega_2] e^{-(\Omega_1 + \Omega_2)t} \left[2 + \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) e^{-(\Omega_1 + \Omega_2)t} \right] \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) e^{-(\Omega_1 + \Omega_2)t} \left[\left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) [2\Omega_1 + \Omega_2] e^{-\Omega_1 t} + \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) [\Omega_1 + 2\Omega_2] e^{-\Omega_2 t} \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

กำหนดให้ $\alpha_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\gamma} + 1 \right) e^{-\Omega_1 t}$ และ $\alpha_2 = \left(\frac{\Omega_2}{\gamma} + 1 \right) e^{-\Omega_2 t}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|Tr[\rho(t+\tau_D)\rho(t)]-Tr[\rho^2(t)]| &= \frac{\gamma^4\tau_D}{4(\Omega_1\Omega_2)^2} \left[\left[\alpha_1 \left(\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_1] (1 - \alpha_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha_2 \left(\frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} + 1 \right) [\Omega_2] (1 - \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2 \left[\alpha_1 (\Omega_1) + \alpha_2 (\Omega_2) - [\Omega_1 + \Omega_2] (1 + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)) \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma^4 \tau_D}{4(\Omega_1 \Omega_2)^2} \left[\left[\alpha_1 \left(\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2} \right) \Omega_1 (1 - \alpha_1) + \alpha_1 \Omega_1 (1 - \alpha_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Omega_1 (\alpha_1^2 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 (1 + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2))) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \Omega_2 (\alpha_1 \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 (1 + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2))) + \alpha_2 \left(\frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} \right) \Omega_2 (1 - \alpha_2) + \alpha_2 \Omega_2 (1 - \alpha_2) \right] \right] \\
&= \frac{\gamma^4 \tau_D}{4(\Omega_1 \Omega_2)^2} \left[\alpha_1 \Omega_1 (1 - \alpha_1) \left[\frac{\Omega_2^2}{\gamma^2} + 1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(1 - \alpha_1)} - \frac{\alpha_2}{(1 - \alpha_1)} - \alpha_2 (1 - \alpha_2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \alpha_2 \Omega_2 (1 - \alpha_2) \left[\frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} + 1 + \frac{\alpha_1 (\alpha_2 - 1)}{(1 - \alpha_2)} - \alpha_1 (1 - \alpha_1) \right] \right] \\
&= \frac{\gamma^4 \tau_D}{4(\Omega_1 \Omega_2)^2} \left[\alpha_1 \Omega_1 (1 - \alpha_1) \left[(1 - \alpha_2)^2 + \frac{\Omega_2^2}{\gamma^2} \right] + \alpha_2 \Omega_2 (1 - \alpha_2) \left[(1 - \alpha_1)^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} \right] \right] \\
&= \frac{\gamma^4 \tau_D}{4(\Omega_1 \Omega_2)^2} |f_{11}(t)|
\end{aligned}$$

เมื่อ $f_{11}(t)$ เป็นไปตามสมการที่ (3.13) สำหรับ $f_{22}(t)$, $f_{33}(t)$ และ $f_{44}(t)$ ในสมการที่ (3.14), (3.15) และ (3.16) ตามลำดับ ก็สามารถจัดรูปได้ดังขั้นตอนในการทำงานเดียวกัน

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	ธีระวัฒน์ ชัชวาลธีรรัตน์
วัน เดือน ปี เกิด	17 มกราคม 2531
สถานที่เกิด	สิงห์บุรี
วุฒิการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์ จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

