การศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

A STUDY OF JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS' PROOF COMPREHENSION IN GEOMETRY

จักรพงษ์ ตรียุทธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2567

การศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

จักรพงษ์ ตรียุทธ์

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
การศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ปีการศึกษา 2567

A STUDY OF JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS' PROOF COMPREHENSION

IN GEOMETRY

JAKKAPONG TRIYUT

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of DOCTOR OF EDUCATION

(Mathematics)

Faculty of Science, Srinakharinwirot University

2024

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ของ

จักรพงษ์ ตรียุทธ์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

....

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

....

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

.... ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสาและ)

.... ที่ปรึกษาร่วม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพียซ้าย)

.... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์รัศมิ์ เฟื่องฟู)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชิรา ลำดวนหอม)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์)

ชื่อเรื่อง	การศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
ผู้วิจัย	จักรพงษ์ ตรียุทธ์
ปริญญา	การศึกษาดุษฎีบัณฑิต
ปีการศึกษา	2567
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสาและ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ขวัญ เพียซ้าย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษา (1) ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และ (2) กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ ซึ่งเป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ โดยใช้กรอบแนวคิดจากรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang และ Lin (2008) ซึ่งประกอบด้วย ด้านความรู้พื้นฐาน ด้านสถานะเชิงตรรกะ ด้านการให้ข้อสรุป ด้านความทั่วไป และด้านการประยุกต์ นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 6 คน ซึ่งเคยเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในชั้นเรียน เก็บรวบรวมข้อมูลโดยการให้นักเรียนอ่านบทพิสูจน์ ตอบคำถาม และการสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน วิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา และวิเคราะห์บทสัมภาษณ์ ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนมีความเข้าใจในแต่ละด้านแตกต่างกัน โดยนักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจความหมายคำศัพท์ สัญลักษณ์ รูปที่ประกอบการพิสูจน์ และข้อความพิสูจน์ สามารถระบุสถานะของข้อความได้ ระบุสมบัติที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ และระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความในบทพิสูจน์ ซึ่งมีนักเรียนเพียงบางส่วนที่สามารถระบุข้อตั้งเงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของการพิสูจน์ และแนวคิดหลักของบทพิสูจน์ได้ นักเรียนบางส่วนพิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์เพื่อตัดสินความถูกต้องของการพิสูจน์ แต่ส่วนใหญ่ยังมีปัญหาในการประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านไปพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนมากขึ้น (2) กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ได้แก่ การระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ การกำหนดสัญลักษณ์บนรูปที่ประกอบการพิสูจน์ การย้อนดูรูปเพื่อเพิ่มความเข้าใจ การพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ และการพยายามสร้างบทพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังอ่านบทพิสูจน์

คำสำคัญ : ความเข้าใจการพิสูจน์, กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจ, การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

Title	A STUDY OF JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS' PROOF COMPREHENSION IN GEOMETRY
Author	JAKKAPONG TRIYUT
Degree	DOCTOR OF EDUCATION
Academic Year	2024
Thesis Advisor	Assistant Professor Dr. Sukanya Hajisalah
Co Advisor	Assistant Professor Dr. Khawn Piasai

This study set out to investigate (1) the nature of junior high school students' proof comprehension in geometry and (2) the reading comprehension strategies. The qualitative inquiry was grounded in Yang and Lin's (2008) model of reading comprehension in geometry proofs, comprising five dimensions: foundational knowledge, logical status, summary, generality, and application. The participants consisted of six Grade 9 students who had previously been introduced to geometric proofs. Data were collected through reading proofs, written responses, and task-based interviews. Using a content analysis approach. Findings indicated that (1) students exhibited varying degrees of comprehension across the five components. Most were able to understand the meaning of terms, symbols, figures, and statements. They can identify the logical status, applied properties, and logical relationships among the statements in the proof. Nevertheless, some students can identify the premises, the necessary conditions for deriving conclusions, and the main idea of the proof. Some students consider the plausibility of the proof's details to judge its validity. However, most still struggle to apply the concepts from reading to prove more complex proofs. (2) Reading comprehension strategies include identifying given and what is to be proved, identifying symbols on figures, referring back to figures to enhance understanding, considering the validity of the proof, and attempting to recompose an alternative proof after reading.

