



การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA V STUDENTS' CONCEPTUAL KNOWLEDGE AND
PROCEDURAL KNOWLEDGE ON VECTORS IN 3D BY USING GEOGEBRA PROGRAM

เกียรติศักดิ์ แสงทอง

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2564

การศึกษาคำรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปีการศึกษา 2564

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA V STUDENTS' CONCEPTUAL KNOWLEDGE AND
PROCEDURAL KNOWLEDGE ON VECTORS IN 3D BY USING GEOGEBRA PROGRAM



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of MASTER OF EDUCATION
(Mathematics)

Faculty of Science, Srinakharinwirot University

2021

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

ของ

เกียรติศักดิ์ แสงทอง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

..... ที่ปรึกษาหลัก ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชีรา ลำดวนหอม) (รองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์ศิริ เพ็ญฟู)

..... ที่ปรึกษาร่วม กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ญานิน กองทิพย์) (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพ็ญชัย)

ชื่อเรื่อง	การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
ผู้วิจัย	เกียรติศักดิ์ แสงทอง
ปริญญา	การศึกษามหาบัณฑิต
ปีการศึกษา	2564
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชีรา ลำดวนหอม
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ญาณิน กองทิพย์

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม และ 2) เปรียบเทียบความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยี และสิ่งแวดล้อม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 ของโรงเรียนหอวัง จำนวน 1 ห้องเรียน มีนักเรียน 34 คน ได้มาโดยใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียวจากทั้งหมด 3 ห้องเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย 1) แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 12 แผน และ 2) แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบทวินาม ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ผ่านเกณฑ์ไม่มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และ 2) นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ : ความรู้เชิงมโนทัศน์, ความรู้เชิงกระบวนการ, โปรแกรม GeoGebra, เวกเตอร์ในสามมิติ

Title	A STUDY OF MATHAYOMSUKSA V STUDENTS' CONCEPTUAL KNOWLEDGE AND PROCEDURAL KNOWLEDGE ON VECTORS IN 3D BY USING GEOGEBRA PROGRAM
Author	KIEDTISAK SANGTHONG
Degree	MASTER OF EDUCATION
Academic Year	2021
Thesis Advisor	Assistant Professor Dr. Chira Lumduanhom
Co Advisor	Assistant Professor Dr. Yanin Kongthip

The purposes of this study are as follows: (1) to study the conceptual knowledge of Mathayomsuksa Five students on 3D vectors after being taught with GeoGebra program; and (2) to study the procedural knowledge of Mathayomsuksa Five students on 3D vectors after being taught with GeoGebra program. The participants were 34 Mathayomsuksa Five students at Horwang School in Bangkok, Thailand, in the second semester of 2021 academic year. The instruments used in this study were as follows: (1) 12 lesson plans that allowed students to learn the topic with GeoGebra program; and (2) a conceptual knowledge and procedural knowledge test on the topic of 3D vectors. The students were said to have conceptual knowledge and procedural knowledge if they scored 60% or more on the test. The collected data were analyzed using basic statistics and a Binomial Test. The research findings revealed the following: (1) after being taught using GeoGebra, no more than 60% of the participants had conceptual knowledge on 3D vectors; and (2) after being taught using GeoGebra, over 60% of the participants had procedural knowledge on 3D vectors with a 0.05 level of significance.

Keyword : Conceptual knowledge, Procedural knowledge, GeoGebra, 3D Vectors

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ได้เป็นอย่างดีเพราะได้รับความอนุเคราะห์เป็นอย่างดีจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชिरา ลำฉนวนหอม อาจารย์ที่ปรึกษาหลักปริญญานิพนธ์ และขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ญานิน กองทิพย์ อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำ และตรวจแก้ไข ตลอดมาตั้งแต่เริ่มทำปริญญานิพนธ์จนกระทั่งปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย อาจารย์ ดร.ธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์ และคุณวรรณา ธนสินปิติกวีย์ ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญ ในการตรวจสอบคุณภาพและปรับปรุงเครื่องมือวิจัยให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์ศักดิ์ เฟื่องฟู และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย ที่ให้ความกรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ และได้ให้ข้อเสนอแนะแก่ผู้วิจัย ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนหอวัง ที่อนุญาตให้ใช้สถานที่วิจัย และขอขอบคุณคุณคุณวรรณา ธนสินปิติกวีย์ อย่างยิ่งที่คอยให้คำแนะนำ และช่วยเหลือขณะเก็บข้อมูลวิจัยเป็นอย่างดี และขอบคุณนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ให้ความร่วมมือกับการทดลอง โดยเฉพาะกลุ่มตัวอย่าง จนได้ข้อมูลที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ที่ได้ให้ทุนโครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สควค.) ซึ่งรวมถึงเงินทุนสนับสนุนการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ด้วย

ขอขอบคุณนายณัฐวุฒิ โชติวิญญู และนางสาววราภรณ์ ชลภาพ ผู้ช่วยในการเก็บข้อมูลวิจัย ที่คอยให้คำแนะนำในการสร้าง ตรวจสอบเครื่องมือ และดูแลความเรียบร้อยในตลอดการดำเนินการเก็บข้อมูลวิจัย

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณมารดา และครอบครัวที่ให้การสนับสนุนทั้งด้านกำลังใจและทุนทรัพย์ นอกจากนี้ยังมีผู้ให้ความช่วยเหลือผู้วิจัยที่ไม่สามารถกล่าวชื่อนามได้ทั้งหมด จึงขอขอบคุณทุกท่านมา ณ โอกาสนี้ด้วย

เกียรติศักดิ์ แสงทอง



สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญรูปภาพ	ฉ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	6
ความสำคัญของการวิจัย	6
ขอบเขตของการวิจัย	7
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	8
กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	9
สมมติฐานของการวิจัย.....	10
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์.....	12
1.1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์	12
1.1.1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์.....	12
1.1.2 ความหมายของความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์.....	13
1.2 ลักษณะของความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์	14
1.2.1 ลักษณะที่เป็นองค์ประกอบของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์.....	14

1.2.2 ลักษณะที่เป็นองค์ประกอบของความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์.....	15
1.3 แนวทางการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์	15
1.3.1 แนวทางการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์.....	15
1.3.2 แนวทางการพัฒนาความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์.....	19
1.4 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์.....	24
1.4.1 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์.....	24
1.4.2 การวัดความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์.....	26
1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์.....	28
2. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra.....	31
2.1 ลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra.....	31
2.2 โปรแกรม GeoGebra กับการจัดการเรียนรู้.....	33
2.3 ข้อควรคำนึงและข้อจำกัดของการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้จัดการเรียนรู้.....	34
2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนรู้.....	36
3. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ.....	38
3.1 เอกสารเกี่ยวกับพัฒนาการจัดการเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	38
3.2 เอกสารเกี่ยวกับการนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในสาระฟิสิกส์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย.....	40
3.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ในสามมิติ	41
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	44
1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง.....	44
2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra	45
3. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	46
3.1 แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ.....	46

3.2 แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	51
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล	54
5. การวิเคราะห์ข้อมูล.....	55
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	56
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	57
ตอนที่ 1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์	57
1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	57
1.2 การทดสอบสมมติฐานการวิจัย.....	59
ตอนที่ 2 ความรู้เชิงกระบวนการเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์	65
2.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	65
2.2 การทดสอบสมมติฐานการวิจัย.....	67
บทที่ 5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	68
ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป	68
ความมุ่งหมายของการวิจัย	68
สมมติฐานของการวิจัย	68
วิธีดำเนินการวิจัย	68
1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	68
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	68
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	68
2. กำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra	69
3. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	69

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล	70
แบบแผนการวิจัย.....	70
การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล	70
5. การวิเคราะห์ข้อมูล.....	71
สรุปผลการวิจัย.....	71
อภิปรายผลการวิจัย	72
1. ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	72
2. ความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ.....	74
ข้อเสนอแนะ	76
บรรณานุกรม	77
ภาคผนวก.....	83
ภาคผนวก ก การหาคุณภาพของ แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	84
ภาคผนวก ข การทดสอบสมมติฐาน	94
ภาคผนวก ค ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	99
ภาคผนวก ง แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	144
ภาคผนวก จ รายนามผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือวิจัย	157
ประวัติผู้เขียน.....	159

สารบัญตาราง

หน้า

ตาราง 1 แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติรายหน่วยการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้	47
ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนความรู้เชิงกระบวนการสำหรับข้อสอบแบบอัตนัย	52
ตาราง 3 แบบแผนการทดลอง One – Group Posttest – Only Design	54
ตาราง 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	58
ตาราง 5 ผลการทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด	59
ตาราง 6 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงกระบวนการ จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	66
ตาราง 7 ผลการทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด	67
ตาราง 8 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	86
ตาราง 9 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	91
ตาราง 10 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของข้อสอบในแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	156

สารบัญรูปภาพ

หน้า

ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra.....	45
ภาพประกอบ 2 แผนภูมิแสดงคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	58
ภาพประกอบ 3 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ข้อที่ 4	60
ภาพประกอบ 4 การเลือกคำตอบของนักเรียนในข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ข้อที่ 4	60
ภาพประกอบ 5 ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 3	61
ภาพประกอบ 6 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 3 แบบที่ 1	62
ภาพประกอบ 7 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 3 แบบที่ 2.....	62
ภาพประกอบ 8 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบเติมคำ ข้อ 3 แบบที่ 3.....	62
ภาพประกอบ 9 ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7	63
ภาพประกอบ 10 ข้อผิดพลาดของข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7	63
ภาพประกอบ 11 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7	63
ภาพประกอบ 12 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7	63
ภาพประกอบ 13 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7	64
ภาพประกอบ 14 ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 9	64
ภาพประกอบ 15 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 9	65
ภาพประกอบ 16 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 9	65
ภาพประกอบ 17 แผนภูมิแสดงคะแนนความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	66

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ที่ต้องการให้มนุษย์เป็นผู้รู้เท่าทันสารสนเทศ สื่อ เทคโนโลยี เพื่อก้าวให้ทันผลิตภัณฑ์ที่ถูกวางตลาด พัฒนาต่อยอดการสร้างผลิตภัณฑ์ใหม่ขึ้นใช้เอง เป็นผู้พัฒนานวัตกรรมที่สอดคล้องกับบริบทของสังคม และพร้อมรับการเปลี่ยนแปลงในยุคโลกาภิวัตน์ (สำนักบริหารงานการมัธยมศึกษาตอนปลาย, 2559, น. 8) ทั้งนี้เนื่องจากคณิตศาสตร์มีส่วนช่วยให้มนุษย์คิดอย่างมีเหตุผล มีระบบความคิดของตนเอง มีแบบแผน มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบ เกิดการคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี รวมไปถึงศาสตร์อื่น ๆ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560, น. 1) เช่น สาขาฟิสิกส์ ใช้เนื้อหาเกี่ยวกับแคลคูลัส เรขาคณิต วิเคราะห์ เวกเตอร์ เมทริกซ์ สาขาเคมี ใช้เนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิต แคลคูลัสมาใช้ สาขาชีววิทยา ใช้เนื้อหาเกี่ยวกับความน่าจะเป็นและสถิติ สาขาเศรษฐศาสตร์ ใช้เนื้อหาเกี่ยวกับแคลคูลัส พีชคณิตเชิงเส้น กำหนดการเชิงเส้น สาขาภูมิศาสตร์ ใช้เนื้อหาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เรขาคณิตระบบยูคลิดและเรขาคณิตเชิงวงกลม สาขาสถาปัตยกรรมศาสตร์ ใช้เนื้อหาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เรขาคณิตระบบยูคลิดและเรขาคณิตเชิงโปรเจกทีฟ เป็นต้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2540, น. 27) จึงเกิดการพัฒนาหลักสูตรให้สอดคล้องกับชีวิต สภาพเศรษฐกิจ และทันต่อยุคสมัย

สำหรับการจัดการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ให้นักเรียนบรรลุความสำเร็จของการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ครูจำเป็นต้องใช้วิธีการสอนที่สนับสนุนให้ผู้เรียนเกิดความรู้และความเข้าใจในสิ่งที่ได้เรียนรู้ด้วยตนเอง เปลี่ยนรูปแบบการสอนจากการเป็นผู้บรรยายให้ความรู้ ไปเป็นผู้อำนวยความสะดวก ลดการบรรยายลง ปรับเปลี่ยนการอธิบายเป็นการออกแบบการสอน จัดเตรียมสิ่งแวดล้อม จัดทรัพยากรการเรียนรู้ รวมถึงใช้สื่อการเรียนการสอนใหม่และเทคโนโลยีในการสอนให้เหมาะสมสำหรับเนื้อหาในหลักสูตร ในหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) กำหนดให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจทางเรขาคณิตและการใช้เครื่องมือ รวมทั้งโปรแกรมเรขาคณิต พลวัตเพื่อสร้างรูปเรขาคณิต สำรวจและสร้างข้อความคาดการณ์ทางเรขาคณิต จากการเลื่อนวัตถุ

ในโปรแกรม ตลอดจนนำความรู้เกี่ยวกับการสร้างวัตถุจากโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง และเพิ่มเนื้อหาใหม่ ๆ ที่มีประโยชน์ อันเป็นพื้นฐานของการศึกษาในระดับสูงและเป็นพื้นฐานของการประยุกต์ใช้ในศาสตร์แขนงอื่น ๆ

เวกเตอร์ (Vector) เป็นเนื้อหาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญต่อการศึกษาเรขาคณิต พีชคณิต ซึ่งเป็นพื้นฐานในการประยุกต์ใช้ในสาขาฟิสิกส์และในทางวิศวกรรมเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะวิชาฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีบทเรียนที่เกี่ยวข้องกับการนำเวกเตอร์เชิงเรขาคณิตไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้ตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เช่น การเคลื่อนที่ แรง มวลและกฎการเคลื่อนที่ สมดุลกล งานและพลังงาน การเคลื่อนที่แบบต่าง ๆ ความร้อน สมบัติของแก๊สทฤษฎีจลน์ และไฟฟ้า เป็นต้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2561ก, น. 17) ในขณะที่วิชาคณิตศาสตร์ เป็นการศึกษาเวกเตอร์เชิงพีชคณิต ประกอบด้วย บทนิยามของเวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์ ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ และการประยุกต์ของเวกเตอร์ ได้แก่ การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยผู้เรียนต้องใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและเมทริกซ์ก่อนที่จะเรียนเนื้อหา (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2561ข, น. 124)

จากการศึกษาปัญหาที่พบในการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์ของวรนุช มาตระกูล (2551, น. 87) ซึ่งได้ทำการวินิจฉัยข้อบกพร่องเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ พบว่าด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัติเป็นด้านที่นักเรียนมีข้อบกพร่องมากที่สุด โดยนักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานในเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ นักเรียนไม่เข้าใจระบบพิกัดฉากในสามมิติ ภาพที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเวกเตอร์ และมีปัญหาในการจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัตินวมทั้งขาดทักษะในการเลือกบทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัติที่เหมาะสม นักเรียนเลือกใช้สูตรในการแสดงวิธีการหาคำตอบไม่ตรงกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ เช่น โจทย์ต้องการให้หาเวกเตอร์จากจุด A ไปยังจุด B แต่นักเรียนกลับหาขนาดของเวกเตอร์จากจุด A ไปยังจุด B หรือโจทย์ให้หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ แต่นักเรียนเลือกใช้สูตร $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ เป็นต้น ด้านการคิดคำนวณเป็นข้อบกพร่องรองลงมา สาเหตุเกิดมาจากการขาดความเข้าใจเกี่ยวกับการคิดคำนวณเบื้องต้น คำนวณด้วยความไม่รอบคอบและสรุปคำตอบไม่ถูกต้องหรือครบทุกกรณี และข้อบกพร่องในด้านการตีความจากโจทย์ ซึ่งนักเรียน มองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนดให้กับสิ่งที่โจทย์ต้องการและไม่นำข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ ถิ่นยากร ช่วยทุกข์เพื่อน (2559, น. 57) กล่าวว่าอุปสรรคที่สำคัญในการแก้โจทย์ฟิสิกส์

คือ การวางแผนแก้ปัญหาและการดำเนินการตามแผนที่นักเรียนวางไว้ อันเนื่องมาจากการแก้ไขโจทย์ปัญหาฟิสิกส์ ต้องแปลงประโยคสัญลักษณ์ รูปภาพที่โจทย์กำหนด ให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งในการแปลงรูปภาพให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์นั้น โดยมากมักใช้พื้นฐานเรื่องเวกเตอร์ เช่น การแตกแรงในแนวราบและแนวตั้ง การผลคูณเชิงสเกลาร์ และกฎของไซน์ ซึ่งนักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับหลักการ สูตร กฎต่าง ๆ ทำให้การหาคำตอบของโจทย์ปัญหาทางฟิสิกส์นั้นไม่สามารถสำเร็จลงได้

จากปัญหาดังกล่าว การจัดการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติควรส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในความรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพบว่ามีความรู้ทางคณิตศาสตร์แบ่งได้ 2 ประเภท คือ ความรู้เชิงมโนทัศน์ (Conceptual Knowledge) และความรู้เชิงกระบวนการ (Procedural Knowledge) โดยความรู้เชิงมโนทัศน์เกี่ยวข้องกับแนวคิดสำคัญ โครงสร้างของเนื้อหา คณิตศาสตร์ ครอบคลุมความรู้เกี่ยวกับบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือหลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเหตุผลหรือที่มาของกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ส่วนความรู้เชิงกระบวนการเกี่ยวข้องกับขั้นตอนหรือวิธีทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนการคำนวณและการดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง (อัมพร ม้าคนอง, 2547, น. 3-4) นอกจากนี้ อัมพร ม้าคนอง (2547, น. 54-55) ยังให้ข้อสังเกตว่า การสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้การบอกหรืออธิบายมโนทัศน์โดยตรงก่อนที่นักเรียนจะได้ใช้ความรู้ใช้ความคิดเพื่อสรุปมโนทัศน์ด้วยตนเอง จากนั้นสอนขั้นตอนหรือกระบวนการแก้ปัญหา ก่อนที่จะคิดขั้นตอนหรือกระบวนการแก้ปัญหาขึ้นเอง นักเรียนจะได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ปริมาณมากในเวลาอันรวดเร็ว แต่ขาดความเข้าใจและเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์กับกระบวนการ ผลที่ตามมาคือ นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้เฉพาะตามขั้นตอนที่เรียนมา การเรียนรู้ในลักษณะนี้จะทำให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นความรู้ที่เกิดจากการจดจำมโนทัศน์ และกระบวนการหรือขั้นตอนการแก้ปัญหาเท่านั้น ไม่ใช่ความรู้ที่เกิดจากความเข้าใจ ทำให้ลืมได้ง่ายหรือทำผิด ส่งผลให้เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อบกพร่องในด้านต่าง ๆ รวมทั้งปัญหาในการนำมโนทัศน์ไปประยุกต์ใช้

ในการจัดการเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการนั้น ผู้สอนควรออกแบบชิ้นงานและการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับมโนทัศน์และกระบวนการที่ต้องการพัฒนา ให้ผู้เรียนสร้างความรู้ด้วยตนเอง (อัมพร ม้าคนอง, 2558, น. 22) รวมถึงใช้คำถามที่ส่งเสริมกระบวนการคิดของผู้เรียน ให้ผู้เรียนได้รับประสบการณ์ที่หลากหลาย ลงมือปฏิบัติงาน สังเกต คิดหาเหตุผลหรือแยกแยะสิ่งที่ได้รับรู้จากงานจนนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ แลกเปลี่ยนความคิดกับผู้อื่น จนหาข้อสรุปความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ

โดยใช้งานหรือสถานการณ์ที่กระตุ้นท้าทายความสามารถของผู้เรียน ที่ไม่ยากเกินกว่าที่ผู้เรียนจะเรียนรู้ได้ (ปพนวัจน์ ฤกษ์สิริบุญโชค, 2558, น. 88) ซึ่งอัมพร ม้าคนอง (2558, น. 22) กล่าวถึงแนวคิดการพัฒนาให้เกิดความรู้เชิงมโนทัศน์โดยเลือกใช้สื่อ เอกสารประกอบการสอน นวัตกรรมและเทคโนโลยีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ต้องการพัฒนา พยายามให้ผู้เรียนทำกิจกรรม คิด สังเกต วิเคราะห์ อภิปราย และหาข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง โดยใช้กิจกรรมที่ไม่ยากเกินความสามารถของผู้เรียน และจากข้อสังเกตสำหรับการสอนกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของยูสกิน (Usiskin, 1998, อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547, น. 28-29) กล่าวถึงข้อควรระวังประการหนึ่งคือ การใช้เทคโนโลยีมีผลกับการเปลี่ยนแปลงความสำคัญของความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ทำให้กระบวนการทางคณิตศาสตร์บางอย่างมีความสำคัญมากขึ้น บางอย่างมีความสำคัญน้อยลง และบางอย่างไม่มีการเปลี่ยนแปลงความสำคัญ ตัวอย่างเช่น การคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์จากโจทย์ เทคโนโลยีช่วยคำนวณค่าของผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็ว แต่ผู้ใช้งานต้องมีลำดับขั้นตอนการนำเข้าสู่ข้อมูลอย่างถูกต้อง เพื่อให้ได้คำตอบตรงกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ ทำให้การดำเนินการตามลำดับขั้นตอนมีความสำคัญมากขึ้น แต่การคำนวณมีความสำคัญน้อยลง ส่วนพรีเนอร์ (Preiner, 2008, p. 25) ได้กล่าวสนับสนุนว่า การใช้เทคโนโลยีจะช่วยอำนวยความสะดวกในการดำเนินการและการคำนวณ แต่ต้องไม่เปลี่ยนแปลงความรู้เชิงมโนทัศน์ ซอฟต์แวร์ควรใช้ในการสำรวจสมบัติต่าง ๆ ทางเรขาคณิต และควรอนุญาตให้นักเรียนใช้เครื่องมือในโปรแกรมแก้ปัญหาด้วยวิธีใหม่ ๆ ตามความสนใจของตน

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์สำเร็จรูปที่มีความเป็นพลวัต (Dynamic) ถูกพัฒนาขึ้นโดย มาร์คัส ไฮเฮนวาเทอร์ (Markus Hohenwarter) ในปี พ.ศ. 2554 ต่อมาปี พ.ศ. 2560 ไมเคิล บอร์เชิร์ดส (Michael Borchers) และสถาบันการศึกษาหลายแห่งได้พัฒนาโปรแกรม GeoGebra จนเป็นที่นิยมแพร่หลาย มีการแปลเป็นภาษาต่าง ๆ พรีเนอร์ (Preiner, 2008, pp. 61-63) กล่าวถึงจุดเด่นของโปรแกรม GeoGebra ว่าเป็นโอเพนซอร์สซอฟต์แวร์ ครูและนักเรียนเข้าถึงโปรแกรมได้ฟรี และสามารถนำมาใช้ในการเรียนรู้อย่างไม่มีข้อจำกัด สามารถเข้าถึงโปรแกรมได้ผ่านทางเบราว์เซอร์บนอินเทอร์เน็ตและสามารถใช้งานแอปพลิเคชันบนมือถือได้อีกด้วย นอกจากนั้น GeoGebra ยังเป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัต (Dynamic Mathematics Software: DMS) ซึ่งผสมผสานระหว่างความสามารถของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต (Dynamic Geometry Software: DGS) และระบบพีชคณิตคอมพิวเตอร์ (Computer Algebra System: CAS) โดยสามารถเชื่อมโยงระหว่างเรขาคณิตและ

พีชคณิตได้อย่างสมบูรณ์แบบ กล่าวคือหากผู้ใช้งานบนระบบเรขาคณิตแบบพลวัต โปรแกรม GeoGebra จะนำเสนอสมบัติทางพีชคณิตของวัตถุ (object) ได้ในหน้าต่างพีชคณิต เช่น ในรูปแบบของคู่อันดับ ความสัมพันธ์หรือฟังก์ชัน โดยมีการอธิบายสมบัติทางเรขาคณิตในส่วนที่เรียกว่า Construction Protocol หรือหากผู้ใช้งานบนระบบพีชคณิตคอมพิวเตอร์ โปรแกรม GeoGebra จะปรากฏมุมมองในระบบเรขาคณิตแบบพลวัตได้อีกด้วย ซึ่งโปรแกรม GeoGebra ถูกพัฒนาขึ้นให้มีความสามารถในการสร้างรูปสามมิติตั้งแต่เวอร์ชัน 5 (วุฒิชัย ภูดี และ นครราช อันสุข, 2558) ส่วนโปรแกรม Geogebra ในเวอร์ชัน 6 ได้มีการพัฒนาความสามารถจากเวอร์ชัน 5 ให้ใช้งานได้สะดวกมากยิ่งขึ้น สามารถนำเข้าและส่งออกสื่อจากระบบออนไลน์ได้รวดเร็ว อีกทั้งมีลักษณะเด่นในเรื่องของการสร้าง ขยาย ยืด หดรูปเรขาคณิตได้ นักเรียนสามารถปรับรูปเรขาคณิตได้ตามใจชอบ และสามารถคลิกหมุนรูปสามมิติได้ สามารถปรับมุมมองของรูปสามมิติได้อย่างหลากหลาย ทำให้นักเรียนเห็นภาพชัดเจนมากยิ่งขึ้น

จากลักษณะของโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัตดังกล่าว ผู้วิจัยเชื่อว่า โปรแกรม GeoGebra จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ จากการสร้างและสำรวจความเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ รวมทั้งสังเกตการเคลื่อนที่ของรูปทั้งในมุมมองพีชคณิตและเรขาคณิต สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยนำรูปแบบการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมมโนทัศน์ของจอยส์, เวล, และ แคลฮูน (Joyce, Weil & Calhoun, 2003, pp. 161-178) ซึ่งแบ่งการสอนเป็น 3 ขั้นตอนคือ ขั้นที่ 1 การนำเสนอข้อมูล ขั้นนี้ครูจะนำเสนอตัวอย่างให้นักเรียนเปรียบเทียบคุณลักษณะเฉพาะของตัวอย่างจากนั้นสร้างสมมติฐาน และสรุปนิยามของมโนทัศน์นั้น ขั้นที่ 2 การทดสอบมโนทัศน์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนระบุตัวอย่างที่ครูเสนอเพิ่มเติมว่าตัวอย่างใดบ้างสอดคล้องกับสมมติฐานของนักเรียน ทบทวนสมมติฐาน และยกตัวอย่างของมโนทัศน์ของตน ขั้นที่ 3 การวิเคราะห์กลยุทธ์การคิด เป็นขั้นตอนที่ให้นักเรียนอธิบายวิธีการคิดของตน และร่วมกันอภิปรายถึงบทบาทของสมมติฐานและคุณลักษณะเฉพาะของมโนทัศน์ นอกจากนี้ วิตเทล-จอห์นสัน (Rittle-Johnson, 2017, pp. 186-187) ได้เสนอเทคนิคการสอน 3 ประการที่มีประสิทธิภาพในการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ได้แก่การเปรียบเทียบ การอธิบายตนเอง และการสำรวจก่อนการเรียนรู้ สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สังเคราะห์รูปแบบการสอนโดยใช้ GeoGebra จากเทคนิคการสอนของวิตเทล-จอห์นสันและรูปแบบการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมมโนทัศน์ของจอยส์, เวลและแคลฮูน ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการโดยใช้โปรแกรม GeoGebra โดยแบ่งการสอนเป็น 3 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นสำรวจมโนทัศน์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนสำรวจและเปรียบเทียบมโนทัศน์ผ่านแฟ้มคำสั่ง

โปรแกรม GeoGebra และเขียนคำอธิบายเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์ด้วยตนเองในเอกสาร
แนะแนวทาง โดยมีครูเป็นผู้อำนวยความสะดวกและตอบคำถามที่นักเรียนสงสัย
2) ขั้นตอนทดสอบโนทัศน์ที่ได้รับ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนนำมโนทัศน์ที่ได้รับในขั้นสำรวจมโนทัศน์ไป
ประยุกต์ใช้ในการสร้างชิ้นงานที่สอดคล้องกับมโนทัศน์ในแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra
โดยใช้ขั้นตอนตามความคิดของตนเอง และ 3) ขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ เป็นขั้นที่ให้นักเรียน
เขียนคำอธิบายกระบวนการการสร้างชิ้นงานจากขั้นตอนทดสอบโนทัศน์ที่ได้รับลงในเอกสารแนะ
แนวทาง และให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายหรือเปรียบเทียบกระบวนการสร้างชิ้นงานเพื่อหาข้อสรุป
ของกระบวนการสร้างที่ถูกต้อง

จากที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้
เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการ
เรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัตโปรแกรมหนึ่ง
เพื่อเป็นแนวทางหนึ่งในการจัดการเรียนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัต
ต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์
2. เพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์

ความสำคัญของการวิจัย

1. เป็นแนวทางสำหรับครูคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์
และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. เป็นแนวทางสำหรับครูคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
ในเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม โรงเรียนหอวัง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โรงเรียนหอวัง โดยสุ่มนักเรียนจำนวน 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 3 ห้องเรียนโดยใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียว (One-Stage Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารรถ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ได้ใช้ระยะเวลาทำการทดลองสอน 4 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 3 คาบ ทั้งหมดจำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาที และใช้เวลาในการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 2 คาบ โดยใช้เวลาเรียนปกติ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นจำนวน 12 คาบ ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

หัวข้อที่ 1 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

- | | |
|--|-------|
| 1.1 ระบบพิกัดฉากในสามมิติ | 1 คาบ |
| 1.2 เวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์ | 1 คาบ |
| 1.3 ขนาดของเวกเตอร์และโคไซน์แสดงทิศทาง | 1 คาบ |
| 1.4 การขนานกันและการเท่ากันของเวกเตอร์ | 1 คาบ |

หัวข้อที่ 2 เรื่อง การบวก การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

- | | |
|--------------------------|-------|
| 2.1 การบวก การลบเวกเตอร์ | 1 คาบ |
|--------------------------|-------|

2.2 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	1 คาบ
2.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	1 คาบ
หัวข้อที่ 3 เรื่อง การคูณระหว่างเวกเตอร์	
3.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์	2 คาบ
3.2 ผลคูณเชิงเวกเตอร์	3 คาบ

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
2. ตัวแปรตาม ประกอบด้วย
 - 2.1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
 - 2.2 ความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra หมายถึง กระบวนการสอนที่ครูมีบทบาทในการออกแบบเพิ่มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra กับเอกสารแนะแนวทาง โดยเน้นให้ผู้เรียนค้นพบความรู้เชิงมโนทัศน์ และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ด้วยตนเองผ่านการสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra โดยสังเคราะห์มารูปแบบการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมมโนทัศน์ของจอยส์ และคนอื่น ๆ (Joyce et al., 2003, pp. 161-178) และเทคนิคการสอนเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์และกระบวนการของวิตเทิล-จอห์นสัน (Rittle-Johnson, 2017, pp. 186-187) ดังนี้

1.1 ขั้นสำรวจมโนทัศน์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนสำรวจและเปรียบเทียบมโนทัศน์ผ่านเพิ่มคำสั่งโปรแกรม GeoGebra และเขียนคำอธิบายเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์ด้วยตนเองในเอกสารแนะแนวทาง โดยมีครูเป็นผู้อำนวยความสะดวกและตอบคำถามที่นักเรียนสงสัย

1.2 ขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนนำมโนทัศน์ที่ได้รับในขั้นสำรวจมโนทัศน์ ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างชิ้นงานที่สอดคล้องกับมโนทัศน์ในเพิ่มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra โดยใช้กระบวนการตามความคิดของตนเอง

1.3 ขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนเขียนคำอธิบายกระบวนการสร้างชิ้นงานจากขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับลงในเอกสารแนะแนวทาง และให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายหรือเปรียบเทียบกระบวนการสร้างชิ้นงานเพื่อหาข้อสรุปของกระบวนการสร้างที่ถูกต้อง

2. ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับหลักการ ได้แก่ บทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัติที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งประเมินจากคะแนนที่นักเรียนทำได้จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

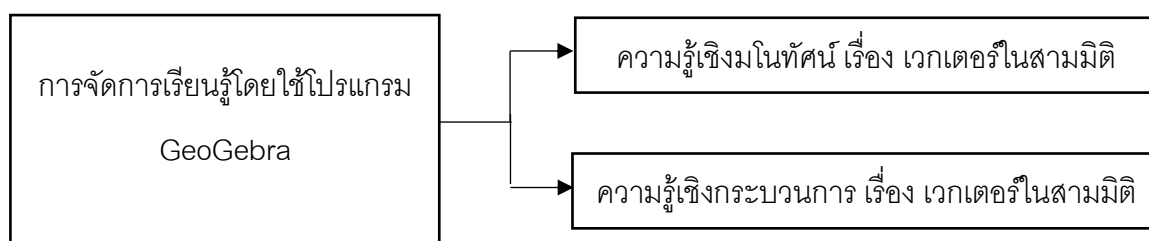
3. ความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามลำดับขั้นตอนที่นำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องของสถานการณ์ต่าง ๆ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งประเมินจากคะแนนที่นักเรียนทำได้จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