Keyword : proof comprehension, reading comprehension strategies, geometry proof

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับสำเร็จได้ด้วยความเมตตากรุณา เอาใจใส่อย่างดียิ่งของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสาและ อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์หลัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ขวัญ เพียซ้าย อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ร่วม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เอนก จันทรจรูญ และ ดร.สุกัญญา สุขศักดิ์ ที่ช่วยให้คำแนะนำตั้งแต่หัวข้อการวิจัย การดำเนินการวิจัย ตลอดจนปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง ผู้วิจัยขอขอบพระคุณมาไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. พงศ์รัศมิ์ เฟื่องฟู อาจารย์ ดร. รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชิรา ลำดวนหอม ที่ร่วมเป็นคณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะตลอดจนกำหนดแนวทางแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ทุกท่านที่ให้ความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ และคณิตศาสตรศึกษา เพื่อนำมาปรับใช้การทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบพระคุณแม่ พี่สาว ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนตลอดจนจบการศึกษา และขอบคุณครูฟางที่คอยช่วยเหลือจนปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

จักรพงษ์ ตรียุทธ์

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญรูปภาพ

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

การพิสูจน์ไม่ได้เป็นเพียงการทำความเข้าใจมโนทัศน์ และกระบวนการคิดเท่านั้น แต่ยังตระหนักถึงแนวคิดของบทนิยาม และกระบวนการคิดทำงานอย่างไรและทำไม การพิสูจน์ไม่เพียงสำคัญต่อการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แต่ยังรวมถึงการปฏิบัติ และการทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ การพิสูจน์มีความจำเป็นต่อการสร้าง พัฒนาความรู้ และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (Inam, Ugurel, & Boz Yaman, 2018, pp. 339-340) ซึ่งหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานได้สอดแทรกการพิสูจน์ให้นักเรียนเริ่มเรียนการพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเรขาคณิต เพื่อให้นักเรียนมีความรู้พื้นฐานในการพิสูจน์ในระดับที่สูงขึ้น หรือเรียนหลักสูตรเฉพาะทางที่มีการพิสูจน์เข้ามาเกี่ยวข้อง ทำให้เข้าใจในเนื้อหาได้อย่างลึกซึ้ง ตั้งแต่การอ่านบทนิยามตลอดจนการพิสูจน์ทฤษฎีบท และยังช่วยให้นักเรียนสามารถทำความเข้าใจในหลักการทางคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาสูงขึ้นได้ไม่ยาก

การเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในโรงเรียนระดับมัธยมศึกษา โดยทั่วไปข้อสรุปในทฤษฎีบทได้มาจากการสันนิษฐานว่าสมมติฐานเป็นจริง และการเรียนพิสูจน์เป็นแบบประโยคเงื่อนไข “ถ้า p แล้ว q” โดยทั่วไปยอมรับเงื่อนไขใน p และอนุมานว่า q ก็เป็นเช่นนั้น (Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012, p. 9) และในขณะเดียวกันวิธีการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ทั่วไปมักจะตั้งคำถามว่า “จงพิสูจน์ทฤษฎีบท” หรือ “จงบอกและพิสูจน์ทฤษฎีบท” หรือให้นักเรียนพิสูจน์ผลลัพธ์ที่ซับซ้อน (Conradie & Frith, 2000, p. 225; Inam et al., 2018, pp. 340-341) โดยการให้ทำซ้ำหรือแก้ไขเล็กน้อยเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกัน การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ในลักษณะนี้นักเรียนมีแนวโน้มที่จะพัฒนาความเข้าใจการพิสูจน์เพียงผิวเผินโดยเน้นรูปแบบมากกว่าการทำความเข้าใจ (Mejia-Ramos et al., 2012, p. 9)

การพิสูจน์ข้อความซ้ำได้อย่างสมบูรณ์แบบอาจบ่งชี้ได้แค่ความสามารถในการจดจำของนักเรียน ซึ่งนักเรียนไม่ได้เข้าใจสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่ การประเมินเช่นนี้ทำให้การอ่านการพิสูจน์ไม่ได้รับการประเมินในวิธีที่มีความหมายส่วนหนึ่งเป็นเพราะขาดการประเมินที่ถูกต้องในการวัดความเข้าใจ (Mejia-Ramos, Lew, de la Torre, & Weber, 2017, p. 131) การอ่านเป็นสิ่งสำคัญในการได้รับความเข้าใจจากการฝึกฝน (Shepherd & van de Sande, 2014) ความสามารถในการอ่านและทำความเข้าใจการพิสูจน์เป็นทักษะที่นักเรียนควรพัฒนา (Yang & Lin, 2008) การ

อ่านเป็นองค์ประกอบสำคัญในการเรียนการสอน และการอ่านเพื่อความเข้าใจจึงจำเป็นต่อการเรียนรู้ที่ประสบความสำเร็จ (Davies, Alcock, & Jones, 2020, p. 181; Shepherd & van de Sande, 2014, pp. 75-80)

การให้นักเรียนได้ฝึกการอ่านซึ่งเป็นทักษะการคาดการณ์ แทบจะไม่ปรากฏการสอนลักษณะดังกล่าวในการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ การเน้นการอ่านและทำความเข้าใจการพิสูจน์ช่วยให้นักเรียนมีแนวคิดที่แม่นยำในการพิสูจน์ (Conradie & Frith, 2000, pp. 233-234) การอ่านไม่ได้เป็นเพียงการจำคำหรือระลึกความหมายได้ แต่ยังเป็นกระบวนการสร้างความเข้าใจระหว่างผู้อ่านกับสื่อและเนื้อหา (Conradie & Frith, 2000, p. 225; Inam et al., 2018, p. 341) ซึ่งแน่นอนว่าการสร้างพิสูจน์ขึ้นใหม่ด้วยตัวเอง ยากกว่าการทำความเข้าใจการพิสูจน์ที่เสร็จแล้วของใครคนหนึ่ง (Selden & Selden, 2015) ดังนั้นการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียนจากการอ่านบทพิสูจน์เป็นทางเลือกหนึ่งในการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์แทนการให้นักเรียนพิสูจน์ทฤษฎีบทซ้ำ หรือการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ใกล้เคียงกับตัวอย่าง แม้ว่าการประเมินการพิสูจน์ในลักษณะที่ให้นักเรียนอ่านบทพิสูจน์แล้วตอบคำถามที่กำหนดให้นั้นครูจะใช้เวลาในการตรวจมากขึ้น ในขณะเดียวกันจะทำให้นักเรียนเห็นภาพรวมของการพิสูจน์ พยายามทำความเข้าใจการพิสูจน์แทนการท่องจำ และอาจนำไปสู่การขยายขอบเขตกลยุทธ์ในการพิสูจน์ของนักเรียน อีกทั้งนักเรียนจะประหยัดเวลาในการเตรียมตัวแต่ควรหลีกเลี่ยงการบอกนักเรียนล่วงหน้าว่ามีการเตรียมบทพิสูจน์ไว้ให้เพราะนักเรียนอาจคิดว่าไม่จำเป็นต้องเตรียมตัวก่อนสอบ

ดังนั้น การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการอ่านจึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจในการศึกษา ร่วมกับประสบการณ์ของผู้วิจัยที่เป็นครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นพบว่าการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นการเรียนแบบแบ่งเนื้อเรียนทีละบท ไม่ได้เรียนต่อเนื่องในครั้งเดียวจนจบ โดยเริ่มเรียนเรขาคณิตในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องการสร้างทางเรขาคณิต และเริ่มเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องความเท่ากันทุกประการ เนื้อหาการเรียนการสอนส่วนใหญ่เน้นการคำนวณหาค่า ไม่ได้เน้นการพิสูจน์ การเขียนการพิสูจน์ที่ปรากฏในหนังสือเรียนมีแบบเดียวเท่านั้น คือ แบบสองคอลัมน์ และคำถามที่พบส่วนใหญ่ให้นักเรียนเขียนแสดงการพิสูจน์ที่อยู่ในรูปแบบ “ถ้า p แล้ว q” โดยมีลักษณะใกล้เคียงกับตัวอย่าง ไม่ปรากฏการให้นักเรียนอ่านการพิสูจน์และตอบคำถามในหนังสือเรียนมาก่อน จึงนำไปสู่การศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และกลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

คำถามการวิจัย

1. ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร

2. กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

2. เพื่อศึกษากลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อทราบธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งสามารถใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานในการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตให้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น และสามารถขยายขอบเขตของการศึกษาวิจัยจากเรขาคณิตไปสู่การพิสูจน์สาขาอื่น สามารถใช้เป็นข้อมูลประกอบการปรับปรุงหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์สาระการวัดและเรขาคณิต หรือปรับปรุงหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเพื่อเพิ่มเนื้อหาเกี่ยวกับการอ่านการพิสูจน์ อีกทั้งผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องทางการศึกษาสามารถใช้ข้อมูลเกี่ยวกลยุทธ์ที่ใช้ในการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์เป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและระดับที่สูงขึ้น และยังเป็นอีกรูปแบบทางเลือกหนึ่งในการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ขอบเขตของการวิจัย

นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัย (participants)

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมศึกษาของรัฐแห่งหนึ่งในสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 จำนวน 6 คน ซึ่งได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง (purposive sampling)

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

การพิสูจน์ที่กำหนดให้นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยอ่านอยู่ภายใต้บริบทเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เรื่อง เส้นขนาน ในสาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษา

ระยะเวลาในการวิจัยครั้งนี้ คือ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567

โดยกำหนดให้นักเรียนอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ จำนวน 1 การพิสูจน์ ตอบคำถามและสัมภาษณ์ ซึ่งดำเนินการเป็นรายบุคคล ใช้เวลาประมาณ 60 นาทีต่อคน และเก็บรวบรวมข้อมูลในช่วงเวลาหลังเลิกเรียน หรือวันเสาร์

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีในการสร้างและวิเคราะห์ งาน : ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต อยู่บนพื้นฐานรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang and Lin (2008) โดยแบ่งออกเป็น 5 ด้าน ได้แก่

1) ด้านความรู้พื้นฐาน เป็นการวัดความเข้าใจเกี่ยวกับคำศัพท์ ข้อความ สัญลักษณ์ และรูปภาพที่แนบประกอบการพิสูจน์ สามารถตระหนักถึงความหมายของสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนภาพ และสามารถอธิบายและตระหนักถึงความหมายสมบัติของคำศัพท์ที่ใช้ในการพิสูจน์ได้

2) ด้านสถานะเชิงตรรกะ สามารถวัดความเข้าใจจากการที่นักเรียนสามารถระบุได้ว่าข้อความพิสูจน์ส่วนใหญ่มีสถานะเป็นข้อตั้ง (premise) ข้อสรุป (conclusion) หรือสมบัติที่ใช้ (applied properties) ตระหนักถึงเงื่อนไขที่สามารถนำมาใช้ได้โดยตรงโดยไม่ต้องอธิบายเพิ่มเติม ตัดสินความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุป และสามารถบอกได้ว่าการพิสูจน์ที่กำหนดให้ต้องใช้สมบัติข้อใดบ้าง

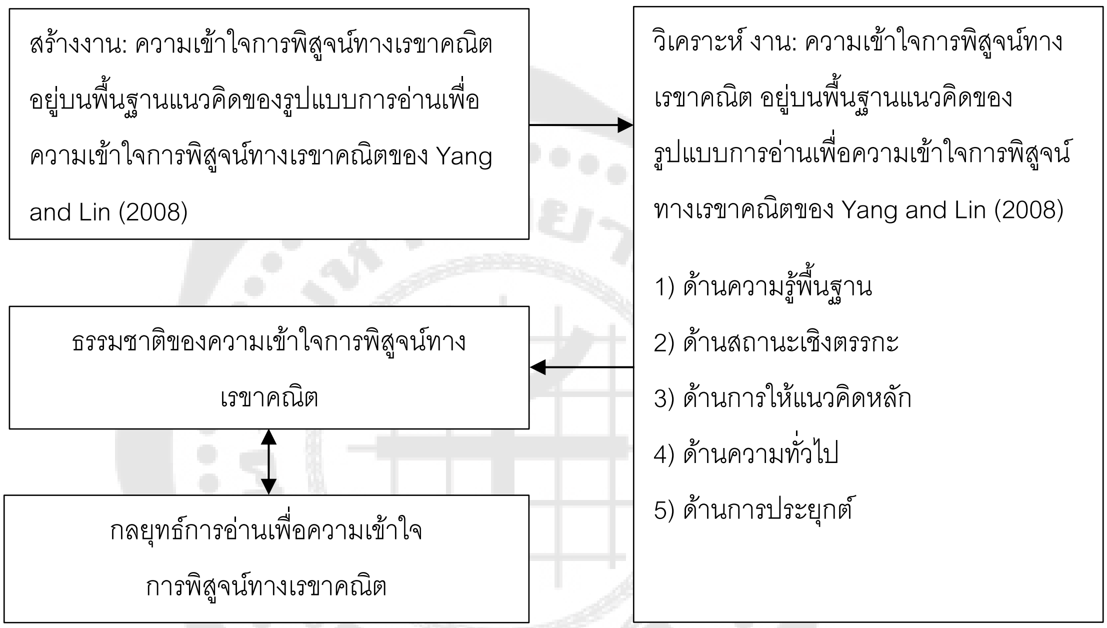
3) ด้านการให้แนวคิดหลัก สามารถวัดได้จากการระบุข้อตั้ง ข้อสรุป หรือกระบวนการที่สำคัญ และให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้