4. เกณฑ์ หมายถึง คะแนนจุดตัดที่กำหนดการผ่านระดับที่ยอมรับได้จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยการวิจัยครั้งนี้กำหนดเกณฑ์ร้อยละ 60 เป็นเกณฑ์ที่ใช้สำหรับประเมินความรู้เชิงมโนทัศน์ และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1 สำหรับการประเมินความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ถ้านักเรียนได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์

4.2 สำหรับการประเมินความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ถ้านักเรียนได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์

กรอบแนวคิดในการวิจัย



สมมติฐานของการวิจัย

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด



บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์
 - 1.1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์
 - 1.2 ลักษณะของความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์
 - 1.3 แนวทางการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์
 - 1.4 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์
 - 1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์
2. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra
 - 2.1 ลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra
 - 2.2 โปรแกรม GeoGebra กับการจัดการเรียนรู้
 - 2.3 ข้อควรคำนึงและข้อจำกัดของโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนรู้
 - 2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนรู้
3. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
 - 3.1 เอกสารเกี่ยวกับพัฒนาการจัดการเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
 - 3.2 เอกสารเกี่ยวกับการนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในสาระฟิสิกส์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
 - 3.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ในสามมิติ

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Knowledge) ถือเป็นพื้นฐานของการเรียนรู้สิ่งใหม่และนำไปประยุกต์ใช้อย่างหลากหลาย ความรู้ทางคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ความรู้เชิงมโนทัศน์ (Conceptual Knowledge) และความรู้เชิงกระบวนการ (Procedural Knowledge) โดยให้ความหมาย ลักษณะ แนวทางการพัฒนา และการวัดผลและประเมินผลความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1.1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1.1.1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

วิตเติล-จอห์นสัน และ อลิบาลี (Rittle-Johnson & Alibali Martha, 1999, p. 175) และ วิตเติล-จอห์นสัน และ ชไนเดอร์ (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, p. 558) กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ (Conceptual Knowledge) หมายถึง ความเข้าใจทั้งที่ชัดแจ้งและไม่ชัดแจ้งเกี่ยวกับหลักการที่เป็นนามธรรม หลักการทั่วไป และความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ต่าง ๆ ในขอบเขตของความรู้นั้น

บิง และ โฮย (Bing & Huy, 2016, p. 63) กล่าวถึง ความรู้เชิงมโนทัศน์ว่าเป็น ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับเป็นหลักการพื้นฐานในขอบเขตความรู้นั้น หรือเป็นความรู้พื้นฐานที่อยู่เบื้องหลังขั้นตอนการดำเนินการในวิชาคณิตศาสตร์

ฮาปาซาโล และ คาดีเจวิช (Haapasalo & Kadjevich, 2000, p. 141) และ อัมพร ม้าคอง (2547, น. 49) กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ เป็นความรู้และความชำนาญที่มีประสิทธิภาพในการเชื่อมโยงองค์ประกอบของมโนทัศน์ต่าง ๆ หลักเกณฑ์ ขั้นตอนและอื่น ๆ และแนวคิดที่ได้จากการแก้ปัญหาอาจนำไปสู่มโนทัศน์หรือกฎใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคอง (2558, น. 3) กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ เป็นความรู้ที่เกี่ยวข้องกับความหมายและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ซึ่งครอบคลุมความรู้ต่อไปนี้

- ความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ (Concept) ทฤษฎี (Theory) กฎหรือหลักทางคณิตศาสตร์ (Principle) ทางคณิตศาสตร์
- ความรู้เกี่ยวกับเหตุผลหรือที่มาของขั้นตอน/วิธีการ (Algorithm) ทางคณิตศาสตร์
- ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และการเชื่อมโยงของมโนทัศน์ต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์

จิรรัตน์ จตุรานนท์ (2554, น. 14) กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ เป็นความคิด ความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายหรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงในทิศต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันเพื่อใช้อธิบายหรือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ (Conceptual Knowledge) หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับหลักการ ได้แก่ บทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัติรวมทั้งความรู้ที่ใช้อธิบายเหตุผล ประกอบขั้นตอนที่นำไปสู่คำตอบของสถานการณ์ต่าง ๆ

1.1.2 ความหมายของความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

วิตเติล-จอห์นสัน และ อลิบาลี (Rittle-Johnson & Alibali, 1999, p. 175) และ วิตเติล-จอห์นสัน และ ชไนเดอร์ (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, p. 558) กล่าวว่า ความรู้เชิงกระบวนการ (Procedural Knowledge) หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับลำดับหรือขั้นตอนในการปฏิบัติเพื่อการแก้ปัญหาต่าง ๆ ให้บรรลุเป้าหมาย

บิง และ ไฮย (Bing & Huy, 2016, p. 63) และฮาปาซาโล และ คาไดเจเวช (Haapasalo & Kadjevich, 2000, p. 141) กล่าวถึง ความรู้เชิงกระบวนการ คือ ความรู้ที่เน้นทักษะและขั้นตอนที่เป็นลำดับโดยมีการอ้างอิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างชัดเจน มีลำดับขั้นตอนการดำเนินการที่นำไปสู่วิธีการแก้ปัญหา รวมถึงเป็นความรู้เกี่ยวกับรูปแบบในการแสดงวิธีทำเพื่อนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องของสถานการณ์ปัญหาด้วย

อัมพร ม้าคนอง (2558, น. 3-5) กล่าวว่า ความรู้เชิงกระบวนการ เป็นความรู้เกี่ยวกับวิธีคำนวณ การระบุปัญหา การใช้กฎ กลวิธี และขั้นตอนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งครอบคลุมความรู้ต่อไปนี้

- ความรู้เกี่ยวกับวิธีการระบุปัญหา
- ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการคำนวณตามกฎและเงื่อนไขของกฎ
- ความรู้เกี่ยวกับการทำงาน การแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง

วิมลรัตน์ ศรีสุข (2551, น. 19-25) กล่าวว่า ความรู้เชิงกระบวนการ เป็นความรู้เกี่ยวกับแนวทางในการคิดคำนวณตามกฎ ตามขั้นตอนที่มีความเฉพาะในแต่ละสาระของวิชาคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น ขั้นตอนวิธีในการหารยาว

จิรรัตน์ จตุรานนท์ (2554, น. 14) กล่าวว่า ความรู้เชิงกระบวนการ เกี่ยวข้องกับความรู้ในการใช้กฎขั้นตอนการคำนวณหรือกระบวนการต่าง ๆ ในการอธิบายหรือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง

สรุปได้ว่า ความรู้เชิงกระบวนการ (Procedural Knowledge) หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามลำดับขั้นตอนที่นำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องของสถานการณ์ต่าง ๆ

1.2 ลักษณะของความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1.2.1 ลักษณะที่เป็นองค์ประกอบของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

เดอ เซคโก (De cecco, 1968, pp. 288-289, อ้างถึงใน ชลกันต์ ชมภู, 2559, น. 46-47) อธิบายว่า มโนทัศน์ (Concept) ประกอบด้วย

1. ลักษณะของมโนทัศน์ (Concept attributes) เป็นลักษณะเฉพาะที่มีความแตกต่างและใช้แบ่งแยกมโนทัศน์ออกจากมโนทัศน์อื่น ๆ
2. ค่าของลักษณะ (Attribute values) เป็นค่าที่มีการเปลี่ยนแปลง ตัวอย่างเช่น เมื่อสีเป็นคุณลักษณะของมโนทัศน์ ค่าของมันคือ ขาว แดง น้ำเงิน เป็นต้น
3. จำนวนคุณลักษณะ (Number attributes) เป็นจำนวนคุณลักษณะของมโนทัศน์ที่แตกต่างจากมโนทัศน์อื่น ตัวอย่างเช่น สีเหลืองมีสีน้ำเงิน มี 2 คุณลักษณะ คือ สีและรูปแบบ
4. ลักษณะเด่นเฉพาะ (Dominance of the attributes) เป็นลักษณะที่ทำให้สามารถแบ่งแยกได้ลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น ตัวอย่างเช่น สีเหลืองสีแดง อาจมีคุณลักษณะเฉพาะคือ สีแดงชนิดที่ 1

จอยส์ และคนอื่น ๆ (Joyce et al., 2003, pp. 167-168) กล่าวว่า มโนทัศน์ประกอบด้วย องค์ประกอบ 3 องค์ประกอบ คือ

1. ชื่อมโนทัศน์ (Concept name) เป็นชื่อเฉพาะที่ใช้เรียกสิ่งของประเภทเดียวกัน
2. ลักษณะ (Attribute) เป็นคุณสมบัติที่แยกมโนทัศน์โดยเฉพาะออกจากมโนทัศน์อื่น มี 2 ประเภท คือ ลักษณะที่จำเป็น (Essential attributes) คือลักษณะที่ต้องมีมโนทัศน์และจำเป็นต้องใช้ในการจำแนกมโนทัศน์นั้น ๆ ออกจากมโนทัศน์อื่น และลักษณะที่ไม่จำเป็น (Non-essential attributes) คือลักษณะที่สังเกตได้ในมโนทัศน์ แต่ไม่จำเป็นสำหรับการจำแนกมโนทัศน์นั้น ๆ ออกจากมโนทัศน์อื่น
3. คุณค่าของลักษณะ (Attribute value) คือระดับคุณค่าของแต่ละลักษณะที่จะใช้ในการจำแนกประเภทของมโนทัศน์ ตัวอย่างเช่น ทุกคนสามารถเป็นได้ทั้งคนที่มีเหตุผลและไร้เหตุผลพร้อมกัน คำถามคือ จะรู้ได้อย่างไรว่าต้องมีความมีเหตุผลถึงระดับใดที่เพียงพอในการจำแนกได้ว่าเป็นคนมีเหตุผลหรือเป็นคนไร้เหตุผล

จากข้างต้น ผู้วิจัยสรุปได้ว่า ลักษณะที่เป็นองค์ประกอบของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย ชื่อมโนทัศน์ (Concept name) ใช้ในการเรียกสิ่งที่มีลักษณะเหมือนกัน อยู่ในประเภทเดียวกัน คุณลักษณะของมโนทัศน์ (Concept attributes) เป็นลักษณะเฉพาะของมโนทัศน์ที่มีความแตกต่างและใช้แบ่งแยกมโนทัศน์ออกจากมโนทัศน์อื่น ๆ และคุณค่าของลักษณะ (Attribute values) เป็นระดับคุณค่าที่มีการเปลี่ยนแปลง ใช้ในการจำแนกประเภทของมโนทัศน์

1.2.2 ลักษณะที่เป็นองค์ประกอบของความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

กรินสไตน์ และ ลิปซี่ (Grinstein & Lipsey, 2001, 23, อ้างถึงใน สุนิตดา เรืองศิริเศรษฐ์, 2552, น. 17) กล่าวว่า ลักษณะของกระบวนการทางคณิตศาสตร์มี 2 ลักษณะ คือ

1. กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะแน่นอน (Finite description) หมายถึง กระบวนการทางคณิตศาสตร์จะมีขั้นตอน (Step) ที่มีลำดับในการคิดตายตัวในการดำเนินการจนสำเร็จ เหมือนกับการดำเนินการของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

2. กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เป็นการแสดงทักษะอย่างหนึ่ง (Effective) หมายถึง กระบวนการที่แต่ละขั้นตอนของนักเรียนเขียนหรือแสดงวิธีทำ จะเป็นการบ่งบอกความสามารถในการแสดงขั้นตอนทางคณิตศาสตร์

นอกจากนี้ กระบวนการทางคณิตศาสตร์แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีขั้นตอนแบบเดียว (Deterministic) เช่น ขั้นตอนวิธีของยุคลิด ในการหาตัวหารร่วมมากของจำนวนสองจำนวน จะมีขั้นตอนที่แน่นอน ไม่สามารถข้ามขั้นตอนได้

2. กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สามารถทำได้หลายขั้นตอน (Nondeterministic) ขั้นตอนทางคณิตศาสตร์แบบนี้สามารถที่จะเปลี่ยนหรือลดขั้นตอนได้

จากข้างต้น ผู้วิจัยสรุปได้ว่ากระบวนการทางคณิตศาสตร์มีทั้งขั้นตอนที่มีลักษณะแน่นอน คือมีลำดับการคิดที่ตายตัว ไม่สามารถข้ามขั้นตอนได้ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะไม่แน่นอน มีขั้นตอนการคิดที่ไม่ตายตัว สามารถที่จะเปลี่ยนหรือลดขั้นตอนได้

1.3 แนวทางการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1.3.1 แนวทางการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

กันเทอร์ เอสเตส และ ชวาป (Günter, Estes & Schwab, 1990, pp. 98-105) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการสอนให้เกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ ดังนี้

1. เลือกและนิยามมโนทัศน์ โดยมโนทัศน์นั้นจะต้องสอดคล้องกับเนื้อหา ต้องมีความชัดเจนและมีการอ้างเหตุผลที่สามารถพิสูจน์เป็นที่ประจักษ์ได้
 2. กำหนดคุณลักษณะที่จำเป็นของมโนทัศน์ที่ต้องการศึกษา
 3. ยกตัวอย่างที่เป็นทางบวกและทางลบของมโนทัศน์ ตัวอย่างทางบวกต้องมีคุณสมบัติที่สำคัญเพื่อให้เห็นลักษณะของมโนทัศน์ แต่ตัวอย่างทางลบไม่ต้องมีคุณสมบัติที่สำคัญครบทุกข้อ แต่ให้เห็นจุดที่ต้องระวังหรือนอกเหนือขอบเขตของมโนทัศน์ที่สนใจ
 4. อธิบายให้นักเรียนทราบความหมายของนิยาม
 5. เพื่อเปรียบเทียบนิยาม ใช้การยกตัวอย่างที่เป็นปัจจุบันและมีการอ้างเหตุผลเป็นข้อ ๆ และจัดประเภทคุณสมบัติของตัวอย่างทั้งทางบวกและทางลบ
 6. ให้นักเรียนอธิบายความหมายของมโนทัศน์ตามที่นักเรียนเข้าใจ
 7. ครูให้ตัวอย่างเสริม หากนักเรียนไม่เข้าใจมโนทัศน์
 8. ให้นักเรียนออกมาอธิบายหน้าชั้นเรียน เพื่อตรวจสอบได้ว่านักเรียนเข้าใจมโนทัศน์นั้นถูกต้อง
 9. การวัดผล ถามนักเรียนถึงมโนทัศน์ที่ได้รับ ให้นักเรียนยกตัวอย่างเสริม เพื่อหาคุณสมบัติที่จำเป็นหรือถามเพื่อพัฒนาตัวอย่างทางบวกและทางลบ
- อัมพร ม้าคนอง (2558, น. 22) กล่าวถึงแนวคิดและแนวทางในการการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. จัดการเรียนรู้ให้มีความหมายสำหรับนักเรียน เป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ระดับสูงขึ้น ซึ่งมีความจำเป็นสำหรับการใช้งานและพัฒนาความคิด พร้อมทั้งให้นักเรียนได้เชื่อมโยงความรู้ไปสู่วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ ความรู้คณิตศาสตร์ควรเกิดจากความเข้าใจ ไม่ใช่การท่องจำ เพื่อป้องกันการลืมความรู้ของนักเรียน การที่นักเรียนเข้าใจในสิ่งที่เรียนรู้ ทำให้นักเรียนเห็นประโยชน์ของสิ่งที่เรียน และสามารถพัฒนาไปใช้สำหรับการเรียนรู้ในอนาคต
2. พัฒนาการคิด เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ การคิดไตร่ตรอง การคิดอย่างมีวิจารณญาณควบคู่ไปกับการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เนื่องจาก การคิดนั้น เป็นพื้นฐานสำคัญของการทำความเข้าใจและพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนการนำความรู้ไปใช้ในสาขาต่าง ๆ
3. ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์ที่นักเรียนควรจะได้รับ โดยต้องมีการวิเคราะห์มโนทัศน์ย่อยที่จะสอน หลังจากนั้นออกแบบกิจกรรมการ

เรียนรู้นั้น เมื่อต้องการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ต้องมีการประเมินพฤติกรรมของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง ใช้คำถามกระตุ้น เพื่อส่งเสริมการคิด ช่วยให้นักเรียนสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเองและสามารถขยายไปสู่ความรู้ใหม่สำหรับนักเรียนได้

4. เลือกใช้สื่อ เอกสารประกอบการสอน หรือเทคโนโลยีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับมโนทัศน์ที่ต้องการ เช่น Geometer's Sketch Pad, TI 82, TI 83 หรือเครื่องคำนวณเชิงกราฟ รวมทั้งจัดสภาพแวดล้อมของการเรียนรู้ที่เอื้อต่อการใช้สื่อเหล่านั้น

5. เพื่อที่จะปรับการจัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ควรประเมินการพัฒนามโนทัศน์อย่างต่อเนื่องในการเรียนรู้ของนักเรียน โดยสามารถใช้การประเมินรายบุคคลหรือการประเมินโดยรวม โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การประเมินพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคน พร้อมทั้งสะท้อนการสอนจากผลการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นกับนักเรียน

6. พยายามให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรม สังเกต คิด วิเคราะห์ อภิปราย และหาข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่ท้าทายความสามารถของนักเรียน และไม่ยากเกินความสามารถของนักเรียน

ปพนวัจน์ ฤกษ์สิญญโชค (2558, น. 88) กล่าวว่ากระบวนการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับใช้ในการวิจัย คือ

1. การนำเสนอสิ่งเร้าให้นักเรียนได้รู้จัก
2. จัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีปฏิสัมพันธ์ในลักษณะต่าง ๆ กับสิ่งเร้า
3. ให้นักเรียนระบุสิ่งที่รับรู้จากการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งเร้า
4. ให้นักเรียนค้นหาเหตุผลหรือแยกแยะสิ่งที่ได้รับรู้จากสิ่งเร้า จนนำไปสู่การคาดการณ์ถึงลักษณะร่วมของสิ่งเร้า
5. สร้างสมมติฐานที่เกี่ยวกับการรวมลักษณะของสิ่งเร้าที่เหมือนกัน
6. ทดสอบสมมติฐานที่สร้างขึ้นในสถานการณ์หนึ่ง
7. เลือกสมมติฐานที่ครอบคลุมสิ่งเร้าที่มีลักษณะบางประการร่วมกันได้
8. จัดลักษณะของสิ่งเร้าที่คัดเลือกได้ จากสมมติฐานให้สัมพันธ์กับกระบวนการคิดที่มีอยู่เดิมในโครงสร้างของความคิด
9. การสรุปอ้างอิง หรือการสรุปครอบคลุม โดยการสรุปเป็นมโนทัศน์ที่ได้
10. หาตัวแทนของมโนทัศน์ใหม่ โดยใช้สัญลักษณ์ที่เหมาะสม

จอยส์ และคนอื่น ๆ (Joyce et al., 2003, pp. 161-178) ได้กล่าวถึงรูปแบบการสอนเพื่อเสริมสร้างมโนทัศน์ (Attaining Concept Model) 3 ขั้นตอน โดยมีรายละเอียดในการจัดการเรียนรู้อย่างนี้

ขั้นตอนที่ 1 การนำเสนอข้อมูลและระบุมโนทัศน์ (Presentation of Data and Identification of Concept) โดยมีขั้นตอนดังนี้

- 1.1 ครูนำเสนอตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่ต้องการจะสอน
- 1.2 นักเรียนพิจารณาตัวอย่างและเปรียบเทียบว่าตัวอย่างนั้น
- 1.3 นักเรียนสร้างสมมติฐานที่เกี่ยวกับมโนทัศน์เบื้องต้น
- 1.4 นักเรียนกำหนดบทนิยามจากคุณสมบัติของมโนทัศน์

ในขั้นตอนนี้ ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่หลากหลาย ทั้งตัวอย่างทางบวกและตัวอย่างทางลบที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้น โดยที่ตัวอย่างทางบวกควรประกอบด้วยลักษณะที่จำเป็นของมโนทัศน์ จะต้องชัดเจนและเฉพาะเจาะจง เพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบลักษณะเหล่านั้น ในขณะที่ตัวอย่างทางลบจะขาดลักษณะเหล่านั้น จากนั้นนักเรียนตั้งสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้น และเขียนเป็นนิยามตามที่นักเรียนเข้าใจ

ขั้นตอนที่ 2 การทดสอบความเข้าใจมโนทัศน์ (Teaching Attainment of the Concept) โดยมีขั้นตอนดังนี้

- 2.1 ครูนำเสนอตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์เพิ่มเติม จากนั้นนักเรียนระบุตัวอย่างที่สอดคล้องกับมโนทัศน์ และไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์ โดยใช้สมมติฐานของตนเอง
- 2.2 นักเรียนกำหนดสมมติฐานใหม่จากตัวอย่าง
- 2.3 ครูเฉลยสมมติฐานที่ถูกต้องที่นักเรียนได้เรียนรู้ พร้อมทั้งนำเสนอชื่อมโนทัศน์ บทนิยาม และลักษณะที่สำคัญของมโนทัศน์นั้น

- 2.4 นักเรียนยกตัวอย่างจากการเรียนรู้มโนทัศน์ที่ถูกต้อง

ในขั้นตอนนี้ เป็นขั้นที่ครูทดสอบนักเรียนความเข้าใจในมโนทัศน์ของนักเรียน โดยการนำเสนอให้นักเรียนได้เห็นตัวอย่างชุดใหม่ ก่อนที่จะพิจารณาว่าความสอดคล้องของตัวอย่างกับมโนทัศน์ หากเห็นว่าสมมติฐานนั้นจำแนกตัวอย่างชุดใหม่ได้ ให้นักเรียนตั้งสมมติฐานใหม่จนกว่านักเรียนจะเข้าลักษณะที่สำคัญของมโนทัศน์นั้น เมื่อนักเรียนส่วนมากเข้าใจมโนทัศน์แล้ว ครูเฉลยสมมติฐานที่ถูกต้อง โดยบอกชื่อมโนทัศน์ บทนิยาม และลักษณะสำคัญของมโนทัศน์ จากนั้นให้นักเรียนยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับมโนทัศน์ตามความเข้าใจของตนเอง

ขั้นตอนที่ 3 การวิเคราะห์กลยุทธ์ของการคิด (Analysis of Thinking Strategies) โดยมีขั้นตอนดังนี้

3.1 นักเรียนร่วมกันอภิปรายวิธีการที่นักเรียนใช้กำหนดสมมติฐาน

3.2 นักเรียนสรุปเชื่อมโยงโน้ตสโนว์ บทนิยาม และลักษณะที่สำคัญของมโนทัศน์ที่ถูกต้อง

ในขั้นตอนนี้ นักเรียนจะต้องวิเคราะห์แนวคิดที่นำไปสู่การเข้าใจมโนทัศน์ของตนเอง โดยนักเรียนจะต้องอธิบายวิธีการคิดของตนเองโดยการนำเสนอหน้าชั้นเรียน เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจที่มาของมโนทัศน์นั้น และนักเรียนมีกระบวนการคิดอย่างไร หากพบว่า สมมติฐานเบื้องต้นไม่ถูกต้อง การวิเคราะห์เช่นนี้ ช่วยให้นักเรียนเปรียบเทียบความแตกต่างของกลยุทธ์การคิดของตนเองและนักเรียนคนอื่นได้

1.3.2 แนวทางการพัฒนาความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ฮีบर्ट (Hiebert, 1989, อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2546, น. 24) ได้เสนอขั้นตอนการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นการพัฒนาความหมายสำหรับสัญลักษณ์ เป็นขั้นตอนการเชื่อมโยงระหว่างสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนพบเป็นประจำกับมโนทัศน์หรือวัตถุที่สัญลักษณ์เหล่านั้นถูกใช้แทน ในทางคณิตศาสตร์จะใช้สัญลักษณ์สองประเภทใหญ่ ๆ คือ จำนวน เช่น 1, 2, 4 และเครื่องหมายแสดงการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น $+$, $-$, $\times$, $\div$ เป็นต้น

2. ขั้นพัฒนาความหมายสำหรับกฎและการดำเนินการ เป็นขั้นพัฒนาความหมายของสิ่งที่จะกลายเป็นกฎหรือขั้นตอนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น ต้องการอธิบายขั้นตอนการหาผลลบ $65 - 27$ โดยประโยคสัญลักษณ์นี้ แทนการหัก 27 ออกจาก 65 โดยเริ่มจากหัก 20 ออกจาก 60 และหัก 7 ออกจาก 5 แต่เนื่องจากหัก 7 ออกจาก 5 ไม่ได้ จึงใช้วิธีใหม่คือแบ่ง 60 ออกเป็น 50 กับ 10 แล้วให้ 10 รวมกับ 5 เป็น 15 ซึ่งจะทำให้สามารถหักได้ โดยหัก 20 ออกจาก 50 และหัก 7 ออกจาก 15 ซึ่งจะเหลือ 30 และ 8 ตามลำดับ ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็น 38 ซึ่งสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์แสดงแต่ละขั้นตอนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 65 - 27 &= (60 - 20) + (5 - 7) = (50 - 20) + (10 + 5 - 7) \\ &= 30 + 8 = 38 \end{aligned}$$

3. ขั้นตรวจสอบความเป็นเหตุเป็นผล เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถคาดคะเนคำตอบที่ใกล้เคียงความจริงได้ จากการใช้ความหมายในขั้นที่ 1 เช่น ในการหาผลบวก $1 + 4$ หาก

นักเรียนทราบความหมายของ 4 หมายถึง จำนวนของที่รวมกันได้ 4 ชิ้น นักเรียนจะสามารถคาดคะเนได้ว่า คำตอบที่ได้ต้องมากกว่า 4 เพราะ $\frac{2}{3}$ มีค่าไม่ถึง 1 คำตอบจึงอาจเป็น 5 หรือ 6 หรือ 7

การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของฮีเบิร์ต ช่วยทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มากกว่าการจำขั้นตอนหรือวิธีการคำนวณไปใช้ ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการนำความรู้ที่ได้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์อย่างแท้จริง ซึ่งยูสกิน (Usiskin, 1998, อ้างถึงใน อัมพร ม้าคอง, 2547, น. 55-56) ได้ให้ข้อสังเกตสำหรับการสอนกระบวนการทางคณิตศาสตร์ คือ

1. การใช้เทคโนโลยีเพื่อเปลี่ยนแปลงความสำคัญของกระบวนการทางคณิตศาสตร์ กระบวนการอย่างมีความสำคัญมากขึ้น บางอย่างมีความสำคัญน้อยลง แต่มีกระบวนการบางอย่างที่ไม่เปลี่ยนแปลงความสำคัญ
2. การพัฒนาให้เกิดกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สามารถพัฒนาได้ 3 ชนิด คือ ชนิดที่สามารถคิดได้โดยไม่ต้องทอด ชนิดที่คิดได้โดยต้องทอด และชนิดที่ทำได้โดยการช่วยเหลือเพิ่มเติมจากครู
3. ไม่ว่าครูคิดว่าการสอนกระบวนการทางคณิตศาสตร์อะไร นักเรียนอาจทำได้โดยกระบวนการที่แตกต่างออกไป
4. การจะใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ครูควรเตรียมตัวและหาวิธีที่จะดำเนินการสอนกระบวนการทางคณิตศาสตร์นั้นอย่างเหมาะสม
5. เพื่อให้เป็นการคุ้มค่าต่อการสอน ครูควรตั้งจุดมุ่งหมายในการสอนกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนก่อนการสอน

นอกจากนี้ ริตเทิล-จอห์นสัน (Rittle-Johnson, 2017, น. 186-188) ได้นำเสนอเทคนิคการสอนสามประการที่มีประสิทธิภาพในการส่งเสริมทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ได้แก่ การเปรียบเทียบ การอธิบายด้วยตนเอง และการสำรวจก่อนการสอน

1. การเปรียบเทียบ (Comparing)

การเปรียบเทียบ เป็นกระบวนการที่ใช้อย่างแพร่หลาย และเป็นทางเลือกในการแก้ปัญหาที่สามารถส่งเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนได้ดูตัวอย่างกระบวนการที่ถูกต้องในการแก้ปัญหาย่อย 2 กระบวนการในการแก้ปัญหาเดียวกัน และครูกระตุ้นให้นักเรียนเปรียบเทียบ และไตร่ตรองกระบวนการเหล่านั้น สำหรับนักเรียนที่ทราบขั้นตอนอย่างใดอย่างหนึ่งก่อนการเปรียบเทียบกับกระบวนการอื่น จะช่วยเพิ่มพูนความรู้เชิงมโนทัศน์

ความรู้เชิงกระบวนการ และความยืดหยุ่นของกระบวนการ สำหรับคนที่ไม่ทราบกระบวนการ แก้ปัญหาอย่างใดอย่างหนึ่งก่อนการทำการเปรียบเทียบ สามารถเลือกใช้วิธีการที่เหมาะสมในการ แก้ปัญหาของตนเอง นอกจากนี้การเปรียบเทียบกระบวนการที่ถูกต้องกับกระบวนการที่ไม่ถูกต้อง จะช่วยลดความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ได้ดีขึ้นอีกด้วย

2. การสร้างคำอธิบายด้วยตนเอง (Self-Explaining)

การสร้างคำอธิบายด้วยตนเอง หรือการสร้างคำอธิบายเพื่อให้เข้าใจถึง ข้อมูลใหม่ ๆ เป็นอีกหนึ่งกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ อีกทั้งเป็นการกระตุ้นให้นักเรียน อธิบายข้อมูลใหม่ ๆ เช่น การยกตัวอย่างประกอบกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การกระตุ้นให้ นักเรียนระดับประถมศึกษาอธิบายว่าเหตุใดการแก้ปัญหามathการเท่ากันทางคณิตศาสตร์นั้นถูกต้อง หรือไม่ถูกต้อง ซึ่งสนับสนุนความรู้เชิงมโนทัศน์และกระบวนการมากกว่าการแก้ปัญหาโดยไม่ต้อง สร้างคำอธิบายด้วยตนเอง การสร้างคำอธิบายด้วยตนเองช่วยให้เกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ โดยการ รวบรวมความรู้ไว้เป็นคำอธิบาย มีการเชื่อมโยงข้อมูลใหม่ ๆ หรือเชื่อมโยงข้อมูลกับความรู้เดิม นอกจากนี้การสร้างคำอธิบายด้วยตนเองยังอำนวยความสะดวกในการทำความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ และกระบวนการ โดยการให้ความสำคัญกับคุณสมบัติเชิงโครงสร้าง แทนที่จะเป็นลักษณะ ภายนอกของเนื้อหาที่จะช่วยให้นักเรียนเห็นลักษณะของโครงสร้างที่สำคัญของตัวอย่างและ ขั้นตอนที่ไม่เกี่ยวข้องกับลักษณะภายนอกเฉพาะของตัวอย่าง การกระตุ้นให้นักเรียนระดับ ประถมศึกษาอธิบายว่า ทำไมวิธีการในปัญหามathการเท่ากันทางคณิตศาสตร์ถึงถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง ยังสนับสนุนการถ่ายโอนกระบวนการ และในทำนองเดียวกันการกระตุ้นให้นักเรียนระดับ มัธยมศึกษาตอนปลายทำตัวอย่างของปัญหาความน่าจะเป็น ก็จะสนับสนุนความรู้เกี่ยวกับความ น่าจะเป็นอย่างมาก จากการวิเคราะห์ห่อภิมาณ (meta-analysis) ในการศึกษาเชิงทดลองโดยมีกลุ่ม ตัวอย่าง 26 คนเกี่ยวกับการสร้างคำอธิบายด้วยตนเองเมื่อเรียนคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างมีอายุ ระหว่าง 4 ถึง 22 ปี ยืนยันว่าการสร้างคำอธิบายด้วยตนเองช่วยกระตุ้นความรู้เกี่ยวกับ กระบวนการ โดยเฉพาะอย่างยิ่งกระบวนการถ่ายโอนเช่นเดียวกับความรู้เชิงมโนทัศน์มากขึ้น ผลลัพธ์จะมากขึ้นหากมีการสนับสนุนคำอธิบายที่มีคุณภาพสูง เช่น คำอธิบายบางส่วนเพื่อให้ สมบูรณ์ หากไม่มีการสนับสนุนบางครั้งเด็กและผู้ใหญ่อาจมีความลำบากในการสร้างคำอธิบายที่ เป็นประโยชน์เมื่อถูกกระตุ้น การฝึกอธิบายตนเองและการตอบสนองคำอธิบายที่มีโครงสร้างจะ ช่วยสนับสนุนให้นักเรียนสร้างกระบวนการอย่างมีประสิทธิภาพ เช่น การเลือกคำอธิบายจาก รายการ กระตุ้นให้นักเรียนสร้างคำอธิบายเมื่อเรียนคณิตศาสตร์ส่งเสริมความรู้และกระบวนการ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อมีคำอธิบายที่ได้รับการสนับสนุนจากครู

3. การสำรวจก่อนการสอน (Exploring before Instruction)

นักเรียนที่ได้รับการสำรวจด้วยตนเองก่อนการเรียนรู้ สามารถค้นพบและสนใจกับข้อมูลที่สำคัญ ในขณะที่การสอนเนื้อหาโดยตรง นักเรียนมักไม่สามารถค้นพบรายละเอียดที่สำคัญด้วยตนเอง ดังนั้นการจัดการสอนที่มีประสิทธิภาพคือ การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจปัญหา ก่อน เช่น นักเรียนระดับประถมศึกษาแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ไม่คุ้นเคยจากบทเรียนเกี่ยวกับการเท่ากัน ค้นหาลำดับการแก้ปัญห ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น นักเรียนที่สำรวจและคิดค้นสูตรของตัวเองในการคำนวณความหนาแน่น ก่อนได้รับการสอนเรื่องความหนาแน่น จะทำให้ความรู้ที่ได้นั้นจะถูกถ่ายโอนมากกว่า เมื่อเทียบกับนักเรียนที่แก้ปัญห หลังจากจบบทเรียน นักเรียนที่แก้ปัญหที่ไม่คุ้นเคยก่อนที่จะได้รับการสอนโดยตรง จะได้รับความรู้เชิงมโนทัศน์หรือความรู้เชิงกระบวนการ ในลักษณะที่ลึกซึ้งมากขึ้นกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยตรง การสำรวจก่อนการสอนจะได้ผลดียิ่งขึ้นหากทำร่วมกับกระบวนการเปรียบเทียบ กล่าวคือ ในขณะที่นักเรียนสำรวจจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง และเปรียบเทียบกระบวนการ จะส่งเสริมให้นักเรียนเห็นความแตกต่าง และสร้างข้อสังเกตเกี่ยวกับมโนทัศน์หรือกระบวนการในความคิดของตน และหากครูกระตุ้นความคิดนี้ จะทำให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์หรือกระบวนการได้ดียิ่งขึ้น

กล่าวโดยสรุปคือ การเปรียบเทียบ การสร้างคำอธิบายด้วยตนเอง และการสำรวจก่อนการสอน เป็นเทคนิคการเรียนรู้ที่สามารถนำมาปรับใช้เพื่อให้นักเรียนเกิดทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการสำรวจก่อนการสอนจะทำให้นักเรียนได้รับความรู้และใส่ใจรายละเอียดที่สำคัญได้ดียิ่งขึ้น การสร้างคำอธิบายอธิบายด้วยตนเอง ช่วยให้เกิดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ และสามารถเชื่อมโยงองค์ความรู้ของนักเรียนได้

จากแนวทางการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ผู้วิจัยได้สังเคราะห์รูปแบบการสอนโดยนำรูปแบบการสอนเพื่อเสริมสร้างมโนทัศน์ของจอยส์ และคนอื่น ๆ (Joyce et al., 2003, pp. 161-178) และเทคนิคการสอนสามประการที่มีส่งเสริมทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของริตเทิล-จอห์นสัน (Rittle-Johnson, 2017, pp. 186-188) มาใช้ในการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ดังนี้

1. ขั้นสำรวจมโนทัศน์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนสำรวจและเปรียบเทียบมโนทัศน์ผ่านแฟ้มคำสั่งโปรแกรม GeoGebra และเขียนคำอธิบายเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์ด้วยตนเองลงในเอกสารแนะแนวทาง โดยมีครูเป็นผู้อำนวยความสะดวกและตอบคำถามที่นักเรียนสงสัย โดยมีขั้นตอนดังนี้

1.1 ครูแจกแฟ้มคำสั่งโปรแกรม GeoGebra และเอกสารแนะแนวทาง
ให้กับนักเรียน

1.2 นักเรียนสำรวจและเปรียบเทียบมโนทัศน์ผ่านแฟ้มคำสั่งโปรแกรม
GeoGebra

1.3 นักเรียนเขียนคำอธิบายเกี่ยวกับมโนทัศน์ด้วยตนเองลงในเอกสาร
แนะแนวทาง

2. ขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนนำสมบัติของมโนทัศน์ที่
ได้รับในขั้นสำรวจมโนทัศน์ ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างชิ้นงานที่สอดคล้องกับมโนทัศน์นั้นลงใน
แฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra โดยใช้วิธีการตามความคิดของตนเอง โดยมีขั้นตอนดังนี้

2.1 ครูใช้คำถามเพื่อยืนยันความถูกต้องของมโนทัศน์ที่นักเรียนได้รับ

2.2 นักเรียนนำสมบัติของมโนทัศน์ที่ได้รับสร้างชิ้นงานในโปรแกรม
GeoGebra โดยใช้วิธีการตามความคิดของตน

2.3 นักเรียนทดสอบชิ้นงานในโปรแกรม GeoGebra ของตนกับตัวอย่าง
ในเอกสารแนะแนวทาง

3. ขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนเขียนคำอธิบายวิธีการ
การสร้างชิ้นงานจากขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับลงในเอกสารแนะแนวทาง และให้นักเรียนร่วมกัน
อภิปรายหรือเปรียบเทียบวิธีการสร้างชิ้นงานเพื่อหาวิธีการสร้างที่ถูกต้อง หลังจากนั้นครูแจก
ใบสรุปความรู้ให้กับนักเรียน โดยมีขั้นตอนดังนี้

3.1 นักเรียนเขียนคำอธิบายกระบวนการสร้างชิ้นงานในโปรแกรม
GeoGebra ลงในเอกสารแนะแนวทาง

3.2 ครูนำนักเรียนร่วมกันอภิปรายหรือเปรียบเทียบกระบวนการสร้าง
ชิ้นงานที่ถูกต้อง

3.3 ครูและนักเรียนหาข้อสรุปของกระบวนการที่สามารถดำเนินงานสู่
เป้าหมายได้ถูกต้อง

3.4 ครูสรุปความรู้และแจกใบสรุปความรู้ให้กับนักเรียน

1.4 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1.4.1 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

หลังจากที่นักเรียนได้รับการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์แล้วจึงต้องมีการตรวจสอบว่าความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นมีมากน้อยเพียงใดซึ่งนักการศึกษาหลายท่านได้อธิบายแนวทางการวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

วิลสัน (Wilson, 1971, pp. 645-670. อ้างถึงใน วิมลรัตน์ ศรีสุข, 2551, น. 44) กล่าวถึงการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นการวัดพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยในระดับของความเข้าใจ วัดความสามารถในการสรุปความหมายของสิ่งที่ได้รับจากการเรียนรู้ตามความเข้าใจของตนเอง รู้จักนำข้อเท็จจริงของเนื้อหาต่าง ๆ ที่ได้เรียนรู้แล้วมาสัมพันธ์กัน ตัวอย่างของข้อสอบวัดมโนทัศน์เป็นดังนี้

ตัวอย่าง จุดปลายของรังสีมีกี่จุด

ก. ไม่มีจุดปลาย

ข. 1 จุด

ค. 2 จุด

ง. 3 จุด

จ. มากมายจนนับไม่ถ้วน

เฟรเยอร์, เฟรดดริก, และ คลาสไมเออร์ (Frayer, Fredrick & Klausmeier, 1972, pp. 218-224, อ้างถึงใน แสงเดือน อาตมยันทน์, 2557, น. 62) ได้พัฒนารูปแบบการประเมินความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นจะต้องทำการวิเคราะห์เนื้อหานั้นก่อนแล้วค่อยออกข้อสอบให้สอดคล้องกับมโนทัศน์นั้นแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ควรประกอบด้วย

1. คุณลักษณะของตัวอย่างมโนทัศน์
2. สิ่งที่เป็นตัวอย่างและไม่ใช่ตัวอย่างของมโนทัศน์
3. คุณลักษณะที่มีความสัมพันธ์และไม่สัมพันธ์กัน
4. คำจำกัดความของมโนทัศน์
5. การนำมโนทัศน์ไปสู่หลักการ

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (Cited in Underhill et al., 1992, p. 467, อ้างถึงในวิมลรัตน์ ศรีสุข, 2551, น. 44) กล่าวว่า การประเมินมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 2 ส่วนคือการวัดความรู้ความเข้าใจในมโนทัศน์และความสามารถของนักเรียนที่จะนำความรู้ความเข้าใจนั้นไปแก้ปัญหา

ริตเทิล-จอห์นสัน และ ชไนเดอร์ (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, pp. 1121-1122) ได้แบ่งวิธีการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ไว้เป็นแบบชัดแจ้งและแบบโดยนัย ซึ่งได้รวบรวมตัวอย่างงานที่ใช้ในการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ทางแบบโดยชัดแจ้งและโดยนัยไว้ดังนี้

การวัดแบบโดยนัย (Implicit Measures)

1. ประเมินกระบวนการที่ไม่คุ้นเคย เช่น ตัดสินใจว่าเห็นด้วยหรือไม่สำหรับการข้ามบางรายการขณะคำนวณ
2. ประเมินด้วยตัวอย่างของมโนทัศน์ เช่น ตัดสินใจว่าประโยค $3 = 3$ หรือไม่ หรือถ้า $45 + 39 = 84$ แล้วจำเป็นต้องคำนวณหาคำตอบของ $39 + 45$ หรือไม่
3. ประเมินคุณภาพของคำตอบที่ได้จากบุคคลอื่น เช่น ประเมินว่าคนหนึ่งรู้มากแค่ไหนจากคุณภาพของความผิดพลาดของพวกเขาว่าสอดคล้องหรือไม่สอดคล้องกับหลักการ
4. แปลงปริมาณระหว่างระบบการแสดง เช่น แทนสัญลักษณ์ของจำนวนได้รูปภาพหรือแทนสัญลักษณ์ของจำนวนด้วยเส้นจำนวน
5. เปรียบเทียบปริมาณ เช่น ระบุว่าสัญลักษณ์จำนวนเต็มหรือเศษส่วนใหญ่กว่ากัน
6. คิดค้นวิธีลัดตามหลักการ เช่น ปัญหาเกี่ยวกับกันอย่างเช่น $12 + 7 - 7$ สามารถตอบได้อย่างรวดเร็วว่าเป็นจำนวนตัวแรกคือ 12 โดยไม่ต้องคำนวณ
7. การเข้ารหัสคุณสมบัติที่สำคัญ เช่น ความสำเร็จของการฟื้นฟูตัวอย่างจากหน่วยความจำ (เช่น กระดานหมากรุกหรือสมการ) ด้วยสมมติฐานที่ว่าความรู้เชิงมโนทัศน์ที่มากขึ้นจะช่วยให้คนสังเกตเห็นคุณสมบัติที่สำคัญและกลุ่มของข้อมูล
8. การจัดเรียงตัวอย่างเป็นหมวดหมู่ เช่น การเรียงลำดับปัญหาทางสถิติ ปัญหาบนเงื่อนไขของวิธีที่ดีที่สุด

การวัดแบบชัดแจ้ง (Explicit Measures)

1. อธิบายการตัดสินใจ โดยหาคำอธิบายที่ถูกต้องให้กับสิ่งที่เลือก เช่น $29 + 35$ มีค่าเท่ากับ $35 + 29$ แสดงว่าเท่ากับ 64 เหมือนกัน
2. สร้างหรือเลือกคำจำกัดความของมโนทัศน์ เช่น นิยามเครื่องหมายเท่ากับ นิยามการบวก นิยามการลบ
3. อธิบายว่าทำไมกระบวนการถึงใช้งานได้ เช่น อธิบายว่าทำไมต้องย้ายเมื่อลบออก

4. เขียนแผนผังความคิด เช่น สร้างผังความคิดที่ใช้ระบุโน้ตหลักในสถิติเบื้องต้น โดยแสดงให้เห็นว่าโน้ตมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

พิพัฒน์ ปานชื่น (2558, น. 19) และ วีรศ กิตติวรากล (2561, น. 28) กล่าวว่า ตรงกันว่า การวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นการวัดพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยระดับความเข้าใจ ข้อสอบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ควรเกี่ยวข้องกับข้อเท็จจริง หลักการหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ เลือกใช้ข้อสอบแบบปรนัย โดยมีรูปแบบข้อคำถามในการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ของนักเรียนที่หลากหลายและเหมาะสม

จากที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด ผู้วิจัยสรุปได้ว่า การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์เป็นการวัดพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยในระดับความเข้าใจ และการวัดจะน่าเชื่อถือเมื่อมีการใช้การวัดหลาย ๆ รูปแบบ สำหรับการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ โดยการวิเคราะห์มโนทัศน์ในขอบเขตของเนื้อหาที่ต้องการวัดแล้วออกข้อสอบให้สอดคล้องกับมโนทัศน์นั้น ๆ ซึ่งคำถามดังกล่าวจะไม่เป็นการถามหาผลลัพธ์ แต่เป็นการถามหาข้อเท็จจริง หลักการ ซึ่งลักษณะของคำถามที่ใช้จะมีทั้งแบบเลือกตอบ และแบบเติมคำขึ้นอยู่ กับสิ่งที่ต้องการจะวัด

1.4.2 การวัดความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ริตเทิล-จอห์นสัน และ ชไนเดอร์ (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, p. 1123) ได้กล่าวถึงวิธีในการวัดความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ว่ามีความหลากหลายน้อยกว่าการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ส่วนใหญ่มักจะเป็นการแก้ปัญหาและการวัดผลมักจะเป็นการดูที่ผลลัพธ์หรือคำตอบที่ถูกต้องของการแก้ปัญหา โดยปัญหานั้นจะเป็นปัญหาที่คุ้นเคยที่นักเรียนเคยพบเจอมาก่อน หรือรู้วิธีการแก้ปัญหานั้น และบางครั้งอาจรวมถึงปัญหาในการถ่ายโอน คือเกี่ยวกับคุณลักษณะปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ซึ่งต้องใช้ความรู้แต่ละส่วนที่มีความเกี่ยวข้องกัน หรือมีการดัดแปลงกระบวนการการแก้ปัญหาที่คุ้นเคยเล็กน้อยเพื่อใช้กับลักษณะของปัญหาที่ไม่คุ้นเคยดังกล่าว

อุษาวดี จันทรสนธิ (2556, น. 35-36) กล่าวว่า การประเมินกระบวนการคณิตศาสตร์ของนักเรียน สามารถประเมินโดยใช้ผลงานหรือการแก้ปัญหาที่ให้นักเรียนแสดงความสามารถดังต่อไปนี้

1. เลือกกระบวนการมาใช้เหมาะสมกับงานหรือปัญหาทางคณิตศาสตร์
2. ให้เหตุผลประกอบแต่ละกระบวนการในการดำเนินตามขั้นตอนวิธี
3. ดำเนินการตามลักษณะกระบวนการอย่างมีประสิทธิภาพและแม่นยำ

4. ตรวจสอบความถูกต้องตามผลที่ได้จากการดำเนินการ

5. แยกแยะระหว่างกระบวนการที่ถูกต้องและกระบวนการที่ไม่ถูกต้อง

6. สร้างกระบวนการใหม่ของตนเอง หรือต่อยอด หรือดัดแปลงจากกระบวนการวิธีที่รู้มาก่อนแล้ว

7. ให้ความสำคัญในคุณค่าและบทบาทของกระบวนการต่าง ๆ

การประเมินกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไม่ควรจำกัดอยู่เพียงการจำขั้นตอนวิธีและปฏิบัติตามขั้นตอนที่จำได้ แต่ต้องประเมินให้ครอบคลุมวัตถุประสงค์ตามที่กำหนดไว้ข้างต้น

หลักการเขียนปัญหาเพื่อประเมินความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ว่า ควรมีหลักสำคัญดังนี้

1. ปัญหาต้องสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้ ดังนั้นควรเน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาโดยพิจารณาเงื่อนไขดังนี้

- ปฏิบัติตามกระบวนการโดยใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
- อธิบายที่มาของการใช้ขั้นตอนวิธีนั้นและอธิบายหลักการที่ทำให้

แก้ปัญหาได้

- ใช้ขั้นตอนวิธีและทักษะทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

2. ปัญหาที่ใช้ในการประเมินความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ควรมีลักษณะดังนี้

- สถานการณ์ปัญหาควรมีความแปลกใหม่ที่นักเรียนไม่คุ้นเคย โดยนักเรียนควรพยายามทำความเข้าใจปัญหาที่เกี่ยวข้องกับขั้นตอนวิธีนั้น

- สถานการณ์ของปัญหามีความตรงไปตรงมาไม่มีข้อมูลที่มากจนยากต่อการทำความเข้าใจ

- สถานการณ์ของปัญหาควรอยู่บนพื้นฐานการระลึกได้ถึงขั้นตอนวิธีและทักษะที่นักเรียนเรียนรู้มาแล้ว

- ปัญหาและสถานการณ์ปัญหาต้องสะท้อนถึงขั้นตอนที่ต้องการประเมิน

- ผลการแก้ปัญหาควรเน้นคำตอบที่ถูกต้อง

จากแนวทางการวัดความรู้เชิงกระบวนการที่ได้กล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจะวัดความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ โดยพิจารณาจากการคำนวณตามหลักการและการดำเนินการตามลำดับขั้นตอนให้ถูกต้องเพื่อให้ได้มาซึ่งความถูกต้องของคำตอบของสถานการณ์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามที่ผู้วิจัยกำหนด ซึ่งโจทย์นั้นอาจเป็นโจทย์ที่นักเรียน

คุ้นเคยหรือรู้ขั้นตอนวิธีในการแก้โจทย์นั้น หรืออาจเป็นโจทย์ที่ต้องใช้การถ่ายโอนซึ่งต้องใช้ความรู้แต่ละส่วนมีความเกี่ยวข้องกันหรือมีการดัดแปลงกระบวนการแก้โจทย์ที่คุ้นเคยเล็กน้อย เพื่อใช้กับลักษณะของโจทย์ดังกล่าว ซึ่งลักษณะของคำถามที่ใช้จะมีทั้งแบบเลือกตอบ และแบบอัตนัย ขึ้นอยู่กับสิ่งที่ต้องการจะวัด

1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

งานวิจัยต่างประเทศ

ริตเติล-จอห์นสัน และ อลิบาลี (Rittle-Johnson & Alibali Martha, 1999, pp. 180-188) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยกลุ่มทดลองถูกแบ่งออกเป็นสองกลุ่ม กลุ่มแรกครูสอนโดยเน้นความรู้เชิงกระบวนการ และกลุ่มที่สองครูสอนโดยเน้นความรู้เชิงมโนทัศน์ จากนั้นให้ทั้งสองกลุ่มทดสอบความรู้ทั้งสองประเภท ผลการวิจัยพบว่า ความรู้ทั้งสองประเภทส่งผลต่อกัน ทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ส่งผลต่อความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ส่งผลต่อความรู้เชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ แต่สำหรับการสอนที่เน้นความรู้เชิงกระบวนการ ทำให้นักเรียนไม่สามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น หรือไม่สามารถนำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์อื่นได้

คาร์เลต (Khaled, 2014, p. 181) ได้ศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง จำนวนตรรกยะ ของครูโรงเรียนประถมศึกษาริยาด ประเทศซาอุดีอาระเบีย กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วยครูคณิตศาสตร์จำนวน 57 คนโดยเป็นครูฝึกสอน 27 คนและครูมีประสบการณ์ 30 คนผลการศึกษาพบว่าครูคณิตศาสตร์ในโรงเรียนประถมศึกษา ริยาด มีคะแนนเฉลี่ยของความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง จำนวนตรรกยะ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้คะแนนเฉลี่ยของครูฝึกสอนและครูที่มีประสบการณ์มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยที่ความแตกต่างนี้เกิดขึ้นกับครูที่มีประสบการณ์และพบว่าความสัมพันธ์ทางบวกระหว่างความรู้เชิงมโนทัศน์กับความรู้เชิงกระบวนการเรื่องจำนวนตรรกยะของครู ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ชาน (Chan, 2015, pp. 1-2) ได้ทำการศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ จากการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้แบบจำลองโครงสร้างสมการ (SEM) จากนั้นได้ตรวจสอบการความสัมพันธ์ของความรู้ทั้งสองประเภทในการแก้ปัญหาที่เป็นสัญลักษณ์

และปัญหาที่เป็นข้อความ สถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ การวิเคราะห์ความแปรปรวนของการแก้ปัญหาทั้งสองประเภทที่เกี่ยวข้องกับตัวชี้วัดความรู้ทั้งสองประเภทโดยทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ถึง 5 ในโรงเรียนมัธยมศึกษาในฮ่องกงจำนวน 388 ผลการวิจัยพบว่า 1) SEM เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการเลือกใช้ความรู้พื้นฐานในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นของนักเรียนรวมทั้งปัญหาเกี่ยวกับสัญลักษณ์และปัญหาที่เป็นข้อความ 2) ความรู้เชิงกระบวนการมีผลอย่างมากในการแก้ปัญหาคณิตที่เป็นสัญลักษณ์ 3) ทั้งความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการมีส่วนสำคัญในการแก้โจทย์ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นของนักเรียน 4) ความรู้เชิงมโนทัศน์มีผลอย่างมากในการแก้โจทย์ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นที่เป็นข้อความ 5) การมีส่วนร่วมของความรู้เชิงมโนทัศน์ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นแบบสัญลักษณ์และแบบข้อความ พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีมากกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ซัลไนดิ และ แซมริ (Zulnaidi & Zamri, 2017, pp. 2155-2180) ได้ศึกษาบทบาทของความรู้เชิงกระบวนการส่งผลต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง ฟังก์ชัน จากการใช้โปรแกรม GeoGebra การวิจัยในครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง โดยมีนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 345 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra จำนวน 169 คน และกลุ่มควบคุมโดยใช้วิธีปกติจำนวน 176 คน เก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน เรื่องฟังก์ชัน ใช้โปรแกรม SPSS 22 ในการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่าคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้วิธีปกติ ซึ่งกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มแสดงให้เห็นว่าความรู้เชิงกระบวนการเป็นสื่อกลางที่สำคัญระหว่างความรู้เชิงมโนทัศน์และผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษาของนักเรียน

งานวิจัยในประเทศ

ปพนวัจน์ ลภัสภิญโญโชค (2558, น. 22) ได้พัฒนารูปแบบการเรียนรู้ที่มีชื่อว่า “5P Model” เพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา มีประสิทธิภาพเท่ากับ 83.03/81.33 และหลังจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบการเรียนรู้ 5P Model นักเรียนมีความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และพบว่าหลังการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้น นักเรียนมีความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จุไรรัตน์ วัชรไทย (2561, น. 126) ได้ศึกษาผลการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรอง เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรอง และแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนจำนวน 1 ห้องเรียน รวม 32 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรอง มีความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

พิมสุภา ชิดสา (2561, น. 88) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้แบบ ACE เรื่องพหุนามและเศษส่วนของพหุนาม ที่มีผลต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้แบบ ACE เรื่องพหุนามและเศษส่วนของพหุนาม กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนจำนวน 1 ห้องเรียน รวม 35 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบ ACE มีความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง พหุนามและเศษส่วนของพหุนาม ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ พบว่าความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการเป็นพื้นฐานที่ในความสำเร็จในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนและครูบางส่วนมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งส่งผลกับนักเรียนในระยะยาวหลาย ๆ ด้าน ดังนั้น การจัดการเรียนรู้จึงควรเน้นย้ำ ความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ โดยการจัดการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนได้เห็นตัวอย่าง ให้มีโอกาสดำรงคุณสมบัติของมโนทัศน์นั้นด้วยตนเอง และได้มีส่วนร่วมในชั้นเรียนหรือค้นพบมโนทัศน์และกระบวนการด้วยตนเอง จากที่กล่าวมานี้ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ที่จะทำให้นักเรียนสามารถเห็นภาพตัวอย่างที่สอดคล้องกับมโนทัศน์จากการเคลื่อนไหว และใช้ความสามารถในการคิดค้นวิธีการไปสู่คำตอบของสถานการณ์ได้อย่างเหมาะสม

2. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัต (Dynamic Mathematics Software: DMS) ที่ถูกพัฒนาโดยโฮเฮนวาเทอร์ (Hohenwarter) โดยออกแบบมาเพื่อการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างแพร่หลาย โดยเป็นโปรแกรมที่ประกอบด้วยโปรแกรมพลวัตทางเรขาคณิต (Dynamic Geometry Software: DGS) และโปรแกรมพีชคณิตคอมพิวเตอร์ (Computer Algebra Software: CAS) ดังนั้นโปรแกรม GeoGebra จึงเชื่อมโยงระหว่างพีชคณิตเรขาคณิต และแคลคูลัส นอกจากนี้โปรแกรม GeoGebra ยังได้มีการพัฒนาการทำแผ่นตารางจัดการ เครื่องคำนวณความน่าจะเป็น ทำให้สามารถใช้งานได้กับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์หลายเนื้อหาในระดับมัธยมศึกษา จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องพบว่า มีผู้ได้กล่าวถึงลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra การนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ ข้อควรคำนึง และข้อจำกัด และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra ดังนี้

2.1 ลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่มีลักษณะเด่นในเรื่องของการสร้าง ขยาย ยืด และหดรูปเรขาคณิตได้ สำหรับโปรแกรม GeoGebra เวอร์ชัน 6 ซึ่งเป็นเวอร์ชันปัจจุบันนั้น ได้เพิ่มคุณลักษณะของกราฟฟิกส์สามมิติให้ใช้งานได้สะดวกมากยิ่งขึ้น สามารถเปลี่ยนมุมมองภาพฉายได้ทั้ง Orthographic, Perspective และ Oblique ทำให้นักเรียนสามารถเห็นภาพสามมิติชัดเจนยิ่งขึ้น สามารถปรับรูปเรขาคณิตได้ตามใจชอบ และทำความเข้าใจกับรูปเรขาคณิตนั้นควบคู่ไปด้วย เนื่องจากโปรแกรม GeoGebra จะแสดงข้อมูลต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตนั้นและค่าที่เกี่ยวข้องในมุมมองพีชคณิตด้วย ผู้ศึกษาโปรแกรม GeoGebra หลายท่านได้กล่าวถึงลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra ไว้ดังนี้

พรีนเนอร์ (Preiner, 2008, pp. 61-63) และศุภณัฐ ชัยดี (2562, น. 21) กล่าวถึงจุดเด่นของโปรแกรม GeoGebra โดยสามารถสรุปได้ดังนี้

1. เป็นโปรแกรมโอเพนซอร์ซ กล่าวคือ ครูและนักเรียนสามารถเข้าถึงโปรแกรมได้ฟรี และนำมาใช้ในการเรียนการสอนได้อย่างไม่มีข้อจำกัด นอกจากนี้โปรแกรม GeoGebra ยังมีเวอร์ชันที่เรียก Webstart ซึ่งผู้ใช้โปรแกรมสามารถเข้าถึงโปรแกรมโดยไม่ต้องดาวน์โหลด แต่ใช้โปรแกรมผ่านทางเว็บเบราว์เซอร์บนอินเทอร์เน็ตได้ นอกจากนี้ยังมีการพัฒนา GeoGebra Applet ที่ให้ผู้ใช้โปรแกรม GeoGebra แบ่งปันและนำเสนอผลงานของตนเองสู่สาธารณะได้ สำหรับขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรมนั้นผู้ใช้โปรแกรมไม่จำเป็นต้องสมัครสมาชิกหรือเสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ทั้งสิ้น ดังนั้นโปรแกรม GeoGebra จึงเป็นโปรแกรมที่นักเรียนสามารถเข้าถึงนักเรียนได้ง่ายทั้งในชั้นเรียนและที่บ้าน

2. เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตที่มีประสิทธิภาพ เนื่องจากโปรแกรม GeoGebra มีศักยภาพที่ใกล้เคียงกับ Cabri Geometry และ The Geometer's Sketchpad และเป็นโปรแกรมฟรีอีกด้วย ซึ่งสามารถใช้ทดแทนกันได้

3. เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัต (Dynamic Mathematics Software, DMS) ซึ่งเป็นการผสมผสานระหว่างความสามารถของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต (Dynamic Geometry Software: DGS) และโปรแกรมพีชคณิตคอมพิวเตอร์ (Computer Algebra System: CAS) โดยที่โปรแกรมสามารถเชื่อมโยงระหว่างเรขาคณิตและพีชคณิตได้อย่างสมบูรณ์

4. เป็นการผสมผสานระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต กล่าวคือ โปรแกรม GeoGebra สามารถนำเสนอสมบัติทางพีชคณิตของวัตถุได้ในหน้าต่างพีชคณิต เช่น ในรูปแบบคู่อันดับ ความสัมพันธ์ หรือ ฟังก์ชัน ของวัตถุนั้น ในขณะที่มีการนำเสนอรูปร่างของวัตถุนั้นในหน้าต่างของกราฟฟิก โดยมีการอธิบายสมบัติทางเรขาคณิตในส่วนที่เรียกว่า โพรโทคอลสร้าง (construction protocol) ซึ่งครูและนักเรียนสามารถตรวจสอบขั้นตอนการสร้างของวัตถุนั้นได้ทีละขั้นตลอดเวลา

5. เป็นโปรแกรมที่ออกแบบสำหรับนักเรียน โดยโปรแกรมยึดหลักการ KISS (keep it small and simple) ทำให้การออกแบบจัดวางแถบเครื่องมือต่าง ๆ ในโปรแกรมอยู่ในตำแหน่งที่ใช้งานได้ง่าย โดยที่ผู้ใช้โปรแกรมไม่จำเป็นต้องมีความรู้คอมพิวเตอร์ขั้นสูง

6. โปรแกรม GeoGebra ถูกเขียนโดยภาษาจาวา ดังนั้นจึงสามารถเปิดไฟล์ได้บนทุกระบบปฏิบัติการทั้ง Windows และ MacOS ซึ่งรองรับส่วนเสริมจาวา

7. มีผู้ใช้งานทั่วโลก โดยที่ครูสามารถแลกเปลี่ยนหรือ แบ่งปันสื่อการเรียนรู้กับครูทั่วโลกได้จากเว็บไซต์ <https://www.geogebra.org/>

ไดโกวิก (Dikovic, 2009, pp. 191-192) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra ถูกออกแบบมาเพื่อการศึกษาโดยเฉพาะ โปรแกรม GeoGebra สามารถรองรับการสร้างรูปที่มีจุดเส้นตรง และภาคตัดกรวยเป็นส่วนประกอบ นักเรียนสามารถโต้ตอบกับระบบพีชคณิตคอมพิวเตอร์และระบบเรขาคณิตแบบพลวัตในโปรแกรมได้ทันที จึงช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียน และช่วยพัฒนาความรู้ของนักเรียนได้ดีขึ้น

ชัยญา อูทิศ (2557, น. 26-28) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัตที่ไม่เสียค่าใช้จ่าย มีเครื่องมือทางเรขาคณิตมากมาย ผู้ใช้สามารถออกแบบปรับแต่งรูปเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ได้อย่างอิสระ ซึ่งการนำโปรแกรม

GeoGebra มาใช้ในการจัดการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จะช่วยเสริมการสังเกต การสำรวจ ส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจในคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น

พิสุทธิ ยงทางเรือ (2559, น. 17) และ วิไลวรรณ สีแดด (2560, น. 22) กล่าวตรงกันว่าโปรแกรม GeoGebra สามารถเปลี่ยนสิ่งที่เป็นามธรรมให้เป็นรูปธรรมได้ โดยโปรแกรมนี้มีจุดเด่นคือสามารถยืด หด ขยาย และเคลื่อนไหววัตถุได้ อีกทั้งสื่อการสอนใน GeoGebra Applet ที่สร้างจากโปรแกรม GeoGebra สามารถพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนให้สูงขึ้น เนื่องมาจากนักเรียนสามารถมองเห็นภาพ และสามารถคลิกหมุนรูปสามมิติได้ ทำให้นักเรียนเห็นภาพได้ชัดเจนมากขึ้น อีกทั้งสื่อจาก GeoGebra Applet สามารถคลิกเลือกรูปและเวกเตอร์ในการบวกลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จึงทำให้นักเรียนเห็นการดำเนินการดังกล่าวได้อย่างชัดเจน

มัชฌิณธินา แกมแก้ว (2560, น. 33) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่สามารถนำไปสอนในหลาย ๆ เนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากเป็นโปรแกรมที่สามารถแสดงภาพเคลื่อนไหว สร้างรูปเรขาคณิตสองมิติ และสามมิติ และช่วยให้นักเรียนสามารถตั้งข้อสังเกต และได้มีทัศนคติทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง

จากการศึกษาลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra พบว่าโปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่มีจุดเด่นหลายอย่าง ซึ่งทั้งครูและนักเรียน สามารถเข้าไปใช้ได้โดยไม่มีค่าใช้จ่าย โดยโปรแกรม GeoGebra ทำให้นักเรียนมีความรู้ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น จากการสร้าง สรรวจ ออกแบบ และเคลื่อนไหวรูปเรขาคณิต ทำให้การเรียนรู้ในสิ่งที่เป็นามธรรมมีความเป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้น

2.2 โปรแกรม GeoGebra กับการจัดการเรียนรู้

โฮเฮนวาเทอร์ และ ฟัช (Hohenwarter & Fuchs, 2004, p. 2) กล่าวสอดคล้องกับโฮเฮนวาเทอร์ และ พรินเนอร์ (Hohenwarter & Preiner, 2007, p. 1) ว่า โปรแกรม GeoGebra จะช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์โดยที่นักเรียนเป็นผู้ปฏิบัติจากการตรวจสอบค่าหรือรูปภาพที่เปลี่ยนแปลง สรรวจและสร้างข้อความคาดการณ์ รวมถึงใช้โปรแกรม GeoGebra ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโปรแกรมนี้สามารถทำได้ทั้งในห้องเรียนและที่บ้านของนักเรียน