4) ด้านความทั่วไป สามารถวัดได้จากการพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ และสามารถใช้การพิสูจน์ตรวจสอบข้อความ หรือกระบวนการพิสูจน์ในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

5) ด้านการประยุกต์ สามารถวัดได้จากการที่นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้หรือวิธีการจากการพิสูจน์ที่กำหนดให้ไปสู่สถานการณ์หรือข้อความพิสูจน์อื่นได้

2. กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นการกระทำที่นักเรียนทำขณะอ่านโดยมีเป้าหมายเพื่อวางแผน ติดตามข้อความ และพยายามในการถอดรหัสข้อความ ทำความเข้าใจ และสร้างความหมายของข้อความพิสูจน์

กรอบแนวคิดการวิจัย



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดการวิจัย

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เป้าหมายของการศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเรขาคณิตเพื่อตอบคำถามการวิจัยต่อไปนี้ 1) ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร และ 2) กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร

บทนี้นำเสนอภาพรวมของการวิจัย เกี่ยวกับหัวข้อต่อไปนี้เพื่อเป็นพื้นฐานและเหตุผลในการศึกษา ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกนำเสนอเกี่ยวกับการพิสูจน์ โดยในส่วนนี้เน้นไปที่การเรียนการสอนการพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ปัจจุบันการเรียนการสอนการพิสูจน์เน้นการเขียนการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ ยังไม่มีการสอดแทรกเนื้อหาเกี่ยวกับการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์หรือความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในหลักสูตร หรือหนังสือเรียน และส่วนถัดมาเป็นการทบทวนเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ (Mejia-Ramos et al., 2012; Yang & Lin, 2008) และแนวคิดเกี่ยวกับการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์

1. การพิสูจน์

การพิสูจน์เป็นส่วนสำคัญของคณิตศาสตร์ มีบทบาทสำคัญในการฝึกฝนทางคณิตศาสตร์ และควรจัดเป็นเนื้อหาที่สำคัญในการเรียนตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (Komatsu, 2017, p. 129) การพิสูจน์ไม่ควรถูกใช้เพียงเพื่อโน้มน้าวนักเรียนให้เชื่อว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริง แต่ควรใช้เป็นเครื่องมือในการให้คำอธิบายข้อความเหล่านั้น และอำนวยความสะดวกในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมความเข้าใจในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน (Mejia-Ramos et al., 2017)

1.1 ความหมายของการพิสูจน์

ชอนฟิลด์ (Schoenfeld) กล่าวว่า “ถ้าการแก้ปัญหาเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ การพิสูจน์ก็เป็นดังจิตวิญญาณ” (Stylianides, 2016, p. 7) เพราะการพิสูจน์เป็นเครื่องมือการค้นพบ วิธีแสดงความจริงทางคณิตศาสตร์ หรือยุทธวิธีที่นักคณิตศาสตร์ใช้แสดงวิธีแก้ปัญหาอย่างแท้จริง และการพิสูจน์ยังเป็นการแสดงผลลัพธ์อย่างเป็นทางการที่มีลำดับขั้นตอนในการอ้างเหตุผลเพื่อยืนยันว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริงโดยการยอมรับสัจพจน์ (de Villiers, 2020;

Hanna, 2000, p. 7; Hanna & Jahnke, 1996, p. 892; Rocha, 2019, p. 2) การพิสูจน์เป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่มีอิทธิพลต่อการยอมรับโดยบุคคลที่เข้าใจแนวคิดที่เกี่ยวข้อง (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, & Winicki-Landman, 2012, p. 216) ซึ่งนักคณิตศาสตร์ยอมรับข้อเท็จจริงของการยืนยันข้อความทางคณิตศาสตร์ผ่านการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่สมเหตุสมผล การพิสูจน์เป็นการอธิบายข้อความทางคณิตศาสตร์โดยละเอียดอย่างมีเหตุผลจากข้อความที่ยอมรับแล้วว่าเป็นจริง เช่น ทฤษฎีบท บทกลับ บทแทรก เป็นต้น อนึ่งการพิสูจน์เป็นหนึ่งในวิธีที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจความหมายของทฤษฎีบทที่กำลังพิสูจน์ ไม่ได้เป็นเพียงกระบวนการตรวจสอบว่าเป็นจริง แต่เป็นการพิจารณาข้อความว่าทำไมเป็นจริง (Hanna, 2000, p. 8) ดังนั้นในการพิสูจน์ต้องทำความเข้าใจการพิสูจน์ และโครงสร้างของการพิสูจน์ เนื่องจากโครงสร้างของการพิสูจน์เป็นองค์ประกอบสำคัญในการพิสูจน์ (McCrone & Martin, 2009, p. 208)

การศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ตามสไตลิอาไนด์ส (Stylianides, 2007) ว่าการพิสูจน์เป็น "การอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่มีลำดับขั้นตอนในการยืนยันการอ้างทางคณิตศาสตร์" ซึ่งมีลักษณะดังต่อไปนี้:

1. ใช้ข้อความที่ได้รับการยอมรับจากชุมชนห้องเรียน (กลุ่มของข้อความที่ได้รับการยอมรับ) ว่าเป็นจริง และพร้อมใช้งานโดยไม่ต้องให้เหตุผลเพิ่มเติม

2. ใช้รูปแบบของการให้เหตุผล (รูปแบบการอ้างเหตุผล) ที่ถูกต้องและเป็นที่รู้จักหรือร่วมกับแนวคิดของชุมชนห้องเรียน

3. เป็นการสื่อสารของรูปแบบการแสดง (รูปแบบการนำเสนอการอ้างเหตุผล) ที่มีความเหมาะสมและเป็นที่รู้จัก หรือร่วมกับแนวคิดของชุมชนห้องเรียน (p. 219)

1.2 บทบาทของการพิสูจน์

ในอดีตการพิสูจน์เป็นเพียงวาทศิลป์ที่ใช้โน้มน้าวบุคคลใดบุคคลหนึ่งว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริง นักคณิตศาสตร์ทำการพิสูจน์เพราะเชื่อว่าเป็นการโน้มน้าวด้วยข้อเท็จจริงและความสมเหตุสมผลของการยืนยันข้อความทางคณิตศาสตร์ หน้าที่หลักของการพิสูจน์มีเพียงเพื่อยืนยันเหตุผลและตรรกะที่เชื่อว่าเป็นจริง (Rocha, 2019, p. 6; Zaslavsky et al., 2012, p. 217) และสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาการพิสูจน์เป็นเพียงการบ้านวิชาเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสามารถพิเศษ และไม่ค่อยปรากฏในวิชาคณิตศาสตร์ระดับ

มัธยมศึกษาตอนปลายทั่วไป แทบจะไม่ปรากฏในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (Stylianou, Blanton, & Knuth, 2009, p. 147)

ปัจจุบันบทบาทของการพิสูจน์เปลี่ยนแปลงไปอย่างสิ้นเชิง การพิสูจน์มีบทบาทสำคัญมากในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน และมีความสำคัญมากขึ้นในระดับมหาวิทยาลัยโดยเฉพาะหลักสูตรที่เน้นการพิสูจน์ขั้นสูงระดับปริญญาตรี (Mejia-Ramos et al., 2017, p. 130) การสอนการพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษาช่วยส่งเสริมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และมีส่วนช่วยอย่างมากในการเรียนการสอนที่ครูสามารถใช้การพิสูจน์สื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Hanna, 2000, pp. 5-7) และอีกบทบาทหนึ่งของการพิสูจน์ คือ การอธิบายพื้นฐานที่ใช้ในการอธิบายข้อความทางคณิตศาสตร์ว่าสมมติฐานที่กำหนดให้เป็นจริง (Zaslavsky et al., 2012, p. 216) และนักเรียนควรมองว่า "ทำไม" จึงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ (Rocha, 2019, p. 7; Smith, 2006, p. 75)

บทบาทของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนได้รับความสนใจเพิ่มมากขึ้นจากชุมชนคณิตศาสตรศึกษาและนักคณิตศาสตรศึกษาอีกหลายคนที่สนับสนุนว่า การพิสูจน์ควรเป็นส่วนสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนทุกระดับชั้น (Knuth, Choppin, & Bieda, 2009, p. 153; National Council of Teachers of Mathematics, 2000) การส่งเสริมบทบาทของการพิสูจน์ในห้องเรียนต้องใช้ความพยายามเป็นอย่างมาก บทบาทของครูคณิตศาสตร์คือดูแลให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการพิสูจน์ ในทางตรงกันข้ามถ้านักเรียนไม่มีส่วนร่วมในการสร้างความรู้จากการพิสูจน์ การพิสูจน์คงจะไร้ความหมายและไร้จุดมุ่งหมายในการเรียนพิสูจน์ในสายตานักเรียน (Mariotti, 2006)