นอกจากนี้ในการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ในประเทศไทย สำนักงานบริหารการมัธยมศึกษาตอนปลาย (2559, น. 23) และ พิสุทธิ ยงทางเรือ (2559, น. 17) ได้กล่าวถึงการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ว่าการดำเนินการสร้างจุด สมการ ภาคตัดกรวย อีก

ทั้งยังมีความสามารถในการส่งออกไฟล์ที่สร้างขึ้นเป็นรูปแบบของภาษาจาวา ซึ่งเป็นสื่อที่ปฏิสัมพันธ์กับนักเรียน โดยนักเรียนสามารถปรับแต่งค่า รวมถึงรูปร่างของสื่อได้เป็นอย่างดี และโปรแกรม GeoGebra มีคุณสมบัติเด่นที่สามารถเคลื่อนที่ พลิก หมุน หรือเปลี่ยนค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชัน ทำให้นักเรียนสามารถสังเกตเห็นสิ่งที่เกิดขึ้นระหว่างสมการและกราฟได้อย่างชัดเจน ซึ่งทำให้โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อในการจัดการเรียนรู้ที่ช่วยให้การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาเป็นนามธรรมเห็นชัดเป็นรูปธรรมมากขึ้น

จากการศึกษาโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการสอน พบว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์พลวัต ซึ่งเชื่อมโยงระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนสามารถสำรวจสมบัติทางเรขาคณิตและสมบัติทางพีชคณิตผ่านการสร้างและการเลื่อนวัตถุ เห็นตัวอย่างรูปตามสมบัติทางเรขาคณิตได้อย่างหลากหลาย สังเกตการเปลี่ยนแปลงของรูปเรขาคณิตเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ สังเกตการเปลี่ยนแปลงทางพีชคณิตจากการเลื่อนจุด การเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปร การแก้ปัญหทางพีชคณิตและเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม และครูสามารถกระตุ้นให้นักเรียนเห็นแนวทางในการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการมากยิ่งขึ้น

2.3 ข้อควรคำนึงและข้อจำกัดของการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้จัดการเรียนรู้

ในการจัดการเรียนรู้เรื่องต่าง ๆ ครูควรคำนึงถึงความเหมาะสมในการเลือกใช้สื่อและเทคโนโลยีที่เหมาะสมกับเนื้อหา การนำเทคโนโลยีมาใช้ในการจัดการเรียนรู้นั้น ควรคำนึงถึงความสามารถของโปรแกรมที่ครบถ้วนและเพียงพอสำหรับเนื้อหาที่จะนำมาใช้ในการเรียนรู้นอกจากนั้นควรคำนึงถึงพื้นฐานของนักเรียนก่อนใช้โปรแกรม หรือความยากง่ายในการใช้โปรแกรม ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับข้อควรคำนึงในการจัดการเรียนรู้ และข้อจำกัดในการนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้ในการเรียนรู้ ดังนี้

ชอย (2010, p. 38) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ตั้งอยู่บนแนวคิดของทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ โดยบทบาทของครูควรจะเป็นผู้อำนวยความสะดวก (facilitators) นั่นคือช่วยนักเรียนได้เข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หรือการแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยครูจะให้นักเรียนทำกิจกรรม GeoGebra โดยเปิดอินเทอร์เน็ต และตั้งเป้าหมายการเรียนรู้ควบคู่กันให้นักเรียน และอธิบายแนวทางการดำเนินการให้สู่เป้าหมาย และตอบคำถามของนักเรียนกรณีที่นักเรียนพบข้อสงสัย สำหรับนักเรียนนั้นจะดำเนินการกิจกรรมให้สู่เป้าหมายโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์กับโปรแกรม GeoGebra หลังจากดำเนินการเสร็จสิ้น ครูนำเสนอผลงานของนักเรียนประเมินผล และสรุปบทเรียนจากสิ่งที่นักเรียนได้กระทำ

ปิยะวุฒิ ศรีชนะ (2556, น. 62) และ ชัญญา อุทิศ (2557, น. 77) กล่าวถึงข้อควรคำนึงในการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ตรงกันว่า ครูจะต้องเตรียมการจัดการเรียนรู้ล่วงหน้าอย่างดี ไม่ควรใช้ตัวอักษรขนาดเล็กหรือตัวอักษรซ้อนทับระหว่างเส้นกราฟ ครูควรระวังเรื่องการใช้สีตัวอักษรและกราฟในโปรแกรม GeoGebra มีผู้ช่วยในการสอน มีการสำรวจเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการเรียนรู้ให้พร้อมก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทุกครั้ง และทั่วถึงมากยิ่งขึ้น และเครื่องคอมพิวเตอร์ต้องมีการติดตั้งภาษาจาวา ตั้งแต่เวอร์ชัน 5 ขึ้นไป

โดส และ โจเซ่ (Dos & José, 2017, p. 9) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra ยังมีข้อจำกัดในเรื่องของการสร้างโลคัส และการเขียนสมการของเส้นโค้งหลายตัวแปรในรูปแบบชัดเจน เนื่องจาก โปรแกรม GeoGebra ถูกออกแบบให้สามารถเขียนสมการพหุนามที่มีตัวแปรตามได้เพียงสองตัวแปรเท่านั้น

จากการศึกษาข้อควรคำนึงและข้อจำกัดของการใช้โปรแกรม GeoGebra ในการจัดการเรียนรู้ พบว่า ในการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ครูควรมีความรู้ ความชำนาญในการใช้โปรแกรม มีการเตรียมการสอนล่วงหน้า และมีผู้ช่วยในการสอน เนื้อหาภายในสื่อควรมีสีตัวอักษร ขนาดของตัวอักษร และสีพื้นหลังที่เหมาะสม เตรียมความพร้อมของห้องปฏิบัติการโดยสำรวจคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในห้องเรียน ควรมีผู้ช่วยที่มีความรู้และแก้ปัญหาเกี่ยวกับโปรแกรม GeoGebra ได้ การวิจัยครั้งนี้จะใช้โปรแกรม GeoGebra เวอร์ชัน 6 และไม่ปิดสัญญาณอินเทอร์เน็ตในชั้นเรียน เพื่อไม่เป็นการปิดกั้นความรู้ของนักเรียน แต่จะมีการแจ้งให้นักเรียนสนใจเนื้อหาภายในห้อง สำหรับข้อจำกัดด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ พบว่าโปรแกรม GeoGebra มีข้อจำกัดในมุมมองพีชคณิตด้านการคำนวณค่าที่ไม่สามารถเขียนจำนวนอตรรกยะในรูปแบบที่ติดกรณฑ์ หรือเศษส่วนกรณฑ์ที่ใช้การคำนวณได้ ซึ่งส่งผลเล็กน้อยกับงานวิจัย ผู้วิจัยนำข้อจำกัดนี้ไปปรับปรุงการแสดงผลของโปรแกรมเพื่อใช้ในการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ใช้ในการทำวิจัยครั้งนี้

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ งานวิจัยต่างประเทศ

ยิลมาซ เฟอกัน และ คูทลูคา (Zengin, Furkan & Kutluca, 2012, pp. 183-187) ได้ทำการศึกษาเรื่อง ผลของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ตรีโกณมิติ วัดดูประสงค์ของการวิจัย เพื่อศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ตรีโกณมิติ กลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยนักเรียนจำนวน 51 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ในขณะที่กลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามรูปแบบการสอนแบบทฤษฎีการสร้างองค์ความรู้ และได้ทำการทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ ผลการทดลองพบว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมในเรื่อง ตรีโกณมิติ กลุ่มที่สอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบทฤษฎีการสร้างองค์ความรู้

ซัลไนดิ และ ซากาเรีย (Zulnaidi & Zakaria, 2012, p. 1) ได้ทำการศึกษาผลของโปรแกรม GeoGebra โดยใช้ความรู้เชิงกระบวนการเป็นตัวกลางสู่ความรู้เชิงมโนทัศน์และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาผลของโปรแกรม GeoGebra ที่ส่งผลต่อความรู้เชิงมโนทัศน์ ความรู้เชิงกระบวนการ และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน จากการพิจารณาความรู้เชิงกระบวนการเป็นสื่อกลางระหว่างความรู้เชิงมโนทัศน์และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน ซึ่งงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยกึ่งทดลองโดยมีกลุ่มตัวอย่าง 345 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra และกลุ่มที่ 2 ใช้การเรียนรู้แบบปกติ เก็บข้อมูลจากข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของนักเรียน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ฟังก์ชัน จากผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ข้อมูลถูกวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม SPSS 22.0 AMOS 18.0 และโปรแกรม ANATES v4 ผลการวิจัยพบว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการเรื่อง ฟังก์ชัน สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการเรียนรู้แบบปกติ ทั้ง 2 กลุ่มแสดงได้ว่าความรู้เชิงกระบวนการเป็นสื่อกลางระหว่างความรู้เชิงมโนทัศน์และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน สรุปได้ว่า โปรแกรม GeoGebra สามารถส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ และผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนได้

อาร์เบน และ ชุกอร์ (Arbain & Shukor, 2015, pp. 208-214) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง สถิติ ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 62 คนในประเทศมาเลเซีย แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยกลุ่มทดลองใช้การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง

สถิติ และกลุ่มควบคุมใช้การสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง สถิติ สูงกว่านักเรียนที่ใช้การสอนแบบปกติ

จวน (Juan, 2015, pp. 140-142) ได้ทำการศึกษาการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในการเรียนเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 4 โรงเรียนในประเทศเบลีส ผลการวิจัยพบว่า โปรแกรม GeoGebra ทำให้ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนดีขึ้น และความสนใจในการเรียนเรขาคณิตดียิ่งขึ้น นอกจากนี้ผู้วิจัยยังให้ข้อเสนอแนะว่า ในการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพ ครูควรเลือกใช้เทคโนโลยีผสมผสานกับวิธีการในการจัดการเรียนรู้ที่เหมาะสม

งานวิจัยภายในประเทศ

วุฒิชัย ภูดี (2558, น. 78) ได้พัฒนาโปรแกรมเสริมกระบวนการคิดขั้นสูงด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติกับสามมิติสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อพัฒนาโปรแกรมเสริมทักษะกระบวนการคิดขั้นสูงด้วยโปรแกรม GeoGebra ที่มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 70/70 2) เพื่อหาค่าประสิทธิผลของโปรแกรมเสริมกระบวนการคิดขั้นสูงที่สร้างขึ้น 3) เพื่อพัฒนาระบบการคิดขั้นสูงด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่องความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตสองมิติกับสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยนักเรียนจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 70 ของนักเรียนทั้งหมดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมากกว่าร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนชุมชนบ้านคำพอกท่าดอกแก้ว จังหวัดนครปฐม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 26 คน ผลการวิจัยพบว่า 1. โปรแกรมเสริมกระบวนการคิดขั้นสูงด้วยโปรแกรม GeoGebra มีค่าประสิทธิภาพ 79.85/78.46 2. ค่าประสิทธิผลของโปรแกรมเสริมกระบวนการคิดขั้นสูงเท่ากับร้อยละ 74.43 3. นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางเรียนเฉลี่ยหลังจากการเรียนรู้ด้วยโปรแกรมเสริมกระบวนการคิดขั้นสูงที่สร้างขึ้นเท่ากับ 15.69 โดยมีนักเรียนผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ 21 คน คิดเป็นร้อยละ 80.77 โดยเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้

พิสุทธิ ยงทางเรือ (2559, น. 51) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน และเปรียบเทียบความสามารถของการเขียนความสัมพันธ์ของสมการและกราฟกับเกณฑ์ร้อยละ 70 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 40 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนและความสามารถในการเขียนความสัมพันธ์ของ

สมการและกราฟในภาคตัดกรวยของนักเรียนหลังจากการได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่อง ภาคตัดกรวย สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วีริศ กิตติวรากุล (2561, น. 68-69) ได้ศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีความรู้เชิงมโนทัศน์เรื่องวงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra พบว่าโปรแกรม GeoGebra สามารถส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้เชิงมโนทัศน์ ความรู้เชิงกระบวนการ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในสาระเรขาคณิตและพีชคณิตได้ดียิ่งขึ้น รวมทั้งความสามารถของโปรแกรม GeoGebra ที่เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัตจะช่วยให้นักเรียนสังเกตการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ได้ง่าย อีกทั้งจะช่วยให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์จากทั้งมุมมองเรขาคณิตและพีชคณิตจากการสำรวจเพื่อหาความสัมพันธ์และสร้างข้อความคาดการณ์ผ่านการลากวัตถุ ช่วยให้นักเรียนสามารถเห็นตัวอย่างรูปและการคำนวณ ทำให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้ในการจัดการเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

3. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

3.1 เอกสารเกี่ยวกับพัฒนาการจัดการเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

สำหรับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ ที่บรรจุในหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 014 หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสองมิติ ประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

- 1) เวกเตอร์
- 2) การบวกเวกเตอร์
- 3) การลบเวกเตอร์
- 4) การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- 5) การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต
- 6) เวกเตอร์ในแกนมุมฉาก
- 7) ผลคูณเชิงสเกลาร์

8) บทสรุปสมบัติของเวกเตอร์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2534, น. 1-47)

สำหรับเนื้อหาเรื่อง เวกเตอร์ ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 บรรจุในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ โดยรวมทั้งเวกเตอร์ในสองมิติและสามมิติไว้ด้วยกัน ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

- 1) ระบบพิกัดฉากสามมิติ
- 2) เวกเตอร์
- 3) การบวกและการลบเวกเตอร์
- 4) การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- 5) เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก
- 6) ผลคูณเชิงสเกลาร์
- 7) ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551, น. 183-258)

สำหรับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ได้บรรจุในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสองมิติที่เน้นเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต และสามมิติที่เน้นเวกเตอร์ในเชิงพีชคณิต ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

- 1) เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์
- 2) ระบบพิกัดฉากสามมิติ
- 3) เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก
- 4) ผลคูณเชิงสเกลาร์
- 5) ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2561ก, น. 211-293)

จากการศึกษาพัฒนาการจัดการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ พบว่าในช่วงแรกของการจัดการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์นั้น เน้นศึกษาที่เวกเตอร์ในสองมิติ ซึ่งเกี่ยวข้องกับปริมาณเชิงสเกลาร์ ปริมาณเวกเตอร์ การดำเนินการระหว่างเวกเตอร์ สมบัติที่เกี่ยวข้องของเวกเตอร์ในสองมิติ รวมถึงการประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต นั่นคือในช่วงแรกเน้นการศึกษาเวกเตอร์ในมุมมองเรขาคณิต จากนั้นเริ่มให้ความสำคัญกับเวกเตอร์ในสามมิติมากยิ่งขึ้น ให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับปริภูมิสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ การประยุกต์ใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และการประยุกต์ใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยลดเนื้อหาเกี่ยวกับการนำเวกเตอร์ไปใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ทำให้การจัดการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์ในช่วงหลัง ให้ความสำคัญกับเวกเตอร์ในมุมมองพีชคณิตมากยิ่งขึ้น

3.2 เอกสารเกี่ยวกับการนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในสาระฟิสิกส์ ระดับ

มัธยมศึกษาตอนปลาย

สำหรับการจัดการเรียนรู้ในสาระฟิสิกส์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) มีทั้งหมด 67 ผลการเรียนรู้ โดยแบ่งเป็น ผลการเรียนรู้ในหมวดของเนื้อหาที่มีความเกี่ยวข้องกัน จำนวน 4 หมวดดังนี้

1) กลศาสตร์ มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจธรรมชาติทางฟิสิกส์ ปริมาณ และกระบวนการวัด การเคลื่อนที่แบบต่าง ๆ กฎความโน้มถ่วงสากล แรงเสียดทาน สมดุลกล งาน และกฎการอนุรักษ์พลังงานกล โมเมนตัม รวมทั้งนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ โดยหมวดนี้นักเรียนจะต้องใช้ความรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสองมิติ โดยเฉพาะการบวกเวกเตอร์ โดยใช้วิธีบวกเวกเตอร์แบบหางต่อหัว วิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน นอกจากนี้ใช้กฎของโคไซน์ของเวกเตอร์ในการคำนวณหาแรงลัพธ์ต่าง ๆ ที่กระทำกับวัตถุ

2) คลื่น มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ธรรมชาติของคลื่น เสียงและการได้ยิน แสงและการเห็น รวมทั้งนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ โดยหมวดนี้เวกเตอร์มีบทบาทน้อยกว่าหมวดอื่น ๆ เนื่องจากบทนี้จะใช้สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันลอการิทึมในการคำนวณกฎต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับคลื่น แสง และเสียง แต่นักเรียนยังคงใช้ความรู้เกี่ยวกับการแตกแรงและการรวมแรงอันเป็นพื้นฐานที่สำคัญของการเคลื่อนที่ของคลื่นแบบต่าง ๆ

3) ไฟฟ้า มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจแรงไฟฟ้า กฎของคูลอมบ์ กฎของโอห์ม วงจรไฟฟ้ากระแสตรง สนามแม่เหล็ก กฎของฟาราเดย์ ไฟฟ้ากระแสสลับ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและการสื่อสาร รวมทั้งนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ โดยนักเรียนจะต้องใช้ความรู้เรื่อง

ผลคูณเชิงเวกเตอร์เพื่อหาทั้งขนาดและทิศทางของแรงที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าผ่านสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้า และเนื่องจากแรงเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้นการดำเนินการของแรงแบบต่าง ๆ ต้องใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องเวกเตอร์ในการดำเนินการทั้งสิ้น

4) ฟิสิกส์ยุคใหม่ มีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ของความร้อนกับการเปลี่ยนอุณหภูมิและสถานะของสสาร สภาพยืดหยุ่นของวัสดุและมอดุลัสของยัง ความดันในของไหล หลักของอาร์คิมิดีส ของไหลอุดมคติ สมการแบร์นูลลี กฎของแก๊ส ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส อุดมคติและพลังงานในระบบ ทฤษฎีอะตอมของโบร์ ปฏิกิริยาการถักไฟโตอิเล็กทริก ทวิภาวะของคลื่นและอนุภาค กัมมันตภาพรังสี แรงแวนเดอร์วาลส์ ปฏิกริยานิวเคลียร์ พลังงานนิวเคลียร์ฟิสิกส์อนุภาค รวมทั้งนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ สำหรับหมวดนี้จะใช้ความรู้เรื่องเวกเตอร์ในการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับแรงและกฎการอนุรักษ์พลังงาน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2561ก, น. 24-60)

จากการศึกษาการนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในสาระฟิสิกส์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พบว่าความรู้ที่ใช้นั้นจะเป็นเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต โดยมีบทบาทที่สำคัญต่อการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับแรงและการเคลื่อนที่แบบต่าง ๆ สำหรับเวกเตอร์ในเชิงพีชคณิต มีบทบาทที่สำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับไฟฟ้า และแม่เหล็ก โดยเฉพาะอย่างยิ่งการคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ที่ใช้ในการหาแรงที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ผ่านสนามเวกเตอร์ ซึ่งนักเรียนจะต้องหาทั้งขนาดทิศทางของเวกเตอร์ดังกล่าว

3.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ในสามมิติ

งานวิจัยต่างประเทศ

กัปรัต (Gubrud, 1970, p. 6488-A) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8, 9 และ 10 พบว่า 1) นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 10 ทั้งหมดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์สูงกว่านักเรียนเกรด 8 และนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ 2) ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนช่วยให้เข้าใจเรื่องเวกเตอร์ง่ายขึ้น 3) นักเรียนที่เรียนโดยอาศัยภาพประกอบจะช่วยให้เข้าใจเรื่องเวกเตอร์ง่ายขึ้น

นิโคลสัน (Nicholson, 1975, p. 25) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการสอนเวกเตอร์และการประยุกต์สำหรับนักเรียนเกรด 6 ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการเรียนเวกเตอร์และการประยุกต์โดยใช้บทเรียนที่สร้างขึ้นได้ และเห็นว่าควรมีการปรับปรุงบทเรียนเรื่องเวกเตอร์และการประยุกต์ให้มีความเหมาะสมเพื่อนำไปใช้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

วิดาดา และคนอื่น ๆ (Widada et al., 2020, pp. 1-9) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการเข้าใจโมดูลเรื่อง เวกเตอร์ โดยใช้การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านชีวิตจริง กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 38 คนในเบงกอล ประเทศอินโดนีเซีย เครื่องมือวิจัยประกอบด้วยโดรนสำหรับถ่ายภาพบนอากาศ แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน และแบบสัมภาษณ์ ข้อมูลถูกเก็บระหว่างที่นักเรียนได้รับการจัดการเรียนรู้ผ่านชีวิตจริง ข้อมูลถูกวิเคราะห์ในเชิงคุณภาพ ผลการวิจัยพบว่า การศึกษาระบบการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านชีวิตจริงช่วยให้นักเรียนบรรลุผลในการเข้าใจโมดูลเรื่อง เวกเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ซึ่งมีความสัมพันธ์กับสามเหลี่ยมมุมฉาก

งานวิจัยภายในประเทศ

วรณัฐ มาตระกูล (2551, น. 85-89) ได้ทำการวิจัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจันทวิทยาคม จังหวัดพะเยา มีวัตถุประสงค์เพื่อวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ทางด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัติ กลุ่มที่ศึกษาเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 36 คน ผลการวิจัยพบว่าด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัติ เป็นข้อบกพร่องที่พบมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 65.35 ของข้อบกพร่องทั้งหมด ด้านการคิดคำนวณ คิดเป็นร้อยละ 30.97 ของข้อบกพร่องทั้งหมด และด้านตีความจากโจทย์ เป็นข้อบกพร่องที่พบน้อยสุด คิดเป็นร้อยละ 3.69 ของข้อบกพร่องทั้งหมด

อนุวัฒน์ เดชไธสง (2553, น. 62-66) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับเรื่อง ชุดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม จำนวน 30 คน ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาสอนทั้งหมด 12 ชั่วโมง เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องเวกเตอร์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สามารถผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องเวกเตอร์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. อยู่ระดับมาก

นิรันดร์ รามศิริ (2560) ได้ทำการสร้างชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนเพชรพิทยาคม มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์มาตรฐาน 75/75 2) เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนก่อนเรียนและหลังเรียนโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ 3) เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผลการวิจัยพบว่า 1) ประสิทธิภาพชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีประสิทธิภาพ 76.35/77.15 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) ความพึงพอใจของนักเรียนที่เรียนด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 5 อยู่ในระดับมาก

วิไลวรรณ สีแดด (2560) ได้ศึกษาความเข้าใจ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผ่าน GeoGebra Applet เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มทดลอง โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ผ่าน GeoGebra Applet จำนวน 36 คน และกลุ่มควบคุมใช้การจัดการกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ จำนวน 34 คน กลุ่มทดลอง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่กลุ่มทดลองมีความเข้าใจ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่านักเรียนที่กลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนรู้เวกเตอร์ในสามมิติ พบว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่พบมากที่สุดคือการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สูตร กฎ และสมบัติ และรองลงมาคือการคำนวณ ซึ่งเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ซึ่งมีงานวิจัยได้นำเทคโนโลยีมาใช้ ซึ่งทำให้ผลการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติดีขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้ในการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ และเปรียบเทียบความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ โดยเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงปริมาณและนำมาวิเคราะห์ ซึ่งในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
3. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

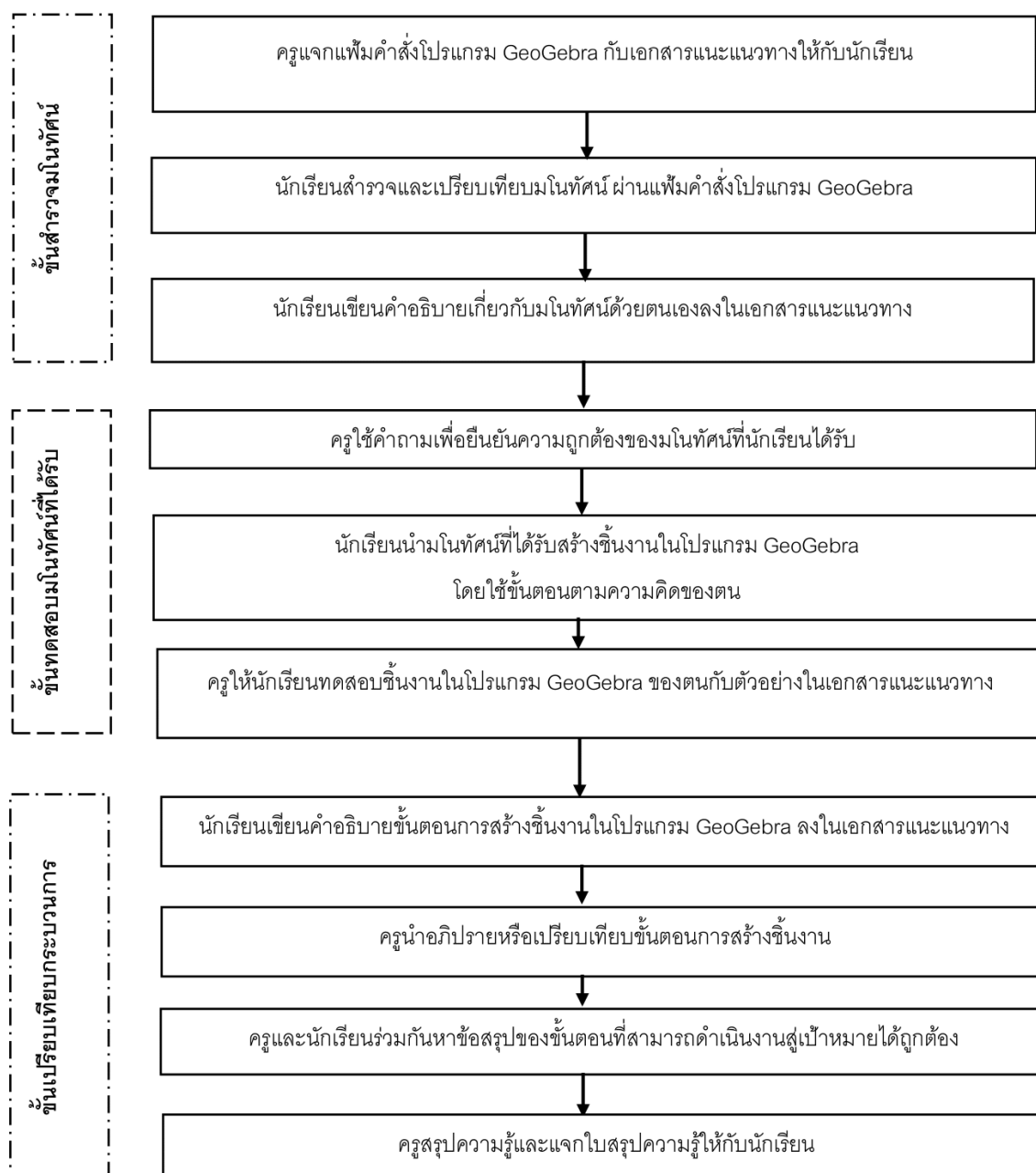
ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน ห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม โรงเรียนหอวัง ปีการศึกษา 2564

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน ห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โรงเรียนหอวัง โดยสุ่มนักเรียนจำนวน 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 3 ห้องเรียนโดยใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียว (One-Stage Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารรถ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่เก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

ในการดำเนินการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ดังนี้



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

3. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ และแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีรายละเอียดในการสร้างและตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ ดังนี้

3.1 แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 12 แผน แผนละ 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบด้วย เอกสารแนะแนวทาง แฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra และใบสรุปความรู้ โดยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

3.1.1 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อเป็นแนวทางในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

3.1.2 ศึกษาหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ประกอบด้วย มาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง การวัดและประเมินผล เป็นต้น

3.1.3 ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ รวมทั้งหนังสือคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

3.1.4 ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ เอกสารแนะแนวทางและแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งประกอบด้วย

- 1) จุดประสงค์การเรียนรู้
- 2) สาระการเรียนรู้
- 3) สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้
- 4) กิจกรรมการเรียนรู้
- 5) การวัดและประเมินผลการเรียนรู้
- 6) เอกสารแนะแนวทาง
- 7) กิจกรรมในแฟ้มคำสั่ง
- 8) ใบสรุปความรู้

3.1.5 กำหนดจุดประสงค์และขอบเขตของการจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่สอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

3.1.6 จัดทำแผนการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีเนื้อหาตามหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 12 แผน รวม 12 คาบเรียน รายละเอียดของแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ในแต่ละแผนทั้ง 12 แผน แสดงดังตาราง 1

ตาราง 1 แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติรายหน่วยการเรียนรู้และสื่อการเรียนรู้

คาบที่	เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้	สื่อการเรียนรู้
1	ระบบพิกัดฉากสามมิติ	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. ระบุระยะห่างจากจุดที่กำหนดกับระนาบอ้างอิงได้ 2. หาพิกัดของจุดที่กำหนดในระบบพิกัดฉากสามมิติได้	1. เอกสารแนะนำแนวทาง เรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ 3. แฟ้มคำสั่ง 1_3D.ggb
2	เวกเตอร์ในสามมิติ	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. ระบุเวกเตอร์ในสามมิติจากเงื่อนไขที่กำหนดได้ 2. ระบุเวกเตอร์ในสามมิติจากเงื่อนไขที่กำหนดได้	1. เอกสารแนะนำแนวทาง เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ 3. แฟ้มคำสั่ง 2_PacMan and Cookies.ggb
3	ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. หาขนาดของเวกเตอร์จากเวกเตอร์ที่กำหนดได้ 2. หาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์จากเวกเตอร์ที่กำหนดได้	1. เอกสารแนะนำแนวทาง เรื่อง ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 3_magnitude.ggb

ตาราง 1 (ต่อ)

คาบที่	เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้	สื่อการเรียนรู้
4	การบวกและการลบเวกเตอร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. หาผลบวกและผลลบของเวกเตอร์ที่กำหนดได้ 2.หาสมบัติของการบวกและการลบเวกเตอร์จากข้อมูลที่กำหนดได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การบวกและการลบเวกเตอร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง การบวกและการลบเวกเตอร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 4_addition.ggb, 4_difference.ggb และ 4_assignment.ggb
5	การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. หาผลคูณของเวกเตอร์กับสเกลาร์จากเวกเตอร์ที่กำหนดได้ 2.หาสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 5_scalar multiplication.ggb.ggb และ 5_assignment.ggb
6	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. ตรวจสอบการเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ที่กำหนดได้ 2. หาเวกเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจากข้อมูลที่กำหนดได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย 3. แฟ้มคำสั่ง 6_unitvector.ggb, 6_assignment1.ggb และ 6_assignment2.ggb

ตาราง 1 (ต่อ)

คาบที่	เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้	สื่อการเรียนรู้
7	การขนานและการเท่ากันของเวกเตอร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. นำสมบัติของการเท่ากันของเวกเตอร์มาใช้หาค่าของตัวแปรที่กำหนดได้ 2. นำสมบัติของการขนานกันของเวกเตอร์มาใช้หาค่าของตัวแปรที่กำหนดได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การขนานและการเท่ากันของเวกเตอร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง การขนานและการเท่ากันของเวกเตอร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 7_Parallel.ggb
8	ผลคูณเชิงสเกลาร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. หาผลคูณเชิงสเกลาร์จากเวกเตอร์ที่กำหนดได้ 2. ระบุความสัมพันธ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์กับมุมระหว่างเวกเตอร์ได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 8_dot product.ggb และ 8_assignment.ggb
9	สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. ระบุสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ได้ 2. นำสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 9_dot product2.ggb และ 9_assignment.ggb

ตาราง 1 (ต่อ)

คาบที่	เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้	สื่อการเรียนรู้
10	ผลคูณเชิงเวกเตอร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์จากเวกเตอร์ที่กำหนดได้ 2. หาความสัมพันธ์ของมุมระหว่างเวกเตอร์กับผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 10_cross product.ggb และ 10_assignment.ggb
11	สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. ระบุสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้ 2. นำสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 11_cross product2.ggb และ 11_assignment.ggb
12	การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์	เพื่อให้นักเรียนสามารถ 1. ระบุสูตรหาพื้นที่และปริมาตรโดยใช้เวกเตอร์ได้ 2. นำสูตรการหาพื้นที่และปริมาตรโดยใช้เวกเตอร์ไปใช้ได้	1. เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ 2. ใบสรุปความรู้ เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ 3. แฟ้มคำสั่ง 12_cross product app.ggb และ 12_assignment.ggb

3.1.7 นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่สร้างเสร็จแล้ว เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

3.1.8 นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติที่ได้รับการตรวจสอบมาดำเนินการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาานิพนธ์แล้ว เสนอให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความถูกต้องของภาษาที่ใช้ และการวัดผลและประเมินผล

3.1.9 ปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

3.1.10 นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วไปทดลองสอนกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของภาษาและเวลาในการจัดการเรียนรู้

3.1.11 นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วเสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาานิพนธ์เพื่อตรวจสอบอีกครั้งก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3.2 แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพื่อใช้ทดสอบภายหลังจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra โดยมีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

3.2.1 ศึกษาหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ประกอบด้วย ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง การวัดและประเมินผล เป็นต้น

3.2.2 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ

3.2.3 สร้างแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์การเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วย

3.2.3.1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 18 ข้อ ซึ่งใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ จำนวน 10 ข้อ และวัดความรู้เชิงกระบวนการ จำนวน 8 ข้อ โดยมีเกณฑ์ให้คะแนนดังนี้

คะแนน 1 หมายถึง เลือกคำตอบถูกต้อง

คะแนน 0 หมายถึง เลือกคำตอบไม่ถูก หรือเลือกคำตอบมากกว่า 1 ตัวเลือก หรือไม่เลือกตอบ

3.2.3.2 ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 14 ข้อ ซึ่งใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์
จำนวน 14 ข้อ

คะแนน 1 หมายถึง เขียนคำตอบถูกต้อง

คะแนน 0 หมายถึง เขียนคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนคำตอบ

3.2.3.3 ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ ซึ่งใช้วัดความรู้เชิงกระบวนการ
โดยมีเกณฑ์ให้คะแนน ดังนี้

ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนความรู้เชิงกระบวนการสำหรับข้อสอบแบบอัตนัย

ความรู้เชิงกระบวนการ	
คะแนน	ลักษณะการตอบ
ด้านดำเนินการตามลำดับขั้นตอนถูกต้อง ครบถ้วน	
3	ระบุขั้นตอนได้ถูกต้องทั้งหมด และแสดงวิธีดำเนินการตามขั้นตอนที่ระบุไว้ทั้งหมด
2	ระบุขั้นตอนได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของการดำเนินการทั้งหมดและแสดงการดำเนินการตามขั้นตอนนั้น
1	ระบุขั้นตอนได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของการดำเนินการทั้งหมด แต่ดำเนินการตามขั้นตอนนั้นไม่ถูกต้อง หรือระบุขั้นตอนได้ถูกต้องน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของการดำเนินการทั้งหมด และดำเนินการตามขั้นตอนนั้นได้อย่างถูกต้อง
0	ไม่สามารถระบุสิ่งที่ต้องดำเนินการในขั้นตอนนั้นได้ถูกต้อง
ด้านการคำนวณตามหลักการ	
2	แสดงการคำนวณตามกฎ บทนิยาม ทฤษฎีบทในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ ถูกต้องทั้งหมดทุกตำแหน่ง
1	คำนวณตามกฎ บทนิยาม ทฤษฎีบทในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด
0	ไม่สามารถคำนวณตามกฎ บทนิยาม ทฤษฎีบทในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ถูกต้อง หรือถูกน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด

3.2.4 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง
เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว เสนอต่อคณะกรรมการควบคุม
ปริญญาโทเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

3.2.5 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของกรรมการ ควบคุมปริญาานิพนธ์แล้วนำเสนอให้ผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิง เนื้อหา โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนสำหรับข้อสอบแต่ละข้อ ดังนี้

คะแนน +1	เมื่อแน่ใจว่าข้อสอบวัดสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
คะแนน 0	เมื่อไม่แน่ใจว่าข้อสอบวัดสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
คะแนน -1	เมื่อแน่ใจว่าข้อสอบวัดสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

หลังจากนั้นจะคัดเลือกเฉพาะข้อสอบที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มากกว่า 0.5 แล้วนำ คำแนะนำมาปรับปรุงแก้ไข โดยพิจารณาความเหมาะสมของข้อคำถาม และความเหมาะสมของ จำนวนภาษาด้วย

3.2.6 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้ว มาทดลองใช้กับนักเรียนที่ ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง แล้วตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่วางไว้

3.2.7 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ตรวจให้คะแนนแล้วมาวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบ โดย หาค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) จากนั้นคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากที่อยู่ตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.80 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป โดยแบบทดสอบประกอบด้วย 1) ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ ค่าความยากตั้งแต่ 0.25 ถึง 0.79 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.27 ถึง 0.63 ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ จำนวน 6 ข้อ ใช้วัดความรู้เชิง กระบวนการ จำนวน 6 ข้อ 2) ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 10 ข้อ ค่าความยากตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.67 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.73 ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ จำนวน 10 ข้อ และ 3) ข้อสอบ แบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ค่าความยากตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.29 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.43 ถึง 0.62 ใช้วัดความรู้เชิงกระบวนการ

3.2.8 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ถูกคัดเลือกมาวิเคราะห์หาความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบ โดยแบบทดสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และแบบทดสอบแบบเติมคำ ใช้สูตร ของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson Formula – 20: KR-20) มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.549 และ 0.745 ตามลำดับ ส่วนแบบทดสอบแบบอัตนัย ใช้การหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.834

3.2.9 จัดทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ฉบับสมบูรณ์เพื่อนำไปใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างต่อไป

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลองเพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้แบบแผนการทดลองแบบ One – Group Posttest – Only Design โดยมีลักษณะของแบบแผนการทดลองดังตาราง 3

ตาราง 3 แบบแผนการทดลอง One – Group Posttest – Only Design

กลุ่มตัวอย่าง	ตัวแปรต้น	ทดสอบ
ER	X	T

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

ER หมายถึง กลุ่มทดลองที่ได้มาโดยกระบวนการสุ่ม

X หมายถึง การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

T หมายถึง การทดสอบหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

การดำเนินการทดลอง

การศึกษาค้นคว้าความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยดำเนินการทดลองตามแบบแผนการวิจัย โดยดำเนินการจัดการเรียนรู้แบบออนไลน์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาที และเวลาในการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 2 คาบ ดังนี้

1. ผู้วิจัยชี้แจงวัตถุประสงค์การเรียนรู้ บทบาทของครูและบทบาทของนักเรียนในการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

2. ผู้วิจัยจัดการเรียนการสอน เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 12 แผน แผนละ 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยผู้ช่วยวิจัยสนับสนุนและช่วยดูแลความเรียบร้อยในชั้นเรียน

3. เมื่อดำเนินการทดลองตามแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ครบจำนวน 12 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ (Posttest) โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

4. ผู้วิจัยตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ แล้วนำคะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ได้ มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

5. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. นำคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial Test)

3. นำคะแนนความรู้เชิงกระบวนการที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

4. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial Test)

6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูล โดยใช้สถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังต่อไปนี้

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติที่ใช้ในการทดสอบคุณภาพเครื่องมือ ได้แก่ ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC)

ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นโดยคำนวณจากสูตร KR – 20 สำหรับข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และแบบเติมคำ สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) สำหรับข้อสอบแบบอัตนัย

3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน คือ การทดสอบทวินาม (Binomial Test)



บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ และเปรียบเทียบความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ ซึ่งผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการดำเนินการเก็บรวบรวมมาวิเคราะห์ในเชิงปริมาณ โดยได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลออกเป็น 2 ตอน ได้แก่

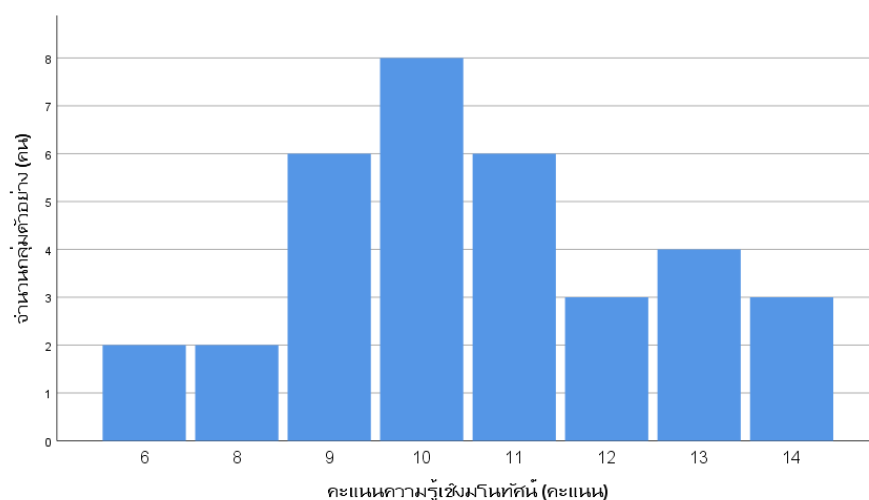
ตอนที่ 1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์

ตอนที่ 2 ความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์

ตอนที่ 1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยพบว่าคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีคะแนนเต็ม 16 คะแนน ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนจำนวน 34 คน ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แผนภูมิแสดงคะแนนความรู้อย่างมั่นใจ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จากภาพประกอบ 2 จะพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีคะแนนความรู้อย่างมั่นใจ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สูงที่สุด คือ 14 คะแนน จำนวน 3 คน และต่ำที่สุด คือ 6 คะแนน จำนวน 2 คน โดยมีฐานนิยมเท่ากับ 10 คะแนน

นอกจากนี้ในการศึกษาความรู้อย่างมั่นใจ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยนำคะแนนความรู้อย่างมั่นใจจากแบบทดสอบวัดความรู้อย่างมั่นใจและความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของกลุ่มตัวอย่างจำนวน 34 คน มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงดังตาราง 3

ตาราง 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้อย่างมั่นใจ จากแบบทดสอบวัดความรู้อย่างมั่นใจและความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แหล่งที่มาของ คะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลข คณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลข คณิตคิดเป็น ร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)
แบบทดสอบ	16	10.53	65.81	2.05

จากตาราง 4 จะพบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เท่ากับ 10.53 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 65.81 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.05

1.2 การทดสอบสมมติฐานการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ผู้วิจัยได้รวบรวมคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จากนั้นหาจำนวนนักเรียนที่มีคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป แล้วทดสอบสมมติฐานโดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial Test) ผลการทดสอบสมมติฐานการวิจัย แสดงดังตาราง 5

ตาราง 5 ผลการทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จำนวน นักเรียนกลุ่ม ตัวอย่าง	จำนวนนักเรียนที่มี คะแนนความรู้เชิง กระบวนการผ่านเกณฑ์ (คน)	ร้อยละของจำนวน นักเรียนที่มีคะแนน ความรู้เชิงกระบวนการ ผ่านเกณฑ์	Z-score	ค่าวิกฤต
34	24	71	1.260	1.645*

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 5 พบว่า จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ

60 ของคะแนนเต็ม ไม่มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และไม่ปฏิบัติตาม สมมติฐาน

ในการศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 ของ คะแนนเต็ม ไม่มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ความผิดพลาด จากการทำข้อสอบของนักเรียนและสัมภาษณ์นักเรียนแบบไม่เป็นทางการ โดยยกตัวอย่างดังนี้

(1) ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ข้อที่ 4 ข้อคำถามคือ

4. เวกเตอร์ใดไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ก. $\frac{1}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{7}\vec{k}$

ข. $\frac{3\sqrt{2}}{10}\vec{i} - \frac{1}{10}\vec{j} + \frac{9}{10}\vec{k}$

ค. $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j} - \frac{3}{4}\vec{k}$

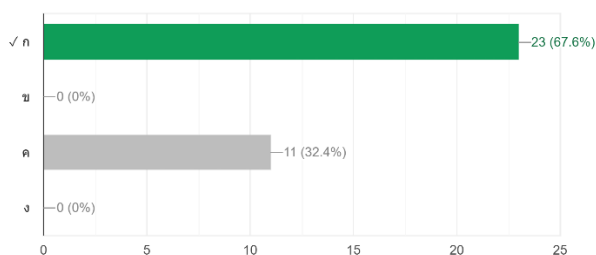
ง. $\frac{3}{8}\vec{i} - \frac{7}{8}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{8}\vec{k}$

ภาพประกอบ 3 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ข้อที่ 4

หากพิจารณาการเลือกคำตอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนเลือกคำตอบ ดังภาพประกอบ 4

ข้อที่ 4

23 / คำตอบถูกต้อง 34 รายการ



ภาพประกอบ 4 การเลือกคำตอบของนักเรียนในข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ข้อที่ 4

จากภาพประกอบ 4 พบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 23 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 67.6 เลือกตัวเลือกที่ถูกต้องคือตัวเลือก ก. และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 11 คน

จาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 32.4 เลือกตัวเลือก ค. จากการสัมภาษณ์แบบไม่เป็นทางการ นักเรียนให้เหตุผลดังนี้

นักเรียน 1 : “ตอนแรกผมคิดว่าข้อ ก. ผิด แต่ว่าลองไปคิด ค. ก็ผิดเหมือนกัน และเห็นข้อ ค. มีเศษหนึ่งส่วนสอง โดยวิธีที่ผมคิดคือ นำตัวเศษมายกกำลังสองแล้วบวกกัน แล้วหารากที่สองที่เป็นบวกของผลรวมกำลังสองของตัวเศษเท่ากับตัวส่วน ทำให้ตัดสินใจเลือก ค. ครับ”

นักเรียน 2 : “ในตอนที่ได้เห็นตัวเลือก หนูคิด ค. ก่อนเลยเพราะตัวส่วนต่างจากข้ออื่น โดยการหารากที่สองที่เป็นบวกของผลรวมกำลังสองของตัวเศษ พบว่ามันไม่เท่ากับตัวส่วน นั่นคือไม่เท่ากับ 1 ดังนั้นตัวเลือกนี้มันไม่ใช่เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ทำให้ตัดสินใจเลือก ค. โดยไม่พิจารณาตัวเลือกอื่น”

นักเรียน 3 : “หนูคิดว่าข้อนี้มีตัวเลือกที่ไม่ใช่เวกเตอร์หนึ่งหน่วย 2 ข้อ แต่จากการที่หนูทักท้วงครู และครูกล่าวว่าข้อสอบแบบเลือกตอบทุกข้อมีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น หนูเห็นว่า ค. ต้องผิดเยอะกว่า เลยเลือกตัวเลือกนี้ค่ะ”

จากการวิเคราะห์ผลจากการสัมภาษณ์ พบว่านักเรียนคิดว่าข้อนี้มีตัวเลือกที่ถูกมากกว่า 1 ตัวเลือก ใช้วิธีในการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยผิด ขาดความมั่นใจในเนื้อหา และเกิดข้อบกพร่องในการคำนวณ ทำให้ถูกลวงด้วยตัวเลือก ค. ทำให้เลือกตัวเลือกที่ผิด

(2) ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 3 ข้อคำถามคือ

_____ 3) กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

แก้ไขเป็น _____

ภาพประกอบ 5 ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 3

จากภาพประกอบ 5 ข้อนี้คำตอบคือ $\times$ แก้ไขเป็น $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ มีนักเรียนตอบคำถามถูกต้องจำนวน 22 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 64.7 ซึ่งพบคำตอบที่นักเรียนผิดพลาดเป็นส่วนใหญ่เป็นดังนี้

3) กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

แก้ไขเป็น กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

ภาพประกอบ 6 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 3 แบบที่ 1

3) กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

แก้ไขเป็น _____

ภาพประกอบ 7 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 3 แบบที่ 2

3) กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

แก้ไขเป็น $\vec{u} \times \vec{v} = 0$

ภาพประกอบ 8 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบเติมคำ ข้อ 3 แบบที่ 3

จากภาพประกอบ 6 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนแก้ไขเป็น $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ นักเรียนตอบผิดจำนวน 7 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 20.6 ภาพประกอบ 7 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนคิดว่าข้อนี้ถูกต้อง นักเรียนตอบผิดจำนวน 3 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 8.8 และภาพประกอบ 8 ข้อผิดพลาดคือนักเรียนแก้ไขเป็น $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ นักเรียนตอบผิดจำนวน 2 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 5.9

จากการวิเคราะห์ข้อผิดพลาด พบว่านักเรียนมีความสับสนในเรื่องการตรวจสอบการตั้งฉากหรือการขนานกันของเวกเตอร์ และมีนักเรียนบางส่วนใช้สัญลักษณ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ไม่ถูกต้อง ทำให้นักเรียนตอบคำถามข้อนี้ไม่ถูกต้อง

(3) ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7 ข้อคำถามคือ

_____ 7) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

แก้ไขเป็น _____

ภาพประกอบ 9 ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7

จากภาพประกอบ 9 ข้อนี้คำตอบคือ $\times$ แก้ไขเป็น $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ มีนักเรียนตอบคำถามถูกต้องด้วยคำตอบนี้จำนวน 18 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 52.9 และมีนักเรียนตอบคำถามถูกต้องด้วยคำตอบ $\times$ แก้ไขเป็น $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$ จำนวน 1 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 2.9 ซึ่งพบคำตอบที่นักเรียนผิดพลาดเป็นส่วนใหญ่นี้

$\times$ 7) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

แก้ไขเป็น $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$

ภาพประกอบ 10 ข้อผิดพลาดของข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7

$\checkmark$ 7) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

แก้ไขเป็น _____

ภาพประกอบ 11 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7

$\times$ 7) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

แก้ไขเป็น $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

ภาพประกอบ 12 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7

$$\times 7) \vec{u} \times \vec{u} = 0$$

$$\text{แก้ไขเป็น } \vec{u} - \vec{u} = 0$$

ภาพประกอบ 13 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 7

จากภาพประกอบ 10 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนแก้ไขเป็น $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$ นักเรียนตอบผิดจำนวน 7 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 20.6 ภาพประกอบ 11 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนคิดว่าข้อนี้ถูกต้อง นักเรียนตอบผิดจำนวน 6 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 17.6 ภาพประกอบ 12 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนแก้ไขเป็น $\vec{0} \times \vec{u} = 0$ นักเรียนตอบผิดจำนวน 1 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 2.9 และภาพประกอบ 13 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนแก้ไขเป็น $\vec{u} - \vec{u} = 0$ นักเรียนตอบผิดจำนวน 1 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 2.9

จากการวิเคราะห์ข้อผิดพลาด พบว่านักเรียนมีความสับสนในสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์กับผลคูณเชิงเวกเตอร์ เนื่องจากที่นักเรียนตอบ $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$ คล้ายกับสมบัติ $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ นอกจากนี้สำหรับภาพประกอบ 11-13 นักเรียนไม่ระวังเรื่องของการใช้สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ที่ว่า การคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ หรือการบวกลบเวกเตอร์ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์

(4) ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 9 ข้อคำถามคือ

$$\text{_____ 9) } |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| \text{ คือ ขนาดของผลคูณเชิงสเกลาร์ของ } \vec{u} \text{ กับ } \vec{v} \times \vec{w}$$

แก้ไขเป็น _____

ภาพประกอบ 14 ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อ 9

จากภาพประกอบ 14 ข้อนี้คำตอบคือ $\times$ แก้ไขเป็น $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ คือ ค่าสัมบูรณ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$ มีนักเรียนตอบคำถามถูกต้องด้วยคำตอบนี้จำนวน 17 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 50 ซึ่งพบคำตอบที่นักเรียนผิดพลาดเป็นส่วนใหญ่เป็นดังนี้

✓ 9) $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ คือ ขนาดของผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$

แก้ไขเป็น _____

ภาพประกอบ 15 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเดิมคำ ข้อ 9

X 9) $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ คือ ขนาดของผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$

แก้ไขเป็น ขนาดของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ภาพประกอบ 16 ข้อผิดพลาดของการทำข้อสอบแบบเดิมคำ ข้อ 9

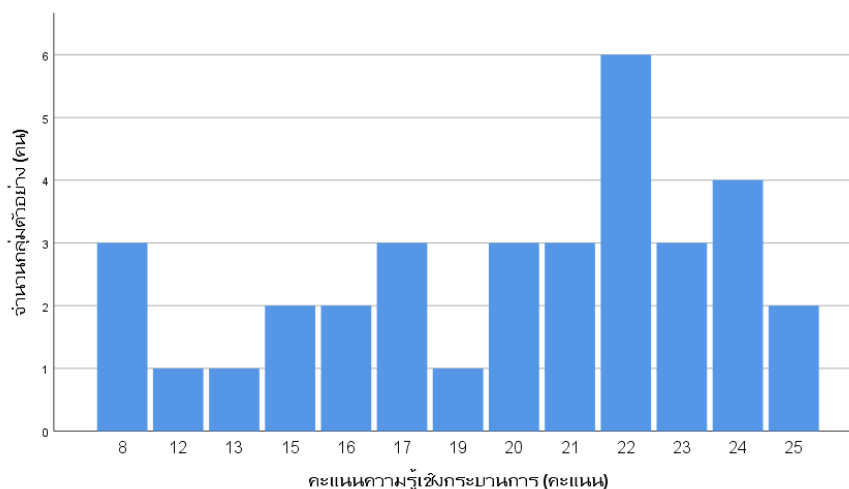
จากภาพประกอบ 15 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนคิดว่าข้อนี้ถูกต้อง นักเรียนตอบผิด จำนวน 11 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 32.3 และภาพประกอบ 16 ข้อผิดพลาดคือ นักเรียนแก้ไขเป็น $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ คือ ขนาดของผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$ นักเรียนตอบผิด จำนวน 6 คนจาก 34 คน คิดเป็นร้อยละ 17.6

จากการวิเคราะห์ข้อผิดพลาด พบว่านักเรียนไม่เข้าใจความหมายของผลคูณเชิงสเกลาร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ดังนั้นถ้าปริมาณที่อยู่ภายในสัญลักษณ์ “| |” เป็นสเกลาร์ จะหมายถึง ค่าสัมบูรณ์ของสเกลาร์นั้น แต่ถ้าปริมาณที่อยู่ภายในสัญลักษณ์ “| |” เป็นเวกเตอร์ จะหมายถึง ขนาดของเวกเตอร์นั้น

ตอนที่ 2 ความรู้เชิงกระบวนการเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์

2.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในการศึกษาความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยพบว่าคะแนนความรู้เชิงกระบวนการจากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีคะแนนเต็ม 26 คะแนน ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละคน จำนวน 34 คน เป็นดังภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 17 แผนภูมิแสดงคะแนนความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จากภาพประกอบ 17 จะพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีคะแนนความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สูงที่สุด คือ 25 คะแนน จำนวน 2 คน และต่ำที่สุด คือ 8 คะแนน จำนวน 3 คน โดยมีฐานนิยมเท่ากับ 22 คะแนน

นอกจากนี้ในการศึกษาความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้วิจัยนำคะแนนความรู้เชิงกระบวนการจากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของกลุ่มตัวอย่างจำนวน 34 คนมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงตาราง 6

ตาราง 6 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงกระบวนการ จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
แบบทดสอบ	26	19.15	73.65	4.92

จากตาราง 6 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงกระบวนการจากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เท่ากับ 19.15 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 73.65 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4.92

2.2 การทดสอบสมมติฐานการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ผู้วิจัยได้รวบรวมคะแนนความรู้เชิงกระบวนการจากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จากนั้นจึงหาจำนวนนักเรียนที่มีคะแนนความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป แล้วทดสอบสมมติฐานโดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial Test) ผลการทดสอบสมมติฐานการวิจัย แสดงดังตาราง 7

ตาราง 7 ผลการทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จำนวน นักเรียนกลุ่ม ตัวอย่าง	จำนวนนักเรียนที่มี คะแนนความรู้เชิง กระบวนการผ่านเกณฑ์ (คน)	ร้อยละของจำนวน นักเรียนที่มีคะแนน ความรู้เชิงกระบวนการ ผ่านเกณฑ์	Z-score	ค่าวิกฤต
34	27	79	2.310	1.645*

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 7 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้กระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐาน

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์
2. เพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์

สมมติฐานของการวิจัย

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม โรงเรียนหอวัง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โรงเรียนหอวัง โดยสุ่มนักเรียนจำนวน 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 3 ห้องเรียนโดยใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มชั้นเดียว (One-Stage Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารรถ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. กำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สำหรับการจัดการเรียนการสอนครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สังเคราะห์รูปแบบการสอนโดยใช้ GeoGebra จากเทคนิคการสอนของริตเทิล-จอห์นสัน และรูปแบบการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมโน้ตสโน้ตของจอยส์, เวล และ แคลฮูน ให้ผู้เรียนเข้าถึงความเข้าใจเชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra โดยแบ่งการสอนเป็น 3 ขั้น คือ 1) ขั้นสำรวจมโนทัศน์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนสำรวจและเปรียบเทียบมโนทัศน์ผ่านแฟ้มคำสั่งโปรแกรม GeoGebra และเขียนคำอธิบายเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์ด้วยตนเองในเอกสารแนะแนวทาง โดยมีครูเป็นผู้อำนวยการความสะดวกและตอบคำถามที่นักเรียนสงสัย 2) ขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนนำสมบัติของมโนทัศน์ที่ได้รับในขั้นสำรวจมโนทัศน์ ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างชิ้นงานที่สอดคล้องกับมโนทัศน์ในแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra โดยใช้กระบวนการตามความคิดของตนเอง และ 3) ขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนเขียนคำอธิบายกระบวนการการสร้างชิ้นงานจากขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับลงในเอกสารแนะแนวทาง และให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายหรือเปรียบเทียบกระบวนการสร้างชิ้นงานเพื่อหาข้อสรุปของกระบวนการสร้างที่ถูกต้อง จากนั้นครูแจกใบสรุปความรู้ เพื่อให้ให้นักเรียนได้รับความรู้ที่ถูกต้อง

3. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย 1) แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 12 แผน ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วยจุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผล การเรียนรู้ ใบสรุปความรู้ เอกสารแนะแนวทาง และเฉลยเอกสารแนะแนวทาง โดยแต่ละแผนใช้เวลาในการดำเนินการ 1 คาบ คาบละ 50 นาที และ 2) แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นแบบทดสอบทั้งหมด 26 ข้อ ประกอบด้วยข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ 6 ข้อ วัดความรู้เชิงกระบวนการ 6 ข้อ ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 10 ข้อ ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ และแบบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ ใช้วัดความรู้เชิงกระบวนการ จำนวน 4 ข้อ

หลังจากสร้างเครื่องมือเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำเครื่องมือเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำเครื่องมือที่ผ่านการปรับปรุงแก้ไขเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 คน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความชัดเจนของข้อคำถาม ความยากง่ายของข้อคำถาม และความเหมาะสมด้านสำนวนภาษาที่ใช้ แล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นนำเครื่องมือไปทดลองกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่ม

ตัวอย่างจำนวน 36 คนซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนห้องเรียนพิเศษ วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โรงเรียน หอวัง แล้วปรับปรุงแก้ไขเครื่องมืออีกครั้ง จากนั้นนำเสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลองเพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และ ความรู้เชิงกระบวนการเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ โปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้แบบแผนการทดลองแบบ One – Group Posttest – Only Design

การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลแบบออนไลน์ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ผู้วิจัยชี้แจงวัตถุประสงค์การเรียนรู้ บทบาทของครูและบทบาทของ นักเรียนในการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
2. ผู้วิจัยจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 12 แผน แผนละ 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดการ เรียนรู้ด้วยตนเองผ่านระบบออนไลน์ โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยผู้ช่วยวิจัย สนับสนุนและช่วยดูแลความเรียบร้อยในชั้นเรียน
3. เมื่อดำเนินการทดลองตามแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ครบจำนวน 12 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ (Posttest) โดยใช้ แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
4. ผู้วิจัยตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้ เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ แล้วนำคะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ได้ มาหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) และใช้วิธีการทางสถิติทดสอบ สมมติฐานที่ตั้งไว้

5. การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังจากทดลองแล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลดังนี้

1. ผู้วิจัยนำคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. ผู้วิจัยคำนวณจำนวนนักเรียนที่มีความรู้เชิงมโนทัศน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม จากนั้นตรวจสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยการทดสอบทวินาม (Binomial Test)

3. ผู้วิจัยนำคะแนนความรู้เชิงกระบวนการจากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

4. ผู้วิจัยคำนวณจำนวนนักเรียนที่มีความรู้เชิงกระบวนการตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม จากนั้นตรวจสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยการทดสอบทวินาม (Binomial Test)

สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ได้ผลสรุปดังนี้

1. นักเรียนจำนวนไม่มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด มีความรู้เชิงมโนทัศน์ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

2. นักเรียนจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด มีความรู้เชิงกระบวนการผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างเอกสารแนะแนวทางและแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีความสอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra แล้วนำไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งพบว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีผลต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยแบ่งหัวข้อการอภิปรายดังนี้

1. ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
2. ความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

1. ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

จากผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์สามมิติมีความรู้เชิงมโนทัศน์ผ่านเกณฑ์ไม่มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยผู้วิจัยแยกประเด็นอภิปรายผลดังนี้

1.1 การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบด้วย 3 ชั้นคือ ชั้นสำรวจมโนทัศน์ ชั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ และชั้นเปรียบเทียบกระบวนการ ซึ่งแต่ละชั้นส่งผลต่อการสร้างความรู้ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ของนักเรียนดังนี้

1.1.1 ชั้นสำรวจมโนทัศน์ เป็นชั้นที่ให้นักเรียนสำรวจและเปรียบเทียบมโนทัศน์ผ่านแฟ้มคำสั่งโปรแกรม GeoGebra จากตัวอย่างที่หลากหลายและเขียนคำอธิบายเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์ด้วยตนเองลงในเอกสารแนะแนวทาง โดยมีครูเป็นผู้อำนวยความสะดวกและตอบคำถามที่นักเรียนสงสัย ซึ่งการวิจัยในช่วงแรก นักเรียนใช้เวลาส่วนใหญ่ไปกับขั้นนี้ เนื่องจากนักเรียนไม่คุ้นเคยกับการจัดการเรียนรู้ที่นักเรียนได้สำรวจและลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ไม่สามารถค้นพบข้อมูลและรายละเอียดสำคัญในระยะเวลาที่กำหนด สรุปเป็นมโนทัศน์ที่จำเป็นไม่ถูกต้อง เนื่องจากนักเรียนคุ้นเคยกับการได้รับความรู้จากครูผู้สอนโดยตรง อีกทั้งนักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับโปรแกรม GeoGebra แต่ในการวิจัยในช่วงหลัง นักเรียนสามารถสำรวจมโนทัศน์ได้คล่องแคล่วมากยิ่งขึ้น สามารถค้นพบมโนทัศน์ที่สำคัญตามวัตถุประสงค์ สามารถนำรายละเอียดของข้อมูลที่ผู้วิจัยกำหนดในเอกสารแนะแนวทางไปใช้ได้ครบถ้วน และนำข้อมูลเหล่านั้นไปสรุปเป็นความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ถูกต้องได้ สอดคล้องกับริตเติล-จอห์นสัน (Rittle-Johnson, 2017, pp. 186-188) ที่กล่าวว่า การแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยก่อนที่จะได้รับการสอนจะเข้าใจความรู้เชิงมโนทัศน์มากกว่าการสอนจากครูโดยตรง เพราะการที่นักเรียนได้สำรวจก่อนที่จะได้รับการสอนจะช่วยให้ นักเรียนค้นพบและใส่ใจกับข้อมูลที่สำคัญ ซึ่งนักเรียนจะไม่สามารถค้นพบข้อมูลหรือรายละเอียดที่สำคัญเหล่านั้นด้วยตนเองจากครูโดยตรง

1.1.2 ขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ หลังจากที่นักเรียนได้สำรวจมโนทัศน์เสร็จสิ้น ผู้วิจัยได้ใช้คำถามที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ในคาบเรียนนั้น เพื่อให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของมโนทัศน์ ก่อนที่นักเรียนจะนำมโนทัศน์ที่ได้รับในขั้นสำรวจมโนทัศน์ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างชิ้นงานต่อไป สอดคล้องกับอัมพร ม้าคนอง (2558, น. 22) ที่กล่าวว่า ออกแบบกิจกรรมให้สอดคล้องกับมโนทัศน์ที่ต้องการพัฒนาให้นักเรียน โดยอาจต้องมีการวิเคราะห์มโนทัศน์ย่อยที่จะสอนก่อน หลังจากนั้นออกแบบกิจกรรมสำหรับแต่ละมโนทัศน์ และเมื่อดำเนินการจัดกิจกรรมจะต้องมีการประเมินพฤติกรรมของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง โดยอาจใช้คำถามกระตุ้น เพื่อส่งเสริมกระบวนการคิด ช่วยให้นักเรียนสร้างความรู้ได้ด้วยตนเองและขยายไปสู่ความรู้ใหม่หรือความรู้เชิงนามธรรมได้