นอกจากการพิสูจน์มีบทบาทในการอธิบายความจริงของข้อความทางคณิตศาสตร์ และช่วยส่งเสริมความเข้าใจการเรียนคณิตศาสตร์แล้ว หน้าที่ของการพิสูจน์ยังมีประโยชน์ (Hanna, 2000) ดังนี้

1) การทวนสอบ (เกี่ยวกับความจริงของข้อความ)

2) การอธิบาย (ให้ข้อมูลเชิงลึกว่าทำไมข้อความเป็นจริง)

3) การจัดระบบ (การจัดระบบของผลลัพธ์ที่หลากหลายในการอนุมานตามระบบเชิงสัจพจน์ แนวคิดหลัก และทฤษฎี)

4) การค้นพบ (การค้นพบหรือสร้างผลลัพธ์ขึ้นใหม่)

5) การสื่อสาร (การถ่ายทอดความรู้ทางคณิตศาสตร์)

6) การสร้างทฤษฎีเชิงประจักษ์

7) การสำรวจความหมายของบทนิยาม หรือผลที่ตามมาของสมมติฐาน

8) การรวมกันของข้อเท็จจริงนำไปสู่แนวคิดใหม่และมุมมองทัศนะใหม่ (pp. 7-9)

1.3 การเรียนการสอนการพิสูจน์

"จำเป็นต้องมีการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนหรือไม่?
แน่นอน ฉันจำเป็นต้องพูดอะไรอีก? แน่นอน"

Alan Schoenfeld

ที่มา: (Heinze & Reiss, 2009, p. 191)

การสอนการพิสูจน์เป็นการช่วยอธิบายจุดกำเนิดความรู้ และการเชื่อมโยงของความรู้ทางคณิตศาสตร์ ถ้าการพิสูจน์มีจุดประสงค์เพียงเพื่อแสดงความสมเหตุสมผล ไม่มีความจำเป็นต้องใช้วิธีพิสูจน์ที่หลากหลาย มุมมองของการพิสูจน์หลากหลายวิธีควบคู่กับการพึ่งพาตัวอย่างเป็นโครงข่ายของการเชื่อมโยง และความเข้าใจที่ลึกซึ้งของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Zaslavsky et al., 2012, p. 217) เหตุผลที่สำคัญที่สุดในการเติบโตของความเข้าใจ คือ การพิสูจน์ที่เป็นพื้นฐานในการเรียนและรู้คณิตศาสตร์ซึ่งเป็นพื้นฐานของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และสิ่งสำคัญในการพัฒนา แสดง และสื่อสารความรู้คณิตศาสตร์ (Stylianides, 2007, p. 289) นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์ยังสร้างบทพิสูจน์ทฤษฎีบทที่หลากหลาย เพื่อแสดงให้เห็นถึงพลังที่แตกต่างกันของวิธีการ หรือค้นพบเทคนิคใหม่ (Hanna, 2000) อีกเหตุผลหนึ่งในการสอนพิสูจน์ คือ "ศักยภาพในการสอนวิธีการแก้ปัญหา" (Zaslavsky et al., 2012, p. 217)

ศักยภาพของการพิสูจน์ในการเรียนการสอน คือ การสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Hanna & Jahnke, 1996, p. 878) ซึ่งนำไปสู่การสอนการพิสูจน์เพื่อสนับสนุนความเข้าใจในการพิสูจน์ของนักเรียนจากการฝึกฝนทางคณิตศาสตร์ นักวิจัยหลายคนและกรอบแนวคิดหลักสูตรได้เสนอให้การพิสูจน์เป็นประสบการณ์ที่สำคัญของคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนในทุกเนื้อหาและทุกระดับชั้น (Stylianides, 2007, p. 289) ซึ่งสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติ (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) กล่าวว่า "การให้เหตุผลและการพิสูจน์ไม่ใช่กิจกรรมพิเศษที่สงวนไว้เฉพาะช่วงเวลาพิเศษหรือหัวข้อพิเศษในหลักสูตร แต่ควรเป็นเรื่องที่สอนตามปกติ และมีความต่อเนื่องในทุกระดับชั้น ไม่ว่าจะศึกษาหัวข้อใดก็ตาม" (p. 56)