1.2 ในการดำเนินการสอบเพื่อวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เนื่องจากของการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างเป็นช่วงท้ายของภาคเรียนที่ 2 ซึ่งคาบเกี่ยวกับช่วงการสอบปลายภาค ทำให้ผู้วิจัยได้ทดสอบกลุ่มตัวอย่างหลังจากจัดการเรียนรู้เสร็จสิ้นแล้ว 2 สัปดาห์ การที่กลุ่มตัวอย่างไม่ได้สอบทันทีหลังจากการจัดการเรียนรู้ ส่งผลต่อความคงทนของการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติของนักเรียน สอดคล้องกับพาสนา จุลรัตน์ (2548, น. 191) ที่กล่าวว่า หากทิ้งระยะหลังจากการเรียนรู้ไปเป็นระยะเวลาานาน ๆ ก็จะทำให้จำในสิ่งที่ได้เรียนรู้ได้น้อยหรือบางครั้งอาจลืมไปเลย จากการสัมภาษณ์นักเรียนหลังทำแบบทดสอบ นักเรียนกล่าวว่า “ข้อสอบมีจุดลงค่อนข้างเยอะ” “ข้อสอบในส่วนที่วัดความรู้เชิงมโนทัศน์นั้น ต้องใช้ความรอบคอบในการพิจารณา” “นักเรียนลืมเนื้อหาที่เป็นเกร็ดเล็กเกร็ดน้อยที่ควรระวัง” จากการวิเคราะห์ข้อสอบพบว่าข้อสอบในส่วนที่วัดความรู้เชิงมโนทัศน์นั้น วัดความแม่นยำในมโนทัศน์ของนักเรียน นักเรียนไม่ได้พิจารณาสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ ทำให้ตอบจริง เป็นต้น ซึ่งนักเรียนได้ทั้งช่วงเวลากับเนื้อหาในระยะเวลาที่นานพอสมควร ทำให้นักเรียนขาดความรอบคอบในการตอบคำถาม และลืมประเด็นที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้น

1.3 ในการจัดการเรียนรู้ออนไลน์ ผู้วิจัยใช้ระบบ “ห้องเรียนออนไลน์สำหรับการเรียนการสอน โรงเรียนหอวัง ระบบสนับสนุนการเรียน Online โดยใช้ Google App” โดยผู้วิจัย ผู้ช่วยวิจัย และนักเรียนจะต้อง เข้าสู่ระบบด้วย Mail@horwang.ac.th เท่านั้น จากการสำรวจความพร้อมในด้านอุปกรณ์การเข้าถึงอินเทอร์เน็ตของนักเรียนทั้งกลุ่มนำร่องและกลุ่มตัวอย่าง พบว่านักเรียนทุกคนมีอุปกรณ์การเข้าถึงอินเทอร์เน็ตที่พร้อมสำหรับการเรียนออนไลน์ ได้แก่ คอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล หรือแท็บเล็ต ทำให้ผู้วิจัยต้องปรับการใช้โปรแกรม จากที่วางแผนให้นักเรียนดาวน์โหลดโปรแกรม GeoGebra Classic ลงคอมพิวเตอร์ เป็นใช้แอปพลิเคชัน

GeoGebra Classic บนเว็บไซต์ <https://www.geogebra.org/> โดยแอปพลิเคชันบนเว็บไซต์นี้ จะแสดงผลของโปรแกรม GeoGebra เหมือนกันแม้อุปกรณ์ของผู้ใช้งานจะต่างกัน แต่ครูไม่สามารถตรวจสอบความคืบหน้าของการทำงานของนักเรียนตามเวลาจริงได้ ทำให้ผู้วิจัยต้องขอให้นักเรียนนำเสนอหน้าจอของนักเรียนอยู่บ่อยครั้ง ซึ่งอาจขัดขวางการเรียนรู้ของนักเรียน รวมถึงรบกวนเวลาในการทำงานของนักเรียน หรือการที่นักเรียนคนใดคนหนึ่งนำเสนอหน้าจอขณะทำงานนั้น เป็นการชี้แนะให้กับนักเรียนคนอื่นที่ยังดำเนินกิจกรรมไม่สำเร็จ ให้นักเรียนคนนั้นไม่ได้ใช้ความสามารถของตนในการดำเนินกิจกรรมตามที่ผู้วิจัยคาดหวังไว้

2. ความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

จากผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์สามมิติมีความรู้เชิงกระบวนการผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยผู้วิจัยแยกประเด็นอภิปรายผลดังนี้

2.1 การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนคือ ขั้นสำรวจมโนทัศน์ ขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ และขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ ซึ่งแต่ละขั้นส่งผลต่อการสร้างความรู้ความเข้าใจเชิงกระบวนการของนักเรียนดังนี้

2.1.1 ขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนนำมโนทัศน์ที่ได้รับในขั้นสำรวจมโนทัศน์ ไปประยุกต์ใช้ในการสร้างชิ้นงานที่สอดคล้องกับมโนทัศน์นั้นลงในแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra โดยใช้วิธีการตามความคิดของตนเอง ซึ่งนักเรียนจะทำชิ้นงานสำเร็จได้นั้น นักเรียนต้องมีการเชื่อมโยงบทนิยาม กฎ หรือสูตรที่ได้เรียนรู้จากขั้นสำรวจมโนทัศน์ มาใช้ในการสร้างชิ้นงาน และมีการตรวจสอบผลงานกับสถานการณ์ที่ผู้วิจัยกำหนดให้ถูกต้อง ส่งผลให้นักเรียนต้องคิด คำนวณ และมีลำดับขั้นตอนในการสร้างชิ้นงานให้สอดคล้องกับหลักการและเงื่อนไขของสถานการณ์ที่กำหนดได้ ชิ้นงานจึงจะประสบผลสำเร็จ สอดคล้องกับการศึกษา ซัลไนดี และ ซากาเรีย (Zulnaidi & Zakaria, 2012, p. 1) และ คาร์เลต (Khaled, 2014, p. 181) ที่พบว่าความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการมีความสัมพันธ์กันในเชิงบวก และสอดคล้องกับ ริตเทิล-จอห์นสัน (Rittle-Johnson, 2017, pp. 186-188) ที่กล่าวว่าหลังจากนักเรียนได้รับความรู้เชิงมโนทัศน์มาแล้ว นักเรียนยังสามารถเข้าใจความรู้เชิงกระบวนการจากความรู้เชิงมโนทัศน์ผ่านการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องซ้ำ โดยพิจารณาขั้นตอนของการสร้างชิ้นงานนั้น เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เห็นภาพรวมของมโนทัศน์นั้น ๆ ทั้งหมด และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พิจารณาขั้นตอนกับสถานการณ์อื่น ๆ กับตัวอย่างที่หลากหลาย ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนพัฒนาความรู้เชิงกระบวนการของตนเองด้วยเช่นกัน

2.1.2 ขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนเขียนคำอธิบายวิธีการสร้างชิ้นงานจากขั้นตอนที่ตนได้ทำลงในเอกสารแนะแนวทาง และให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายหรือเปรียบเทียบวิธีการสร้างชิ้นงานเพื่อหาวิธีการสร้างที่ถูกต้อง ก่อนที่ครูจะแจกใบสรุปความรู้ให้กับนักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้ตรวจสอบความรู้ที่ตนเองได้รับ การที่นักเรียนได้ร่วมกันอภิปราย ช่วยให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดของคนอื่น และเกิดการเปรียบเทียบกับแนวคิดของตนเอง ทำให้ทราบจุดที่ตนเองหรือคนอื่นผิดพลาด และช่วยกันหาแนวทางแก้ไขและหาข้อสรุปให้แนวคิดนั้นถูกต้องมากยิ่งขึ้น ทำให้ประเด็นนี้ สอดคล้องกับฮีบิร์ต (Hiebert, 1989, อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2546, น. 7) ที่เสนอว่า การพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์ กฎ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์และการตรวจสอบความเป็นเหตุเป็นผล การกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายช่วยสนับสนุนความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ มีการเชื่อมโยงข้อมูลใหม่กับข้อมูลใหม่ หรือเชื่อมโยงข้อมูลใหม่กับความรู้เดิม ซึ่งจะให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์หรือความรู้เชิงกระบวนการได้ดียิ่งขึ้น

2.2 การจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ครูออกแบบแฟ้มคำสั่งโปรแกรม GeoGebra ให้มีการผสมผสานระหว่างมุมมองพีชคณิต และมุมมองเรขาคณิต 3 มิติ โดยเมื่อนักเรียนเปลี่ยนแปลงค่าในมุมมองพีชคณิต นักเรียนจะสังเกตเห็นภาพที่ในมุมมองเรขาคณิต 3 มิติ จะมีการเปลี่ยนแปลงตามค่าในมุมมองพีชคณิตตามไปด้วย ส่งเสริมให้นักเรียนค้นพบกระบวนการในการดำเนินการต่าง ๆ ของเวกเตอร์ เช่น การบวกเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ การขนานกันของเวกเตอร์ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย และการคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ ซึ่งสอดคล้องกับชอย (Choi, 2010, p. 38) ที่กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ช่วยทำให้นักเรียนได้เข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หรือจากการแก้ไขปัญหาด้วยตนเอง นอกจากนั้นแฟ้มคำสั่งโปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือช่วยตรวจสอบความผิดพลาดของนักเรียนในเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง ช่วยให้นักเรียนพบข้อผิดพลาดและแก้ไขให้ถูกต้องได้ เช่น ในกิจกรรมที่ให้นักเรียนหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ที่กำหนด หากนักเรียนหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยนั้นได้ แต่ทิศทางเป็นทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ที่กำหนด ภาพในมุมมองเรขาคณิต 3 มิติจะเป็นตัวช่วยตรวจสอบความผิดพลาดให้กับนักเรียน ทำให้นักเรียนหาแนวทางแก้ไขให้ถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับไดโกวิก (Dikovic, 2009, pp. 191-192) ที่กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra ถูกออกแบบมาเพื่อการศึกษาโดยเฉพาะ นักเรียนสามารถโต้ตอบกับระบบในมุมมองพีชคณิตและระบบเรขาคณิตแบบพลวัตได้ทันที และพัฒนาความรู้ของนักเรียนได้ดียิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะ ซึ่งอาจจะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้และการวิจัย ดังนี้

1. ข้อเสนอแนะในการนำผลงานวิจัยไปใช้

1.1 ผู้สอนต้องสำรวจความพร้อมทางด้านอุปกรณ์ของนักเรียน ควรแนะนำให้ นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล เพื่อความสะดวกและเป็นไปในแนวทางเดียวกับผู้สอน

1.2 ผู้สอนต้องให้นักเรียนทำความเข้าใจการใช้งานพื้นฐานของโปรแกรม GeoGebra อธิบายลักษณะโปรแกรม วิธีใช้งาน ให้นักเรียนมีเวลาศึกษาโปรแกรมไม่ให้เกิดปัญหา เกี่ยวกับการใช้งานโปรแกรมในขณะจัดการเรียนรู้

1.3 ผู้สอนควรเลือกใช้กิจกรรม และสื่อที่มีความน่าสนใจ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียน สนใจก่อนที่นักเรียนจะได้ทำการสำรวจ ทดลองและหาคำตอบในกิจกรรมที่ผู้สอนสร้าง

1.4 ผู้สอนควรทำการทดสอบหลังจากการจัดการเรียนรู้ ไม่ควรเว้นระยะหลังจาก การสอนนานเกินไป เพราะความคงทนของการเรียนรู้ของนักเรียนจะลดลง

2. ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ผู้สอนควรนำการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ไปเป็นแนวทาง ในการจัดการเรียนรู้เนื้อหาสาระอื่น ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ด้วย เพื่อตรวจสอบให้แน่ใจว่าการ จัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ช่วยพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิง กระบวนการของนักเรียนได้จริง

2.2 ผู้สอนควรมีการศึกษาตัวแปรอื่น ๆ ร่วมกับการใช้โปรแกรม GeoGebra เช่น ความคงทนในการเรียนรู้ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติต่อวิชา คณิตศาสตร์ เนื่องจากตัวแปรเหล่านี้มีความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์เช่นกัน

2.3 ผู้สอนควรเลือกใช้แอปพลิเคชัน GeoGebra Classroom เนื่องจากผู้สอน สามารถติดตามความก้าวหน้าในการและได้ตอบกับนักเรียนแต่ละคนได้

บรรณานุกรม

- Arbain , N., & Shukor , N. A. (2015). The effects of GeoGebra on students achievement. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 172, 208-214.
- Bing, H. N., & Huy, P. P. (2016). Comparing balance and inverse methods on learning conceptual and procedural knowledge in equation solving: a cognitive load perspective. *Pedagogies: An International Journal*, 11(1), 63-83.
- Chan, C. P. (2015). *Conceptual and Procedural Knowledge Folded and Unfolded: A Study on Their Contributions in Solving Multi-step Linear Equation Problems: The Chinese University of Hong Kong (Hong Kong)*.
- Choi, K.-S. (2010). Motivating students in learning mathematics with GeoGebra. *Annals Computer Science Series*, 8(2), 65-76.
- Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- Dos, S., & José, M. (2017). Intersection of two surfaces in GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 6(2), 4-9.
- Gubrud, A. (1970). *The effect of an advance organizer and a concrete experience on learning the concept of vectors in junior and senior high school*: Cornell Univ.
- Günter, M. A., Estes, T. H., & Schwab, J. H. (1990). *Instruction: A models approach*: Allyn & Bacon.
- Haapasalo, L., & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(2), 139-157.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. Paper presented at the Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference.
- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of online Mathematics and its applications*, 7, 1448.
- Joyce, B., Weil, M., & Calhoun, E. (2003). *Models of teaching* (7th ed.). Boston:

Pearson/Allyn and Bacon.

Khaled, H. K. (2014). Conceptual and procedural knowledge of rational numbers for Riyadh elementary school teachers. *Journal of Education and Human development*, 3(4), 181-197.

Nicholson, J. L. (1975). *Vector operations and applications for the middle-school mathematics curriculum*. Teachers College, Columbia University.

Preiner, J. (2008). *Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: The case of GeoGebra*: na.

Rittle-Johnson, B., & Alibali Martha, W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of educational psychology*, 91(1), 175.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. *Oxford handbook of numerical cognition*, 1118-1134.

Rittle-Johnson, B. (2017). Developing mathematics knowledge. *Child Development Perspectives*, 11(3), 184-190.

Widada, W., Herawaty, D., Beka, Y., Sari, R. M., Riyani, R., & Nugroho, K. U. Z. (2020). *The mathematization process of students to understand the concept of vectors through learning realistic mathematics and ethnomathematics*. Paper presented at the Journal of Physics: Conference Series.

Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 31, 183-187.

Zulnaidi, H., & Zakaria, E. (2012). The effect of using GeoGebra on conceptual and procedural knowledge of high school mathematics students. *Asian Social Science*, 8(11), 102.

Zulnaidi, H., & Zamri, S. N. A. S. (2017). The effectiveness of the GeoGebra software: The intermediary role of procedural knowledge on students' conceptual knowledge and their achievement in mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 2155-2180.

- แสงเดือน อาตมย์นันท์. (2557). การพัฒนามโนทัศน์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยการจัดการเรียนรู้แบบซิปปา. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยศิลปากร, นครปฐม.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2534). คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). ตัวชี้วัดสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: ชุมชนสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- จิรรัตน์ จตุรานนท์. (2554). การศึกษาความรู้คณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียนการสอนของนิสิตนักศึกษาครุศาสตร์ ศึกษาศาสตร์ วิชาเอกคณิตศาสตร์. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- จุไรรัตน์ วัชรไทย. (2561). ผลการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรองเรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- ชลกานต์ ชมภู. (2559). ผลของการจัดกิจกรรมโดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 4Ex2 ที่มีผลต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยบูรพา, ชลบุรี.
- ชัญญา อุกิต. (2557). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง “กำหนดการเชิงเส้น” ที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.
- ธันยากร ช่วยทุกข์เพื่อน. (2559). การศึกษาข้อบกพร่องของกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาพีสิกส์ โดยใช้กลวิธีแก้ปัญหาเชิงตรรกะของเฮลเลอร์และเฮลเลอร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี : กรณีศึกษานักศึกษามหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิต. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารการศึกษา). มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิต, กรุงเทพฯ.
- นิรันดร์ รามศิริ. (2560). รายงานผลการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสาม

- มิตี สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนเพชรพิทยาคม.
- ปพนวัจน์ ฤกษ์สิริบุญโชติ. (2558). การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมโน้ตบุ๊ก และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษา. (วิทยานิพนธ์ปริญญา ดุษฎีบัณฑิต). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร, นครปฐม.
- ปิยะวุฒิ ศรีชนะ. (2556). ชุดการเรียนการสอนเรื่องกำหนดการเชิงเส้นโดยใช้โปรแกรม GeoGebra สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี, อุบลราชธานี.
- พาสนา จุลรัตน์. (2548). จิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพฯ: ภาควิชาการแนะแนวและจิตวิทยา การศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- พิพัฒน์ ปานชื่น. (2558). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการได้มาซึ่งมโนทัศน์ร่วมกับการสอนแบบตอบสนองด้วยท่าทางที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และ ความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร, พิษณุโลก.
- พิมสุภา ชินสา. (2561). ผลการจัดการเรียนรู้แบบ ACE เรื่องพหุนามและเศษส่วนของพหุนาม ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (ปริญญาานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- พิสุทธิ ยงทางเรือ. (2559). ผลการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม จีไอจีบร้า เรื่อง ภาคตัดกรวย. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, กรุงเทพฯ.
- มัญญ์ณฉวี แกมแก้ว. (2560). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหน่วยการเรียนรู้ เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา, นครราชสีมา.
- วรณัฐ มาตะกุล. (2551). การวิจัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุนวิทยาคม จังหวัดพะเยา. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่.
- วิไลวรรณ สีแดด, และ ไพรินทร์ สุวรรณศรี. (2560). การศึกษาความเข้าใจ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผ่าน GeoGebra Applet. *The 22nd Meeting in*

Mathematics (AMM 2017). สืบค้นจาก <http://www.math.science.cmu.ac.th/amm2017/proceedings/EDM-14.pdf>

วิมลรัตน์ ศรีสุข. (2551). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการรูปแบบการสร้างมโนทัศน์กับรูปแบบการแปลงเพื่อเสริมสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถทางการคิดแบบอุปนัยของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น. (วิทยานิพนธ์ปริญญาคุุชฎบัณฑิต). บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

วีริศ กิตติวรากุล. (2561). การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra. (ปริญญาานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.

วุฒิชัย ภูดี, และ นครราช อันสุข. (2558). การพัฒนาโปรแกรมเสริมกระบวนการคิดขั้นสูงด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติกับสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. การประชุมวิชาการคณิตศาสตร์ประจำปี 2559:

ศุภณัฐ ชัยดี. (2562). GeoGebra เพื่อชีวิตที่ดีกว่าสำหรับชาวคณิตศาสตร์. สืบค้นจาก <https://schaidee.files.wordpress.com/2015/07/geogebrafor560.pdf>

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2540). 25 ปี สสวท. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561ก). คู่มือการใช้หลักสูตรรายวิชาเพิ่มเติมวิทยาศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 วิชาฟิสิกส์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561ข). คู่มือการใช้หลักสูตร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สำนักบริหารงานการมัธยมศึกษาตอนปลาย. (2559). แนวทางการจัดการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21. สืบค้นจาก https://webs.rmutl.ac.th/assets/upload/files/2016/09/20160908101755_51855.pdf

สุนิตตา เรื่องสิริเศรษฐ์. (2552). ปัจจัยที่มีผลต่อความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในกรุงเทพมหานคร. (ปริญญาานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). บัณฑิต

วิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

อนุวัฒน์ เดชไธสง. (2553). *ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องเวกเตอร์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.*

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (ปริญญาณิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). บัณฑิต

วิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.

อัมพร ม้าคอง. (2546). *คณิตศาสตร์ : การสอนและการเรียนรู้*, กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสาร

ทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคอง. (2547). *เอกสารคำสอน รายวิชาทฤษฎีและการประยุกต์ทางการศึกษา*

คณิตศาสตร์, (เอกสารอัดสำเนา).

อัมพร ม้าคอง. (2558). *คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมการ

พัฒนานวัตกรรม ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อุษาวดี จันทรสนธิ. (2556). *การประเมินความสามารถทางคณิตศาสตร์ ประมวลสาระชุดวิชา*

สาร์ตอะและวิทยวิธีทางคณิตศาสตร์ Foundations and Methodologies of Mathematics

Instruction (พิมพ์ครั้งที่ 2). นนทบุรี: สำนักพิมพ์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.



ภาคผนวก ก
การหาคุณภาพของ
แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ
เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

การหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

แบบทดสอบที่ใช้เป็นเครื่องมือในการวัดผล คือ แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 1 ฉบับ ประกอบไปด้วย

- 1) ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ แบ่งเป็นข้อสอบใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์จำนวน 6 ข้อ และข้อสอบวัดความรู้เชิงกระบวนการ จำนวน 6 ข้อ
- 2) ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 10 ข้อ เป็นข้อสอบใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์จำนวน 10 ข้อ
- 3) ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ เป็นข้อสอบใช้วัดความรู้เชิงกระบวนการจำนวน 4 ข้อ

ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการหาคุณภาพของแบบทดสอบ ดังนี้

1. วิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อคำถามที่ผู้เชี่ยวชาญเห็นว่ามีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

คะแนน 0 สำหรับข้อคำถามที่ผู้เชี่ยวชาญไม่แน่ใจมีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาหรือไม่

คะแนน -1 สำหรับข้อคำถามที่ผู้เชี่ยวชาญเห็นว่าไม่มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

1.2 คำนวณค่า IOC เป็นรายข้อ แล้วเลือกข้อคำถามที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป โดยใช้สูตรการคำนวณ IOC คือ

$$IOC = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$$

เมื่อ	IOC	แทน	ดัชนีความสอดคล้อง
	R_i	แทน	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญคนที่ i
	i	แทน	จำนวนตั้งแต่ 1 ถึง n
	n	แทน	จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

ตาราง 8 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก						
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	0	2	0.67	ใช้ได้
12	+1	+1	0	2	0.67	ใช้ได้
14	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
17	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
ข้อสอบวัดความรู้เชิงกระบวนการแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก						
1	+1	-1	+1	1	0.33	ใช้ไม่ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	0	2	0.67	ใช้ได้
10	+1	0	+1	2	0.67	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
18	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเติมคำ						
19	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
20	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
21	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

ตาราง 8 (ต่อ)

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
22	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
23	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
24	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
25	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
26	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
27	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
28	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
29	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
30	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
31	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
32	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
ข้อสอบวัดความรู้เชิงกระบวนการแบบอัตนัย						
33	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
34	+1	0	+1	2	0.67	ใช้ได้
35	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
36	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
37	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
38	+1	+1	0	2	0.67	ใช้ได้

2. หาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

2.1 หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและข้อสอบเติมคำ โดยใช้สูตร

$$p = \frac{R_H - R_L}{2n}$$

เมื่อ	p	แทน	ค่าความยากง่าย
	R_H	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกของข้อนั้นในกลุ่มสูง
	R_L	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกของข้อนั้นในกลุ่มต่ำ
	n	แทน	จำนวนผู้ตอบในแต่ละกลุ่ม (ซึ่งมีจำนวนเท่ากัน)

หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่เป็นข้อสอบอัตนัย โดยใช้สูตร

$$p_i = \frac{(H_i - L_i)}{[T_i(N_H + N_L)]}$$

เมื่อ	p_i	แทน	ค่าความยากง่าย ข้อที่ i
	H_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มสูง
	L_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มต่ำ
	T_i	แทน	คะแนนเต็มของข้อที่ i
	N_H	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มสูง
	N_L	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

2.2 หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและข้อสอบเติมคำ โดยใช้สูตร

$$r = \frac{R_H - R_L}{n}$$

เมื่อ	r	แทน	ค่าความยากง่าย
	R_H	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกของข้อนั้นในกลุ่มสูง
	R_L	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกของข้อนั้นในกลุ่มต่ำ
	n	แทน	จำนวนผู้ตอบในแต่ละกลุ่ม (ซึ่งมีจำนวนเท่ากัน)

หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่เป็นข้อสอบอัตนัย โดยใช้สูตร

$$r_i = \frac{(H_i - L_i)}{\left[T_i \times \frac{1}{2} (N_H + N_L) \right]}$$

เมื่อ	r_i	แทน	อำนาจจำแนก ข้อที่ i
	H_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มสูง
	L_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มต่ำ
	T_i	แทน	คะแนนเต็มของข้อที่ i
	N_H	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มสูง
	N_L	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

2.3 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

หาค่าความเชื่อมั่น แบบความสอดคล้องภายในของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และข้อสอบเติมคำ โดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson: KR) สูตร KR-20 ดังนี้

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right\}$$

เมื่อ	r_{tt}	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัด
	k	แทน	จำนวนข้อของเครื่องมือวัด
	p	แทน	สัดส่วนของผู้ตอบถูกในแต่ละข้อ
	q	แทน	สัดส่วนของผู้ตอบผิดในแต่ละข้อ
	S^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนทั้งฉบับ

หาค่าความเชื่อมั่น แบบความสอดคล้องภายในของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่เป็นข้อสอบอัตนัย โดยใช้สูตรของ Cronbach ซึ่งมีสูตรการคำนวณสัมประสิทธิ์แอลฟา (alpha coefficient: α) ดังนี้

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum S_i^2}{S_t^2} \right\}$$

เมื่อ	α	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัด
	k	แทน	จำนวนข้อของเครื่องมือวัด
	S_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแต่ละข้อ
	S_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนรวมทั้งฉบับ

ตาราง 9 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก		
2	0.43	0.48
3	0.73	0.62
6	0.81	0.00
8	0.31	0.52
9	0.19	0.32
12	0.24	0.00
14	0.25	0.36
15	0.79	0.52
16	0.90	0.00
17	0.33	0.57
ข้อสอบวัดความรู้เชิงกระบวนการแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก		
1	0.00	0.00
4	0.69	0.52
5	0.81	0.00
7	0.24	0.63
10	0.47	0.57
11	0.31	0.62
13	0.40	0.27
18	0.41	0.43
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเติมคำ		
19	0.97	0.00
20	0.53	0.29
21	0.13	0.29
22	0.33	0.57

ตาราง 9 (ต่อ)

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
23	0.47	0.73
24	0.07	0.14
25	0.33	0.57
26	0.67	0.71
27	0.20	0.43
28	0.13	0.29
29	0.40	0.57
30	0.27	0.29
31	0.67	0.29
32	0.23	0.20
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบอัตนัย		
33	0.20	0.43
34	0.21	0.45
35	0.16	0.33
36	0.29	0.62
37	0.23	0.50
38	0.47	0.17

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง
เวกเตอร์ในสามมิติ ในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและข้อสอบแบบเติมคำสำหรับ
ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ โดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson: KR) สูตร KR-20
มีค่าเท่ากับ 0.549

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง
เวกเตอร์ในสามมิติ ในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกสำหรับใช้วัดความรู้เชิง

กระบวนการ โดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson: KR) สูตร KR-20 มีค่าเท่ากับ 0.745

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัยสำหรับใช้วัดความรู้เชิงกระบวนการ โดยวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) มีค่าเท่ากับ 0.834



ภาคผนวก ข
การทดสอบสมมติฐาน



การทดสอบสมมติฐานข้อ 1

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

การทดสอบสมมติฐาน

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.60$
 $H_1 : p > 0.60$

เนื่องจากจำนวนกลุ่มตัวอย่างมากกว่า 20 คน จึงใช้สถิติทดสอบ Z

สถิติทดสอบ คือ
$$Z = \frac{T - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}$$

เมื่อ p แทน สัดส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนความรู้เชิงกระบวนการตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม
 T แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนความรู้เชิงกระบวนการตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม
 ซึ่ง $T = 24$

π_0 แทน สัดส่วนของนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ต้องการทดสอบ
 ซึ่ง $\pi_0 = 0.60$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่ง $n = 34$

แทนค่า
$$Z = \frac{24 - (34)(0.60)}{\sqrt{34(0.60)(0.40)}} = \frac{3.6}{\sqrt{8.16}}$$

ดังนั้น $Z = 1.260$

เนื่องจาก $Z_{.05} = 1.645$ จะได้ว่า $Z < Z_{.05}$ เพราะฉะนั้นจึงยอมรับ H_0 นั่นคือนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงมโนทัศน์
ไม่ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด



การทดสอบสมมติฐานข้อ 2

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

การทดสอบสมมติฐาน

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.60$
 $H_1 : p > 0.60$

เนื่องจากจำนวนกลุ่มตัวอย่างมากกว่า 20 คน จึงใช้สถิติทดสอบ Z

สถิติทดสอบ คือ
$$Z = \frac{T - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}$$

เมื่อ p แทน สัดส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนความรู้เชิงกระบวนการตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม
 T แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนความรู้เชิงกระบวนการตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม
 ซึ่ง $T = 27$

π_0 แทน สัดส่วนของนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ต้องการทดสอบ
 ซึ่ง $\pi_0 = 0.60$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่ง $n = 34$

แทนค่า
$$Z = \frac{27 - (34)(0.60)}{\sqrt{34(0.60)(0.40)}} = \frac{6.6}{\sqrt{8.16}}$$

ดังนั้น $Z = 2.310$

เนื่องจาก $Z_{.05} = 1.645$ จะได้ว่า $Z < Z_{.05}$ เพราะฉะนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีความรู้เชิงกระบวนการผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05



ภาคผนวก ค
ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6		
รายวิชา	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
หน่วยการเรียนรู้	เวกเตอร์ในสามมิติ	
หัวข้อเรื่อง	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	
ปีการศึกษา	2564 ภาคเรียนที่ 2	เวลา 50 นาที

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ : เพื่อให้นักเรียนสามารถ

1.1.1 ตรวจสอบการเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ที่กำหนดได้

1.1.2 หาเวกเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจากข้อมูลที่กำหนดได้

1.2 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เพื่อให้นักเรียน

1.2.1 มีส่วนร่วมในการตอบคำถามในชั้นเรียน

1.2.2 มีความรับผิดชอบในการทำงานที่มอบหมาย

2. สารการเรียนรู้

บทนิยาม 1: เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เรียกว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

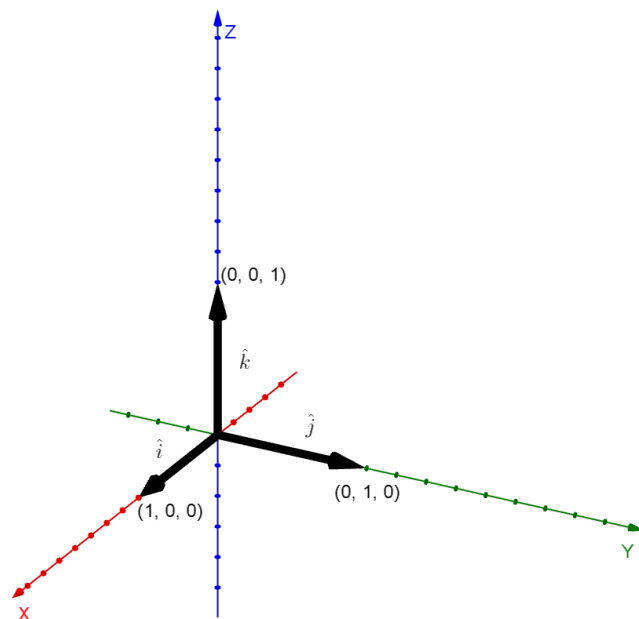
ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ที่ขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{j}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{k}$ ดังภาพ



ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ สามารถเขียน $\vec{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}$, $\vec{j}$

และ $\vec{k}$ ได้ดังนี้

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

หมายเหตุเนื่องจาก $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ และ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ มีขนาด $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ หน่วย

$$\text{ดังนั้น } |a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

กำหนดให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

1. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$
2. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$
3. เวกเตอร์ที่มีขนาด c หน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{c}{|\vec{u}|} \vec{u}$
4. เวกเตอร์ที่มีขนาด c หน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{c}{|\vec{u}|} \vec{u}$

ตัวอย่าง 1 กำหนด $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $A(1, 2, 0)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(-2, 3, 1)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$ ในรูปของ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u} = -\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

และ $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix} = \frac{3\sqrt{11}}{11} \vec{i} - \frac{\sqrt{11}}{11} \vec{j} - \frac{\sqrt{11}}{11} \vec{k}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $-2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $12\vec{i} - 16\vec{k}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\vec{u} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ และ $\vec{v} = 12\vec{i} - 16\vec{k}$

$$\text{นั่นคือ } |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

ดังนั้น เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$ คือ

$$-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} = -\frac{7}{20} (12\vec{i} - 16\vec{k}) = -\frac{21}{5} \vec{i} + \frac{28}{5} \vec{k}$$

3. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

3.1 เอกสารแนะนำแนวทาง เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

3.2 ใบสรุปความรู้ เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

3.3 แฟ้มคำสั่ง [6_unitvector.ggb](#), [6_assignment1.ggb](#) และ [6_assignment2.ggb](#)

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นสำรวจมโนทัศน์

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 ครูแจกเอกสารแนะนำแนวทาง เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

4.1.2 ครูให้นักเรียนแฟ้มคำสั่ง [6_unitvector.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนด พร้อมบันทึกผลในตารางตอนที่ 1

4.1.3 ครูให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [6_assignment1.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นให้นักเรียนหาผลบวกของเวกเตอร์ที่กำหนดในตอนต้นที่ 2

4.2 ขั้นทดสอบมโนทัศน์ที่ได้รับ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 30 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.2.1 ครูสุ่มนักเรียน 2-3 คน เพื่อนำเสนอคำตอบในตอนต้นที่ 1 และ 2 ถ้าคำตอบของนักเรียนถูกต้อง ครูกล่าวคำชมเชย แต่ถ้าคำตอบของนักเรียนยังไม่ถูกต้อง ครูและนักเรียนช่วยกันปรับให้ถูกต้อง

- 4.2.2 ครูให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [6_assignment2.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ ที่กำหนดในตารางพร้อมตอบคำถามในตอนที 3
- 4.2.3 ครูให้นักเรียนสรุปการหาเวกเตอร์ที่มีขนาด k หน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนด

4.3 ขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

- 4.3.1 ครูสุ่มนักเรียน 3 คนนำเสนอขั้นตอนการหาคำตอบของนักเรียนในตอนที 3
- 4.3.2 นักเรียนร่วมกันหาข้อสรุปจากการเปรียบเทียบขั้นตอนของเพื่อนที่นำเสนอ
- 4.3.3 ครูสรุปความรู้และแจกใบสรุปความรู้ให้กับนักเรียน



5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ : 1. ตรวจสอบการเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ที่กำหนดได้ 2. หาเวกเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจากข้อมูลที่กำหนดได้	วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องของการตรวจสอบการเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจากเวกเตอร์ที่กำหนด เครื่องมือวัดผล : เอกสารแนวทางการเรื่องเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ตอนที่ 1 มีทั้งหมด 8 ข้อ วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องของการระบุเวกเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางจากข้อมูลที่กำหนด เครื่องมือวัดผล : เอกสารแนวทางการเรื่องเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ตอนที่ 3 ในตารางมีตำแหน่งที่ต้องตอบ 20 ตำแหน่ง และในส่วนเติมคำ มีทั้งหมด 4 ข้อ	เกณฑ์การให้คะแนน : - หากนักเรียนเติมคำตอบในตารางได้ถูกต้อง ได้ข้อละ 1 คะแนน - หากนักเรียนเติมคำตอบในตารางไม่ถูกต้อง ได้ข้อละ 0 คะแนน เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียน ได้คะแนนตั้งแต่ 5 คะแนนขึ้นไป ถือว่าผ่าน เกณฑ์การให้คะแนน ในส่วนตาราง - หากนักเรียนเติมคำตอบในตารางได้ถูกต้อง ได้ตำแหน่งละ 0.5 คะแนน - หากนักเรียนเติมคำตอบในตารางไม่ถูกต้อง ได้ข้อละ 0 คะแนน ในส่วนเติมคำ - หากนักเรียนเติมคำตอบได้ถูกต้อง ได้ข้อละ 1 คะแนน - หากนักเรียนเติมคำตอบไม่ถูกต้อง ได้ข้อละ 0 คะแนน เกณฑ์การประเมินผล : คะแนนเต็ม 14 คะแนนถ้า นักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 9 คะแนนขึ้นไปถือว่าผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1. มีส่วนร่วมในการตอบคำถามในชั้นเรียน 2. มีความรับผิดชอบในการทำงาน	วิธีวัดผล : พิจารณาพฤติกรรมหรือการแสดงออกของนักเรียนขณะตอบคำถามหรือทำงานที่	เกณฑ์การให้คะแนน : ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็นอย่างเด่นชัด จะได้ คะแนน 2 คะแนน

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
ที่มอบหมาย	มอบหมาย โดยมีครูเป็นผู้ สังเกตแล้วบันทึกในแบบสังเกต พฤติกรรมการทำงานของ นักเรียน <u>เครื่องมือวัดผล :</u> แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานของนักเรียน	ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็น<u>เพียงเล็กน้อย</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ถ้า นักเรียน <u>ไม่แสดงออกเลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนน มากกว่า 2 คะแนน ถือว่าผ่าน

แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานของนักเรียน

วันที่: _____ เวลา _____

ชื่อกิจกรรม: _____

การให้คะแนน: ถ้าแสดงพฤติกรรมให้เห็นอย่างเด่นชัด จะได้ คะแนน 2 คะแนน
 ถ้าแสดงพฤติกรรมให้เห็นเพียงเล็กน้อย จะได้ คะแนน 1 คะแนน
 ถ้าไม่แสดงพฤติกรรมเลย จะได้ คะแนน 0 คะแนน

	พฤติกรรมที่ต้องการวัด และประเมินผล	นักเรียนคนที่ 1 -10									
		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
01	มีส่วนร่วมในการตอบคำถาม ในชั้นเรียน										
02	มีความรับผิดชอบในการ ทำงานที่มอบหมาย										
รวมคะแนน											

	พฤติกรรมที่ต้องการวัด และประเมินผล	นักเรียนคนที่ 11 -20									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
01	มีส่วนร่วมในการตอบคำถาม ในชั้นเรียน										
02	มีความรับผิดชอบในการ ทำงานที่มอบหมาย										
รวมคะแนน											

หมายเหตุ อาจสังเกตนักเรียนมากกว่า 20 คนได้ ทั้งนี้ขึ้นกับความต้องการของครูผู้สอน

6. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

6.1 ด้านนักเรียน

(ระบุ ความรู้ /ทักษะและกระบวนการ/คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียนที่พบ)

6.2 ด้านผู้สอน

(ระบุ ปัญหาหรือผลการจัดการเรียนรู้/ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป)

6.3 ด้านอื่นๆ (ถ้ามี)

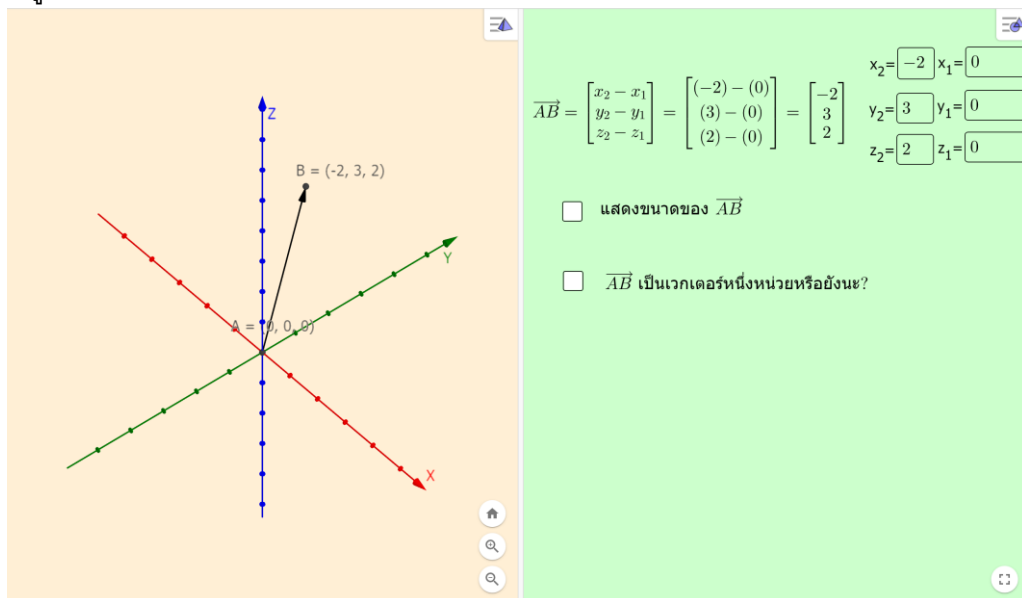
เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

เปิดแฟ้มคำสั่ง [6 unitvector.ggb](https://unitvector.ggb) ในโปรแกรม GeoGebra

ข้อมูลในแฟ้มคำสั่ง [6 unitvector.ggb](https://unitvector.ggb) เป็นดังภาพ



จากนั้นสำรวจหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนด พร้อมบันทึกผลในตาราง

กำหนดให้ $\vec{AB}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และมีจุดสิ้นสุดที่จุด B

ข้อ	A	B	$\vec{AB}$	$ \vec{AB} $	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย		เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{AB}$
					เป็น	ไม่เป็น	
0.	(0, 0, 0)	(-2, 3, 2)	$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\sqrt{17}$		✓	$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{3}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$
1.	(3, 1, 2)	(3, 2, 2)					

ข้อ	A	B	$\overrightarrow{AB}$	$ \overrightarrow{AB} $	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย		เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$
					เป็น	ไม่เป็น	
2.	$(-2, 1, 0)$	$(3, 2, 2)$					
3.	$(2, 1, 3)$	$(3, 2, 2)$					
4.	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 2)$					
5.	$(0, 1, 0)$	$(-3, 1, 0)$					
6.	$(0, 0, 0)$	$\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$					
7.	$\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$					
8.	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(0, 0, 0)$					

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1) จากตาราง เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ในข้อใดบ้างเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

2) จากตาราง เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ในข้อใดบ้างไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

3) เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย มีลักษณะอย่างไร

4) ให้ $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ โดยที่ $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือเวกเตอร์ใด

☐ $|\overrightarrow{AB}| \overrightarrow{AB}$

☐ $-|\overrightarrow{AB}| \overrightarrow{AB}$

☐ $\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB}$

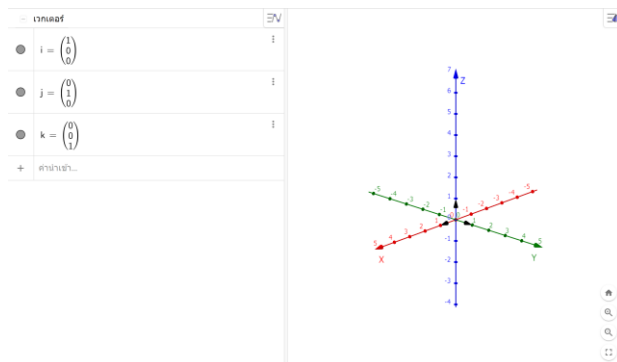
☐ $-\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ _____ หน่วย

ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ โดยที่ $|\vec{u}| \neq 0$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [6_assignment1.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra โดยข้อมูลในแฟ้มคำสั่งประกอบด้วย



ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra หาผลบวกของเวกเตอร์ที่กำหนด

กำหนดให้ $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

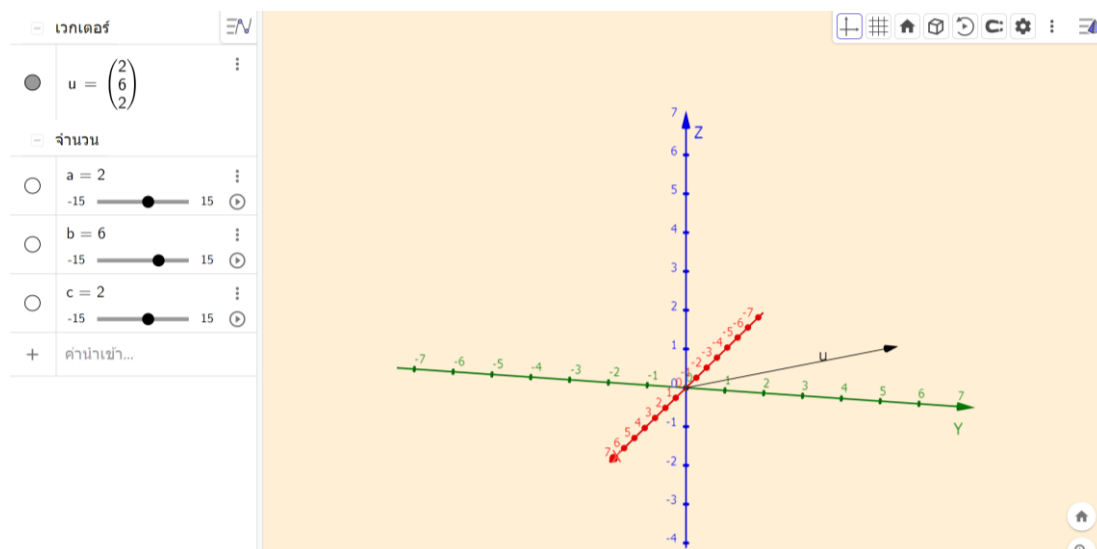
1.	$3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$	$=$	$\begin{bmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$	4.	$-\vec{i} + 2\vec{k}$	$=$	$\begin{bmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$
2.	$-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$	$=$	$\begin{bmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$	5.	$2\vec{i}$	$=$	$\begin{bmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$
3.	$2\vec{j} - 7\vec{k}$	$=$	$\begin{bmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$	6.	$-5\vec{k}$	$=$	$\begin{bmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$

เรียก $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ ว่า "เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน"

สำหรับ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \rule{1cm}{0.4pt} \vec{i} + \rule{1cm}{0.4pt} \vec{j} + \rule{1cm}{0.4pt} \vec{k}$

ตอนที่ 3 ให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [6_assignment2.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra โดยข้อมูลในแฟ้มคำสั่งประกอบด้วย



ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ ที่กำหนดในตารางต่อไปนี้ พร้อมบันทึกผล จากนั้นบันทึกส่งครูในชื่อ “เลขที่ของนักเรียน_6_assignment2.ggb”

กำหนดให้ $\vec{v}$ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

และ k แทนค่าคงที่ใด ๆ

ข้อที่	$\vec{u}$	$ \vec{u} $	$\vec{v}$	k	$k\vec{v}$	$ k\vec{v} $
1	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$			3		
2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$			-2		
3	$\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$			-14		

ข้อที่	$\vec{u}$	$ \vec{u} $	$\vec{v}$	k	$k\vec{v}$	$ k\vec{v} $
4	$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$			-10		
5	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$			20		

1) ถ้า $k > 0$ ทิศทางและขนาดของ $k\vec{v}$ มีความสัมพันธ์กับ $\vec{u}$ อย่างไร

2) ถ้า $k < 0$ ขนาดและทิศทางของ $k\vec{v}$ มีความสัมพันธ์กับ $\vec{u}$ อย่างไร

3) จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $-10\vec{j}$ และมีทิศทางเดียวกับ $2\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$

4) จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $-2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $12\vec{i} - 16\vec{k}$

กำหนดให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

1. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ _____

2. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ _____

3. เวกเตอร์ที่มีขนาด k หน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ _____

4. เวกเตอร์ที่มีขนาด k หน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ _____

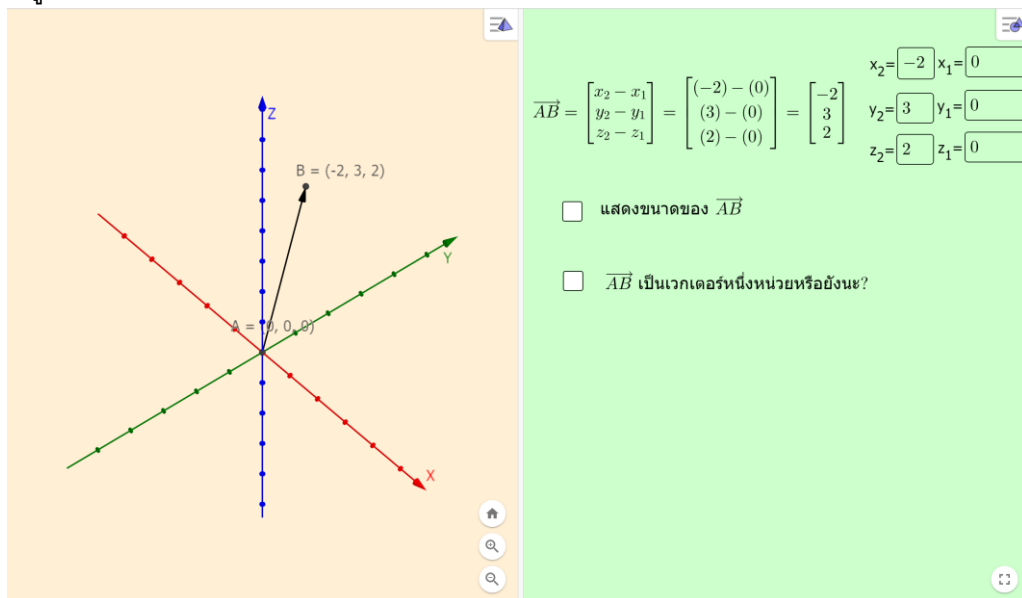
เฉลยเอกสารแนะแนวทาง เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

เปิดไฟล์ [6_unitvector.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra

ข้อมูลในไฟล์ [6_unitvector.ggb](#) เป็นดังภาพ



สามารถเปลี่ยนเวกเตอร์ได้ด้วยการเลื่อนจุด P หรือเปลี่ยนแปลงตัวเลขในกล่องข้อความ

จากนั้นสำรวจหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนด พร้อมบันทึกผลใน

ตาราง

กำหนดให้ $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และมีจุดสิ้นสุดที่จุด B

ข้อ	A	B	$\overrightarrow{AB}$	$ \overrightarrow{AB} $	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย		เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$
					เป็น	ไม่เป็น	
0.	(0, 0, 0)	(-2, 3, 2)	$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\sqrt{17}$		✓	$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{3}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$

ข้อ	A	B	$\overrightarrow{AB}$	$ \overrightarrow{AB} $	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย		เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$
					เป็น	ไม่เป็น	
1.	$(3, 1, 2)$	$(3, 2, 2)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	1	✓		$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
2.	$(-2, 1, 0)$	$(3, 2, 2)$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\sqrt{30}$		✓	$\begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$
3.	$(2, 1, 3)$	$(3, 2, 2)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{3}$		✓	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$
4.	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 2)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	2		✓	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
5.	$(0, 1, 0)$	$(-3, 1, 0)$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	3		✓	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ข้อ	A	B	$\overrightarrow{AB}$	$ \overrightarrow{AB} $	เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย		เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$
					เป็น	ไม่เป็น	
6.	$(0, 0, 0)$	$\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$	$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$	1	✓		$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$
7.	$\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$	0.2		✓	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
8.	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ -\frac{2}{5} \\ 2 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$	1	✓		$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ -\frac{2}{5} \\ 2 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1) จากตาราง เวกเตอร์ AB ในข้อใดบ้างเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์ AB ในข้อ 1, 6 และ 8

2) จากตาราง เวกเตอร์ AB ในข้อใดบ้างไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์ AB ในข้อ 0, 2, 3, 4, 5 และ 7

3) เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย มีลักษณะอย่างไร

เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย

4) ให้ $\vec{AB}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ โดยที่ $|\vec{AB}| \neq 0$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{AB}$ คือเวกเตอร์ใด

☐ $|\vec{AB}| \vec{AB}$

☐ $-|\vec{AB}| \vec{AB}$

☒ $\frac{1}{|\vec{AB}|} \vec{AB}$

☐ $-\frac{1}{|\vec{AB}|} \vec{AB}$

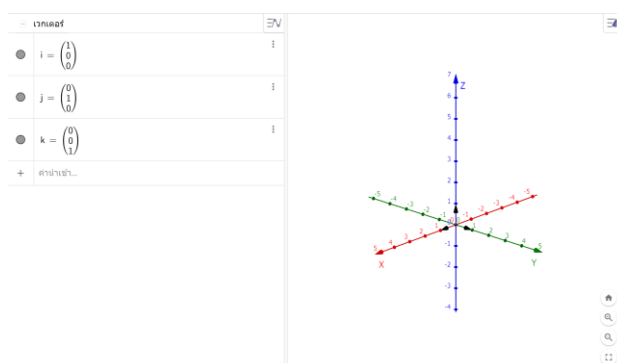
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย

ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ โดยที่ $|\vec{u}| \neq 0$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$



ตอนที่ 2 ให้นักเรียนเปิดไฟล์ [6_assignment1.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra โดยข้อมูลในไฟล์ประกอบด้วย



ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra หาผลบวกของเวกเตอร์ที่กำหนด

กำหนดให้ $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

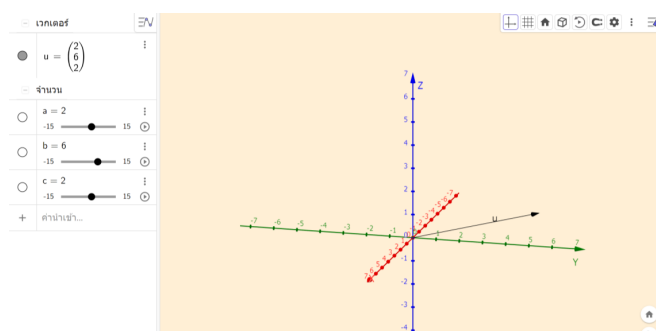
$$\begin{array}{ll}
 1. \quad 3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k} & = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 2. \quad -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} & = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 3. \quad 2\vec{j} - 7\vec{k} & = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \\
 4. \quad -\vec{i} + 2\vec{k} & = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 5. \quad 2\vec{i} & = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 6. \quad -5\vec{k} & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

เรียก $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ ว่า "เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน"

สำหรับ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{จะได้ว่า } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

ตอนที่ 3 ให้นักเรียนเปิดไฟล์ [6_assignment2.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra โดยข้อมูลในไฟล์ประกอบด้วย



ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ ที่กำหนดในตารางต่อไปนี้ พร้อมบันทึกผล (ระบุเป็นทศนิยมไม่เกิน 2 ตำแหน่ง) จากนั้นบันทึกไฟล์ส่งครูในชื่อ “เลขที่ของนักเรียน_6_assignment2.ggb”

กำหนดให้ $\vec{v}$ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

และ k แทนค่าคงที่ใด ๆ

ข้อที่	$\vec{u}$	$ \vec{u} $	$\vec{v}$	k	$k\vec{v}$	$ k\vec{v} $
1	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	6.63	$\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.9 \\ 0.3 \end{bmatrix}$	3	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 2.71 \\ 0.9 \end{bmatrix}$	3
2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	-2	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	2
3	$\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} -0.29 \\ -0.86 \\ -0.43 \end{bmatrix}$	-14	$\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$	-14
4	$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	-10	$\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$	10

ข้อที่	$\vec{u}$	$ \vec{u} $	$\vec{v}$	k	$k\vec{v}$	$ k\vec{v} $
5	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ -0.8 \end{bmatrix}$	20	$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix}$	20

1) ถ้า $k > 0$ ทิศทางและขนาดของ $k\vec{v}$ มีความสัมพันธ์กับ $\vec{u}$ อย่างไร

ตอบ $k\vec{v}$ มีขนาด k หน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

2) ถ้า $k < 0$ ขนาดและทิศทางของ $k\vec{v}$ มีความสัมพันธ์กับ $\vec{u}$ อย่างไร

ตอบ $k\vec{v}$ มีขนาด $|k|$ หน่วย และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$

3) จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $-10\vec{j}$ และมีทิศทางเดียวกับ $2\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$

ตอบ $3\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k}$

4) จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $-2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $12\vec{i} - 16\vec{k}$

ตอบ $-4.2\vec{i} + 5.6\vec{k}$

กำหนดให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

1. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

2. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

3. เวกเตอร์ที่มีขนาด k หน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{k}{|\vec{u}|}\vec{u}$

4. เวกเตอร์ที่มีขนาด k หน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{k}{|\vec{u}|}\vec{u}$

ใบสรุปความรู้ เรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม 1: เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เรียกว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ที่ขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์

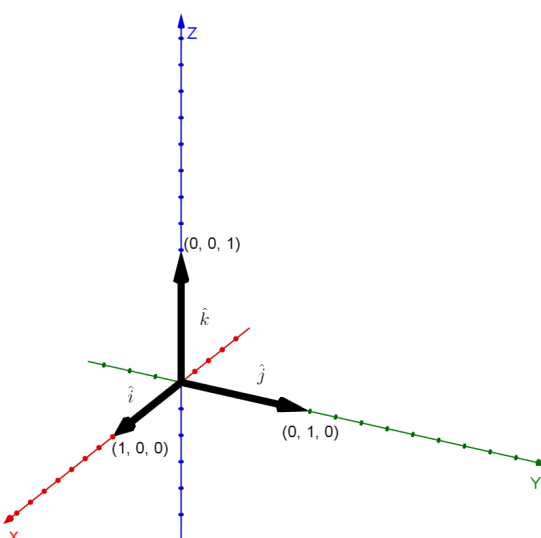
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติที่สำคัญคือ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

โดยแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\hat{i}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\hat{j}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\hat{k}$ ดังรูป



ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ สามารถเขียน $\vec{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}$

และ $\vec{k}$ ได้ดังนี้

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

หมายเหตุเนื่องจาก $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ และ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ มีขนาด $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ หน่วย

$$\text{ดังนั้น } |a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

กำหนดให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

1. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$
2. เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$
3. เวกเตอร์ที่มีขนาด c หน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{c}{|\vec{u}|}\vec{u}$
4. เวกเตอร์ที่มีขนาด c หน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\frac{c}{|\vec{u}|}\vec{u}$

ตัวอย่าง 1 กำหนด $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $A(1, 2, 0)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(-2, 3, 1)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$ ในรูปของ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u} = -\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

และ $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ -\frac{\sqrt{11}}{11} \\ -\frac{\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix} = \frac{3\sqrt{11}}{11} \vec{i} - \frac{\sqrt{11}}{11} \vec{j} - \frac{\sqrt{11}}{11} \vec{k}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $-2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $12\vec{i} - 16\vec{k}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\vec{u} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ และ $\vec{v} = 12\vec{i} - 16\vec{k}$

นั่นคือ $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$

$|\vec{v}| = \sqrt{(12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20$

ดังนั้น เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$ คือ

$$-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} = -\frac{7}{20} (12\vec{i} - 16\vec{k}) = -\frac{21}{5} \vec{i} + \frac{28}{5} \vec{k}$$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12		
รายวิชา	คณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
หน่วยการเรียนรู้	เวกเตอร์ในสามมิติ	
หัวข้อเรื่อง	การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์	
ปีการศึกษา	2564 ภาคเรียนที่ 2	เวลา 50 นาที

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ : เพื่อให้นักเรียนสามารถ

1.1.1 ระบุสูตรหาพื้นที่และปริมาตรโดยใช้เวกเตอร์ได้

1.1.2 นำสูตรการหาพื้นที่และปริมาตรโดยใช้เวกเตอร์ไปใช้ได้

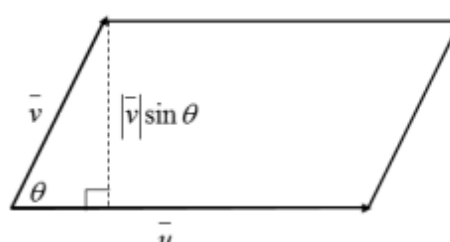
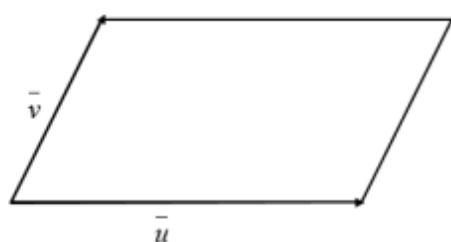
1.2 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ : เพื่อให้นักเรียน

1.2.1 มีส่วนร่วมในการตอบคำถามในชั้นเรียน

1.2.2 มีความรับผิดชอบในการทำงานที่มอบหมาย

2. สาระการเรียนรู้

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



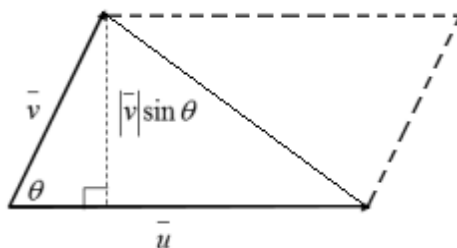
จากสูตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวฐาน $\times$ ความสูง

จากภาพ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$

$$= |\vec{u} \times \vec{v}|$$

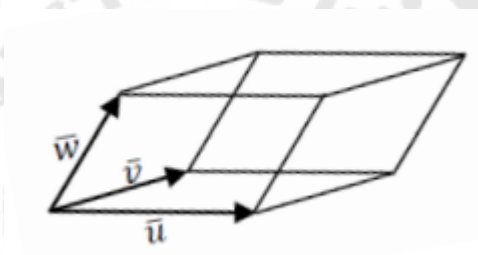
ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = $|\vec{u} \times \vec{v}|$

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม



จากภาพ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม



จากภาพ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

หมายเหตุ $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$

ตัวอย่าง 1 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\vec{PQ} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\vec{PS} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

วิธีทำ จากสูตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\vec{PQ} \times \vec{PS}|$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= |-8\vec{i} - 12\vec{j} + 9\vec{k}|$$

$$= 17 \text{ ตารางหน่วย}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(0, 2, 2)$, $B(8, 8, -2)$ และ $C(9, 12, 6)$

วิธีทำ จากสูตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & -4 \\ 9 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} |64\vec{i} - 68\vec{j} + 26\vec{k}|$$

$$= \frac{1}{2} (18\sqrt{29})$$

$$= 9\sqrt{29} \text{ ตารางหน่วย}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH โดยที่ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

วิธีทำ จากสูตร ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AF})|$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= |-17|$$

$$= 17 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

3. สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

3.1 เอกสารแนะนำทาง เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

3.2 ใบสรุปความรู้ เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

3.3 แฟ้มคำสั่ง [12 cross product app.ggb](#) และ [12 assignment.ggb](#)

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นสำรวจจนทศน์

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 ครูแจกเอกสารแนะแนวทาง เรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ

4.1.2 ครูให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [12 cross product app.ggb](https://www.geogebra.org/m/12_cross_product_app.ggb) ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นให้นักเรียนกดแสดงเครื่องหมาย ☒ ในกล่อง ☐ จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่างข้อ 1.2 ในเอกสารแนะแนวทาง

4.1.3 ครูให้นักเรียนสร้าง $\overline{AC}$ ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นตอบคำถามข้อ 1.3

4.2 ขั้นทดสอบจนทศน์ที่ได้รับ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 30 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.2.1 ครูสุ่มนักเรียน 4-5 คน เพื่อนำเสนอคำตอบในข้อที่ 1.3 ถ้าคำตอบของนักเรียนถูกต้อง ครูกล่าวคำชมเชย แต่ถ้าคำตอบของนักเรียนยังไม่ถูกต้อง ครูและนักเรียนช่วยกันปรับให้ถูกต้อง

4.2.2 ครูให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [12 assignment.ggb](https://www.geogebra.org/m/12_assignment.ggb) ในโปรแกรม GeoGebra จากให้นักเรียนใช้เครื่องมือในโปรแกรม GeoGebra สร้างวัตถุ (object) ตามข้อมูลในข้อ 2.2

4.2.3 ครูให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลจากแฟ้มคำสั่ง จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่างในข้อ 2.3

4.2.4 ให้นักเรียนให้นักเรียนตอบคำถามในตอนข้อ 3

4.3 ขั้นเปรียบเทียบกระบวนการ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.3.1 ครูสุ่มนักเรียน 3 คนนำเสนอขั้นตอนของนักเรียนในข้อ 2.3

4.3.2 นักเรียนร่วมกันหาข้อสรุปจากการเปรียบเทียบขั้นตอนของเพื่อนแต่ละคน

4.3.3 ครูสรุปความรู้และแจกใบสรุปความรู้ให้กับนักเรียน

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ :</u> 1. ระบุสูตรหาพื้นที่และปริมาตรโดยใช้เวกเตอร์ได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาจากการเติมคำตอบลงในช่องว่าง	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> -หากนักเรียนเติมคำตอบได้ถูกต้อง จะได้จุดละ 1 คะแนน -หากนักเรียนเติมคำตอบไม่ถูกต้อง จะได้จุดละ 0 คะแนน
2. นำสูตรการหาพื้นที่และปริมาตรโดยใช้เวกเตอร์ไปใช้ได้	<u>เครื่องมือวัดผล :</u> เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ ตอนที่ 1 และตอนที่ 2 <u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาจากความถูกต้องของการตอบคำถาม	<u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนน ตั้งแต่ 11 คะแนนขึ้นไป ถือว่าผ่าน
	<u>เครื่องมือวัดผล :</u> เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ ตอนที่ 3	<u>เกณฑ์การให้คะแนน</u> -หากนักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง จะได้ข้อละ 1 คะแนน -หากนักเรียนตอบคำถามไม่ถูกต้อง จะได้ข้อละ 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนน ตั้งแต่ 2 คะแนนขึ้นไป ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์</u> 1. มีส่วนร่วมในการตอบคำถามในชั้นเรียน 2. มีความรับผิดชอบในการทำงานที่มอบหมาย	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาพฤติกรรมหรือการแสดงออกของนักเรียนขณะตอบคำถามหรือทำงานที่มอบหมาย โดยมีครูเป็นผู้สังเกตแล้วบันทึกในแบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานของนักเรียน <u>เครื่องมือวัดผล :</u> แบบสังเกตพฤติกรรม การทำงานของนักเรียน	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อของแบบสังเกตพฤติกรรม ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็นอย่าง<u>เด่นชัด</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ถ้า นักเรียน แสดงออกให้เห็น<u>เพียงเล็กน้อย</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ถ้า นักเรียน <u>ไม่แสดงออกเลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้า นักเรียน ได้คะแนน มากกว่า 2 คะแนน ถือว่าผ่าน

แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานของนักเรียน

วันที่: _____ เวลา _____

ชื่อกิจกรรม: _____

การให้คะแนน: ถ้าแสดงพฤติกรรมให้เห็นอย่างเด่นชัด จะได้ คะแนน 2 คะแนน
 ถ้าแสดงพฤติกรรมให้เห็นเพียงเล็กน้อย จะได้ คะแนน 1 คะแนน
 ถ้าไม่แสดงพฤติกรรมเลย จะได้ คะแนน 0 คะแนน

	พฤติกรรมที่ต้องการวัด และประเมินผล	นักเรียนคนที่ 1 -10									
		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
01	มีส่วนร่วมในการตอบคำถาม ในชั้นเรียน										
02	มีความรับผิดชอบในการ ทำงานที่มอบหมาย										
รวมคะแนน											

	พฤติกรรมที่ต้องการวัด และประเมินผล	นักเรียนคนที่ 11 -20									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
01	มีส่วนร่วมในการตอบคำถาม ในชั้นเรียน										
02	มีความรับผิดชอบในการ ทำงานที่มอบหมาย										
รวมคะแนน											

หมายเหตุ อาจสังเกตนักเรียนมากกว่า 20 คนได้ ทั้งนี้ขึ้นกับความต้องการของครูผู้สอน

6. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

6.1 ด้านนักเรียน

(ระบุ ความรู้ /ทักษะและกระบวนการ/คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียนที่พบ)

6.2 ด้านผู้สอน

(ระบุ ปัญหาหรือผลการจัดการเรียนรู้/ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป)

6.3 ด้านอื่นๆ (ถ้ามี)

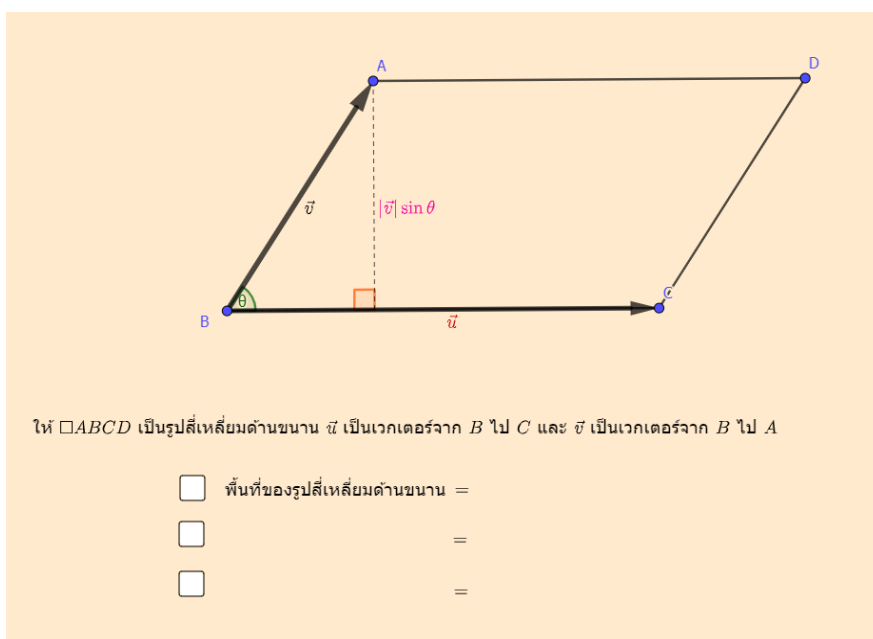
เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 เปิดแฟ้มคำสั่ง [12_cross product app.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra

ข้อมูลในแฟ้มคำสั่ง [12_cross product app.ggb](#) เป็นดังภาพ



1.2 ให้นักเรียนกดแสดงเครื่องหมาย ✓ ในกล่อง ☐ จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$

θ แทนมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

นั่นคือ ความยาวฐานของ $\square ABCD$ คือ _____

และ ความสูงของ $\square ABCD$ คือ _____

จากสูตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวฐาน $\times$ ความสูง

= _____ $\times$ _____

= _____

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = _____

1.3 ให้นักเรียนสร้าง $\overline{AC}$ ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นตอบคำถามต่อไปนี้

1) พื้นที่ของ $\square ABCD$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ _____

2) พื้นที่ของ $\triangle ABC$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ _____

3) ความสัมพันธ์ของ $\square ABCD$ กับ $\triangle ABC$ เป็นอย่างไร

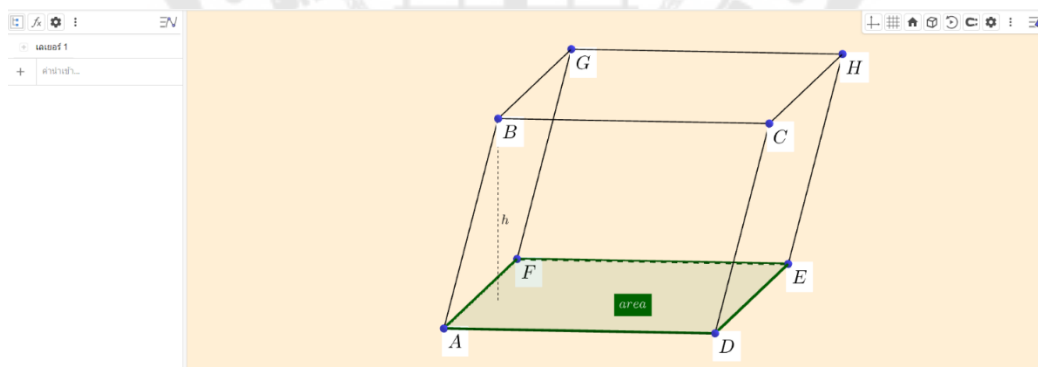
ตอบ _____

4) ให้นักเรียนเขียนสูตรการหาพื้นที่ $\triangle ABC$ ในรูป $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ตอบ _____

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 ให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [12_assignment.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra ข้อมูลในแฟ้มคำสั่งเป็นดังภาพ



กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH

2.2 ให้นักเรียนใช้เครื่องมือในโปรแกรม GeoGebra สร้างวัตถุ (object) ตามข้อมูลต่อไปนี้

กำหนดให้ $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AD}$ และ $\vec{w} = \overline{AF}$

จากนั้นสร้าง $\vec{v} \times \vec{w}$

ให้ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$

2.3 ให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลจากแฟ้มคำสั่ง จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่าง

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ADEF เป็นฐานของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH

ให้ area เป็นพื้นที่ฐาน จะได้ว่า area = _____

และ h เป็นความสูง จะได้ว่า h = _____

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH = พื้นที่ฐาน $\times$ ความสูง

$$= \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos \theta$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

หมายเหตุ

1. เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ดังนั้นควร

ใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ที่ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

2. ในการเลือกลำดับของด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่มีผลต่อปริมาตรที่หาได้ กล่าวคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$$

ตอนที่ 3 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ (สามารถใช้โปรแกรม GeoGebra ในการช่วยหาคำตอบได้)

3.1 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\overrightarrow{PS} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

ตอบ _____

3.2 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(0, 2, 2)$, $B(8, 8, -2)$ และ $C(9, 12, 6)$

ตอบ _____

3.3 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH โดยที่ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

ตอบ _____

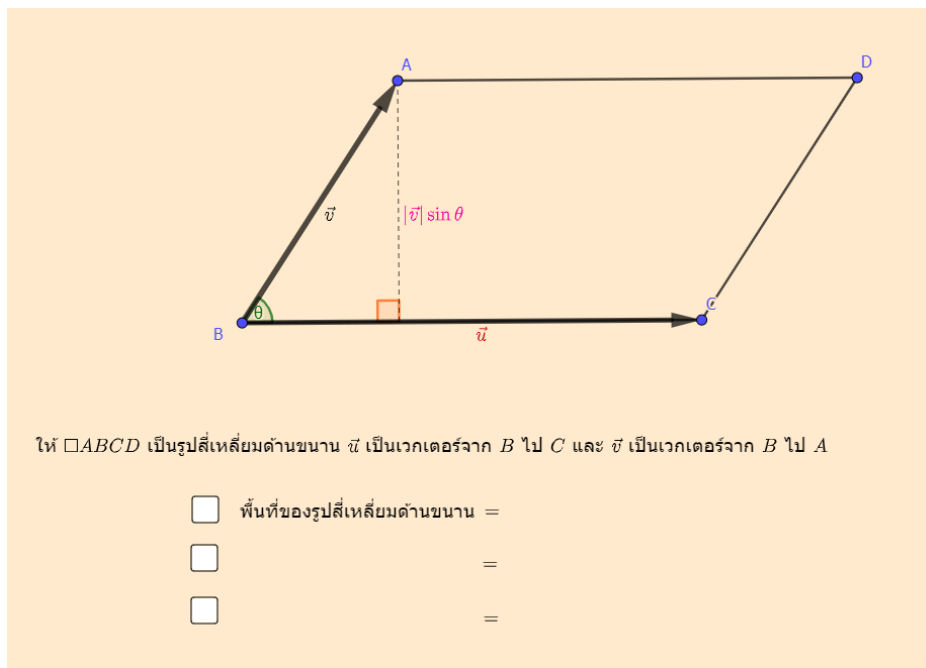
เอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 เปิดแฟ้มคำสั่ง [12_cross product app.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra

ข้อมูลในแฟ้มคำสั่ง [12_cross product app.ggb](#) เป็นดังภาพ



1.2 ให้นักเรียนกดแสดงเครื่องหมาย ☒ ในกล่อง ☐ จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$

θ แทนมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

นั่นคือ ความยาวฐานของ $\square ABCD$ คือ _____

และ ความสูงของ $\square ABCD$ คือ _____

จากสูตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวฐาน $\times$ ความสูง

= _____ $\times$ _____

= _____

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = _____

1.3 ให้นักเรียนสร้าง $\overline{AC}$ ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นตอบคำถามต่อไปนี้

1) พื้นที่ของ $\square ABCD$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ _____

2) พื้นที่ของ $\triangle ABC$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ _____

3) ความสัมพันธ์ของ $\square ABCD$ กับ $\triangle ABC$ เป็นอย่างไร

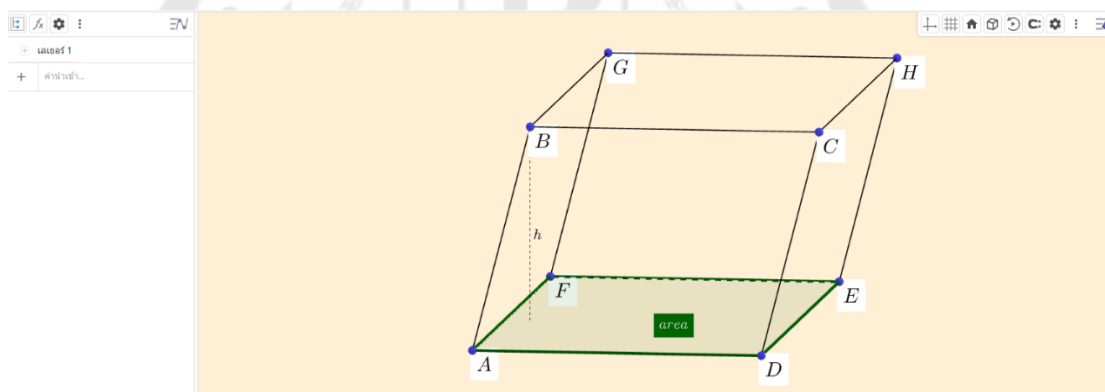
ตอบ _____

4) ให้นักเรียนเขียนสูตรการหาพื้นที่ $\triangle ABC$ ในรูป $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ตอบ _____

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 ให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [12_assignment.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra หลังจากนั้นบันทึกส่งครูโดยตั้งชื่อ “เลขที่ของนักเรียน_12_assignment.ggb” ข้อมูลในแฟ้มคำสั่งประกอบด้วย ข้อมูลในแฟ้มคำสั่งเป็นดังภาพ



“กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH”

2.2 ให้นักเรียนใช้เครื่องมือในโปรแกรม GeoGebra สร้างวัตถุ (object) ตามข้อมูลต่อไปนี้

กำหนดให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ และ $\vec{w} = \overrightarrow{AF}$

จากนั้นสร้าง $\vec{v} \times \vec{w}$

ให้ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$

2.3 ให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลจากแฟ้มคำสั่ง จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่าง

“พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ADEF เป็นฐานของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH”

ให้ area เป็นพื้นที่ฐาน จะได้ว่า $area = \underline{\hspace{2cm}}$

และ h เป็นความสูง จะได้ว่า $h = \underline{\hspace{2cm}}$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH = พื้นที่ฐาน $\times$ ความสูง

$$= \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}}$$

$$= |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos \theta$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

หมายเหตุ

- เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ดังนั้นควรใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ที่ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
- ในการเลือกลำดับของด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่มีผลต่อปริมาตรที่หาได้ กล่าวคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$$

ตอนที่ 3 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ (สามารถใช้โปรแกรม GeoGebra ในการช่วยหาคำตอบได้)

3.1 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\overrightarrow{PS} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

ตอบ $\underline{\hspace{2cm}}$

3.2 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(0, 2, 2)$, $B(8, 8, -2)$ และ $C(9, 12, 6)$

ตอบ $\underline{\hspace{2cm}}$

3.3 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH โดยที่ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

ตอบ $\underline{\hspace{2cm}}$

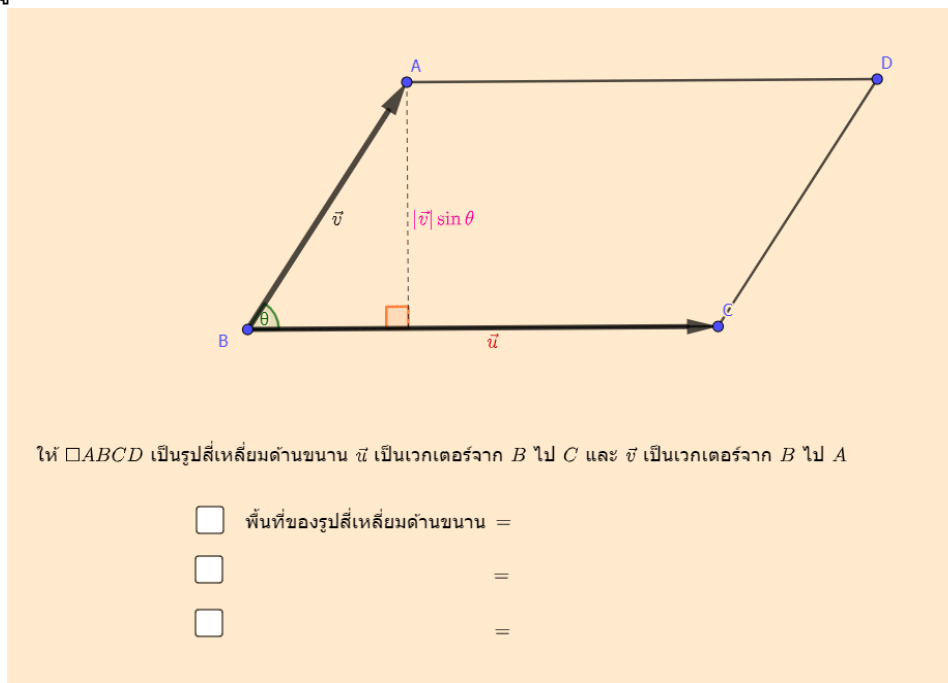
เฉลยเอกสารแนะแนวทาง เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 เปิดแฟ้มคำสั่ง [12_cross product app.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra

ข้อมูลในแฟ้มคำสั่ง [12_cross product app.ggb](#) เป็นดังภาพ



1.2 ให้นักเรียนกดแสดงเครื่องหมาย $\checkmark$ ในกล่อง ☐ จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$

θ แทนมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

นั่นคือ ความยาวฐานของ $\square ABCD$ คือ $|\vec{u}|$

และ ความสูงของ $\square ABCD$ คือ $|\vec{v}| \sin \theta$

จากสูตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวฐาน $\times$ ความสูง

$$= |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

$$= |\vec{u} \times \vec{v}|$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\vec{u} \times \vec{v}|$

1.3 ให้นักเรียนสร้าง $\overline{AC}$ ในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นตอบคำถามต่อไปนี้

1) พื้นที่ของ $\square ABCD$ เท่ากับเท่าใด

แนวคำตอบ 22 ตารางหน่วย

2) พื้นที่ของ $\triangle ABC$ เท่ากับเท่าใด

แนวคำตอบ 11 ตารางหน่วย

3) ความสัมพันธ์ของ $\square ABCD$ กับ $\triangle ABC$ เป็นอย่างไร

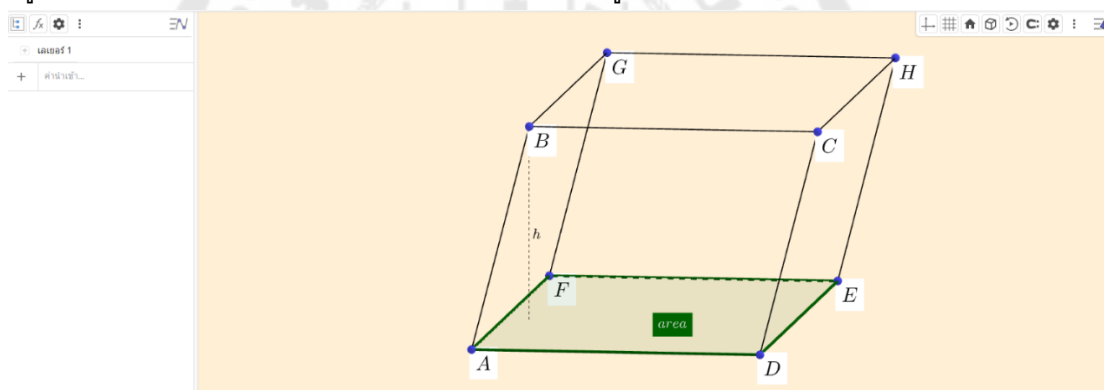
ตอบ พื้นที่ของ $\square ABCD$ เป็นสองเท่าของ $\triangle ABC$

4) ให้นักเรียนเขียนสูตรการหาพื้นที่ $\triangle ABC$ ในรูป $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ตอบ พื้นที่ของ $\triangle ABC = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นสำรวจและตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 ให้นักเรียนเปิดแฟ้มคำสั่ง [12_assignment.ggb](#) ในโปรแกรม GeoGebra หลังจากนั้นบันทึกส่งครูโดยตั้งชื่อ “เลขที่ของนักเรียน_12_assignment.ggb” ข้อมูลในแฟ้มคำสั่งประกอบด้วย



กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH

2.2 ให้นักเรียนใช้เครื่องมือในโปรแกรม GeoGebra สร้างวัตถุ (object) ตามข้อมูลต่อไปนี้

กำหนดให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ และ $\vec{w} = \overrightarrow{AF}$

จากนั้นสร้าง $\vec{v} \times \vec{w}$

ให้ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$

2.3 ให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลจากแฟ้มคำสั่ง จากนั้นเติมคำตอบลงในช่องว่าง

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ADEF เป็นฐานของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH

ให้ area เป็นพื้นที่ฐาน จะได้ว่า $\text{area} = |\vec{v} \times \vec{w}|$

และ h เป็นความสูง จะได้ว่า $h = |\vec{u}| \cos \theta$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH} &= \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= |\vec{v} \times \vec{w}| \times |\vec{u}| \cos \theta \\ &= |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos \theta \\ &= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| \end{aligned}$$

หมายเหตุ

- เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ดังนั้นควรใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ที่ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
- ในการเลือกลำดับของด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่มีผลต่อปริมาตรที่หาได้ กล่าวคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$$

ตอนที่ 3 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ (สามารถใช้โปรแกรม GeoGebra ในการช่วยหาคำตอบได้)

3.1 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\overrightarrow{PS} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

ตอบ 17 ตารางหน่วย

3.2 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(0, 2, 2)$, $B(8, 8, -2)$ และ $C(9, 12, 6)$

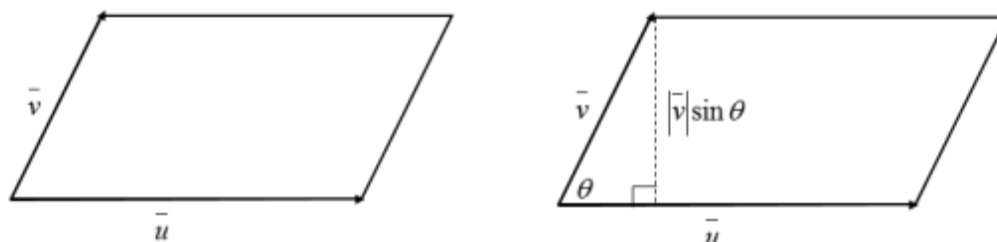
ตอบ 48.47 ตารางหน่วย

3.3 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH โดยที่ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

ตอบ 17 ลูกบาศก์หน่วย

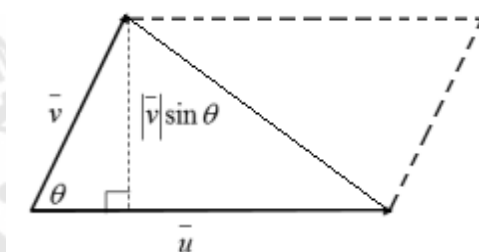
ใบสรุปความรู้ เรื่อง การประยุกต์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

🌀 การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 🌀



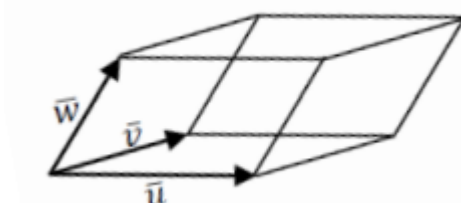
จากสูตร	พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	= ความยาวฐาน $\times$ ความสูง
		$= \vec{u} \vec{v} \sin \theta$
		$= \vec{u} \times \vec{v} $
ดังนั้น	พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	$= \vec{u} \times \vec{v} $

🌀 การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม 🌀



จากภาพ	พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \vec{u} \times \vec{v} $
--------	--

🌀 การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม 🌀



จากภาพ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

หมายเหตุ $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$

ตัวอย่าง 1 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\overrightarrow{PS} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

วิธีทำ จากสูตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}|$

$$\begin{aligned}
 &= \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \right\| \\
 &= |-8\vec{i} - 12\vec{j} + 9\vec{k}| \\
 &= 17 \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(0, 2, 2)$, $B(8, 8, -2)$ และ $C(9, 12, 6)$

วิธีทำ จากสูตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & -4 \\ 9 & 10 & 4 \end{vmatrix} \right\| \\
 &= \frac{1}{2} |64\vec{i} - 68\vec{j} + 26\vec{k}| \\
 &= \frac{1}{2} (18\sqrt{29}) \\
 &= 9\sqrt{29} \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH โดยที่ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

วิธีทำ จากสูตร ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AF})|$

$$\begin{aligned}
 &= \left\| \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right\| \\
 &= |-17| \\
 &= 17 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$



ภาคผนวก ง
แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ
เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้มี 3 ตอน ใช้เวลาในการทำ 100 นาที

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 10 ข้อ

ตอนที่ 3 ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ

คำสั่ง ในการทำข้อสอบให้นักเรียนดำเนินการ ดังนี้

1. ก่อนทำแบบทดสอบให้นักเรียนเขียนชื่อ-สกุล เลขที่ ชั้น/ห้องเรียน ลงในแบบทดสอบให้ชัดเจน
2. สำหรับข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว แล้วทำเครื่องหมาย ☒ ลงในช่อง ☐ ตรงข้อที่เป็นคำตอบในกระดาษคำตอบ
3. สำหรับข้อสอบแบบเติมคำ ให้นักเรียนใส่เครื่องหมาย ☒ หน้าข้อความที่เห็นว่าถูก และใส่ ☒ หน้าข้อความที่เห็นว่าผิด **พร้อมทั้งแก้ไขให้ถูกต้อง**
4. สำหรับข้อสอบแบบอัตนัย ให้นักเรียนแสดงขั้นตอนการหาคำตอบอย่างละเอียด
5. ให้นักเรียนทำข้อสอบให้ครบทุกข้อ โดยสามารถเริ่มทำข้อสอบตอนใดก่อนก็ได้และสามารถเขียนทดในพื้นที่ว่างในข้อสอบ

กระดาษคำตอบ ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก

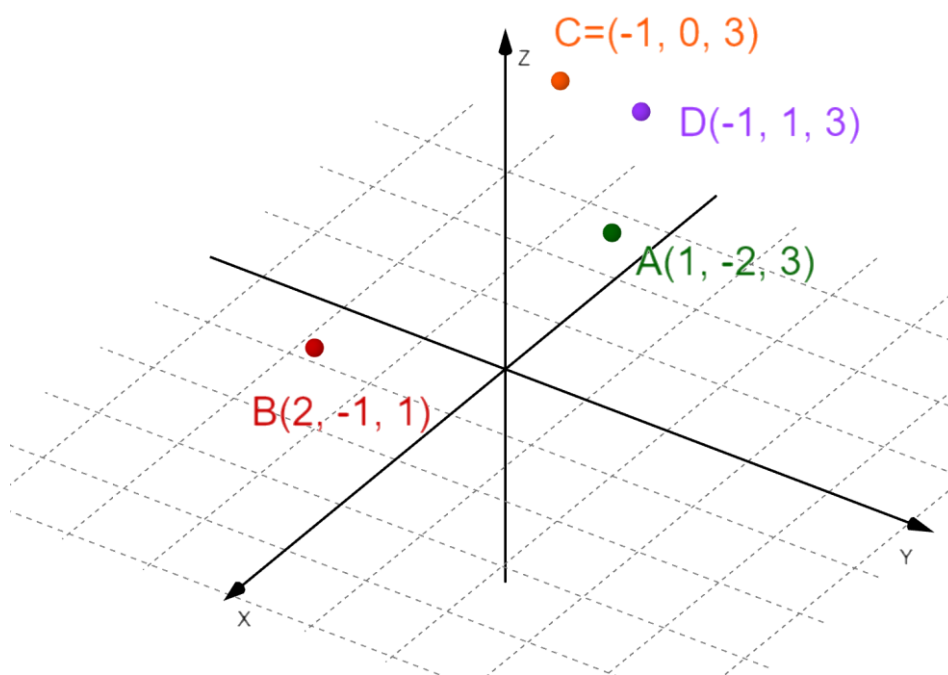
ตัวเลือก ข้อ	ก	ข	ค	ง	ตัวเลือก ข้อ	ก	ข	ค	ง	ตัวเลือก ข้อ	ก	ข	ค	ง
1					5					9				
2					6					10				
3					7					11				
4					8					12				

ชื่อ-สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ

คำสั่ง ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว แล้วทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ☐ ตรงข้อ
ที่เป็นคำตอบในกระดาษคำตอบ

1. จากรูป ข้อใดถูกต้อง



$$\begin{array}{ll} \text{ก. } \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 1 + (-1) \\ (-2) + 1 \\ 3 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} & \text{ข. } \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 2 - (-1) \\ (-1) - 0 \\ 1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \text{ค. } \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ (-2) + (-1) \\ 3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \text{ง. } \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} 1 - (-1) \\ (-2) - 0 \\ 3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. กำหนดให้ $a(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = 6(4\vec{i} + b\vec{j} - c\vec{k})$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $a(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -12\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k}$ ข. $b(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

ค. $c(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -6\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$ ง. $\left(\frac{a}{bc}\right)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

3. เวกเตอร์ในข้อใดมีขนาดมากที่สุด

ก. $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ ค. $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ง. $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. เวกเตอร์ใดไม่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ก. $\frac{1}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{7}\vec{k}$ ข. $\frac{3\sqrt{2}}{10}\vec{i} - \frac{1}{10}\vec{j} + \frac{9}{10}\vec{k}$
 ค. $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j} - \frac{3}{4}\vec{k}$ ง. $\frac{3}{8}\vec{i} - \frac{7}{8}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{8}\vec{k}$

5. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

ข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ และมีทิศเดียวกันกับ $\vec{v}$

ก. $\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v}$ ข. $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\vec{v}$
 ค. $\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{u}$ ง. $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\vec{u}$

6. ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $\begin{bmatrix} -12 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}$ มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$ ขนานกับ $\begin{bmatrix} 9 \\ -18 \\ 3 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix}$ ง. $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ขนานกับ $\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

7. ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดอยู่ที่ $A(1, 2, 3)$, $B(2, 5, -1)$

และ $C(-1, 4, 1)$ แล้วรูปสามเหลี่ยมนี้มีมุมใดเป็นมุมฉาก

ก. มุม A

ข. มุม B

ค. มุม C

ง. ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก

8. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ โดยที่ $|\vec{u} - \vec{v}| = 8$, $|\vec{u}| = 6$ และ $|\vec{v}| = 4$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

ก. -22

ข. -6

ค. 6

ง. 22

9. กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{k}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$

ถ้า $\vec{u} \times \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ แล้วค่าของ $-(a + b + c)$ มีค่าเท่าใด

ก. -31

ข. -1

ค. 1

ง. 31

10. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ข้อใดไม่ใช่วิธีการตรวจสอบว่า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$

ก. มี $c \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\vec{u} = c\vec{v}$

ข. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$

ค. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

ง. $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$

11. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

เมื่อกำหนด $A(0, 5, 5)$, $B(-3, -2, 1)$,

$C(-7, -5, 3)$ และ $D(-4, 2, 7)$

ก. 26 ตารางหน่วย

ข. 39 ตารางหน่วย

ค. 52 ตารางหน่วย

ง. 65 ตารางหน่วย

12. ให้ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเกิดจากเวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

ถ้า $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้

ก. 10 ลูกบาศก์หน่วย

ข. 20 ลูกบาศก์หน่วย

ค. 30 ลูกบาศก์หน่วย

ง. 40 ลูกบาศก์หน่วย

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 10 ข้อ

คำสั่ง ให้นักเรียนใส่เครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เห็นว่าถูก และใส่ X หน้าข้อความที่เห็นว่าผิด พร้อมทั้งแก้ไขให้ถูกต้อง

“กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย มาตรฐาน และ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใด ๆ”

_____ 1) $\overline{AB}$ เป็นสัญลักษณ์แทน เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B

แก้ไขเป็น _____

_____ 2) $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีขนาดเท่ากัน มีทิศทางเดียวกัน หรือ ทิศทางตรงกันข้าม

แก้ไขเป็น _____

_____ 3) กำหนดให้ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

แก้ไขเป็น _____

_____ 4) ถ้า $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ แล้ว $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d$, $b = e$ และ $c = f$

แก้ไขเป็น _____

_____ 5) $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ เมื่อ $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

แก้ไขเป็น _____

_____ 6) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{k}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} = \vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i}$

แก้ไขเป็น _____

_____ 7) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

แก้ไขเป็น _____

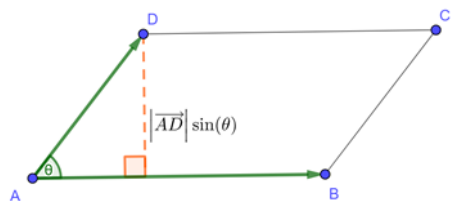
_____ 8) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$

แก้ไขเป็น _____

_____ 9) $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ คือ ขนาดของผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v} \times \vec{w}$

แก้ไขเป็น _____

_____ 10)



จากภาพพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสามารถหาได้จาก $|\vec{AB} \times \vec{AD}| \sin \theta$

แก้ไขเป็น _____

ตอนที่ 3 ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงขั้นตอนการหาคำตอบอย่างละเอียด

1. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

จงหาเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u} - 3\vec{v}$ และมีขนาด 4 หน่วย

วิธีทำ



2. กำหนด $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j} + b\vec{k}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ แล้ว $2a+b$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ



คะแนนที่ได้ _____ / _____

3. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

วิธีทำ



คะแนนที่ได้ _____ / _____

ตาราง 10 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของข้อสอบในแบบทดสอบวัด
ความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ						
ข้อที่	ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก		ข้อสอบแบบเติมคำ		ข้อสอบแบบอัตนัย	
	ck	pk	ck	pk	ck	pk
1	✓		✓			✓
2		✓	✓			✓
3	✓		✓			✓
4	✓		✓			✓
5	✓		✓			
6		✓	✓			
7		✓	✓			
8	✓		✓			
9		✓	✓			
10	✓		✓			
11		✓				
12		✓				

หมายเหตุ: ck หมายถึง ความรู้เชิงมโนทัศน์ (Conceptual Knowledge)

pk หมายถึง ความรู้เชิงกระบวนการ (Procedural Knowledge)



ภาคผนวก จ

รายนามผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือวิจัย

รายนามผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือวิจัย

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งได้แก่ 1) แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 12 แผน 2) แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ มีทั้งหมด 3 ท่าน ดังนี้

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ขวัญ เพียซ้าย
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. อาจารย์ ดร.ธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. ครูวรรณิดา ธนสินปิติกษ์
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนหอวัง

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	เกียรติศักดิ์ แสงทอง
วัน เดือน ปี เกิด	11 กันยายน 2538
สถานที่เกิด	ราชบุรี
วุฒิการศึกษา	พ.ศ. 2557 มัธยมศึกษาตอนปลาย จาก โรงเรียนหัวหิน พ.ศ. 2561 วิทยาศาสตรบัณฑิต (วท.บ.) เกียรตินิยมอันดับ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ พ.ศ. 2565 การศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ที่อยู่ปัจจุบัน	ช.หัวหิน 6 (หมู่บ้านบ่อฝ้าย) ถ.เพชรเกษม ต.หัวหิน อ.หัวหิน จ.ประจวบคีรีขันธ์ 77110