ประสบการณ์การพิสูจน์ของนักเรียนควรเกิดขึ้นเป็นประจำและต่อเนื่อง โดยสร้างจากประสบการณ์การพิสูจน์ในระดับประถมศึกษาของนักเรียน (Zaslavsky et al., 2012) และควรให้การพิสูจน์เป็นเนื้อหาที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์อย่างน้อยระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อเพิ่มพูนและขยายขอบเขตความเข้าใจในการพิสูจน์ของนักเรียน ให้เป็นมาตรฐานในการยอมรับคำอธิบายที่มีความชัดเจนมากขึ้น และวิธีการให้เหตุผลและการพิสูจน์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น (Komatsu, 2017, p. 129) หากครูหวังว่าจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจกฎที่ใช้ร่วมกันของการมีส่วนร่วมทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาการอ้างเหตุผลที่ถูกต้อง ควรพิจารณาแนวทางในการช่วยเหลือนักเรียนในทุกระดับชั้น เพื่อแยกแยะระหว่างวัฒนธรรมคณิตศาสตร์กับวัฒนธรรมในชีวิตประจำวัน และสำรวจความคาดหวังที่แตกต่างกันของนักเรียนด้วย (McCrone & Martin, 2009)

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่นักเรียนไม่ได้มีส่วนร่วมในค้นหาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สนใจ ส่งผลให้นักเรียนมองว่าการเรียนการพิสูจน์เป็นเรื่องยาก (Ellis, Bieda, & Knuth, 2016) นักเรียนบางคนยังคงยึดติดว่าการอ้างเหตุผลเชิงประจักษ์เป็นการพิสูจน์ (Knuth et al., 2009; McCrone & Martin, 2009; Stylianou et al., 2009; Zaslavsky et al., 2012) ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าครูต้องใช้ความพยายามอย่างมากในเสริมสร้างประสบการณ์ของนักเรียนด้วยการทำความเข้าใจการพิสูจน์ ในการปฏิรูปหลักสูตรจึงมีหลักสูตรจำนวนมากที่ออกแบบมาเพื่อส่งเสริมพัฒนาการการให้เหตุผลและความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน (Knuth et al., 2009, p. 153)

อย่างไรก็ตามประสบการณ์การพิสูจน์ที่นักเรียนเผชิญในโรงเรียนมักจะถูกนำเสนอแบบเบ็ดเสร็จ เพื่อสอนเกี่ยวกับกระบวนการคิดเชิงตรรกะ การสื่อสาร และบางครั้งอาจเป็นการแก้ปัญหาตามตัวอย่าง (Hanna, 2000; Zaslavsky et al., 2012) นักเรียนมองว่าการพิสูจน์เป็นเพียงแบบฝึกหัดที่ยืนยันข้อสรุปของการพิสูจน์ นักการศึกษาหลายคนได้กล่าวถึงจุดประสงค์ของการพิสูจน์ในบริบทของการอธิบายวิธีกระตุ้นให้นักเรียนอยากเรียนรู้การพิสูจน์ (McCrone & Martin, 2009, p. 213) ดังนั้นการส่งเสริมบทบาทของการพิสูจน์ในห้องเรียนนั้นเป็นสิ่งจำเป็น

ความจำเป็นในการสอนพิสูจน์เป็นไปตามความคาดหวังเกี่ยวกับประสบการณ์ในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ของนักเรียน ที่ต้องการให้นักเรียนมีประสบการณ์ที่คล้ายคลึงกับนักคณิตศาสตร์ อาทิ การเรียนรู้องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ และทำความเข้าใจว่าทำไมต้องแสดงว่าข้อความที่กำลังพิสูจน์เป็นจริง เนื่องจากนักคณิตศาสตร์มองว่าการชี้แจง หรือการอธิบายการพิสูจน์มีความสำคัญมากกว่าการตรวจสอบการพิสูจน์ (de Villiers, 2009, pp. 378-379) ใน

ขณะเดียวกันนักเรียนก็ไม่ได้พิสูจน์ข้อความเพื่อค้นหาผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ขึ้นใหม่ ส่งผลให้ประสบการณ์การพิสูจน์ของนักเรียนแตกต่างจากประสบการณ์การพิสูจน์ของนักคณิตศาสตร์ เพราะมีจุดประสงค์ที่แตกต่างกัน

กล่าวโดยสรุปได้ว่าความจำเป็นในการเรียนการสอนพิสูจน์คือการเสริมสร้างประสบการณ์การพิสูจน์ของนักเรียนให้มีความคล้ายคลึงกับนักคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนทำความเข้าใจการพิสูจน์และอธิบายว่าทำไมข้อความที่กำลังพิสูจน์เป็นจริง หรืออาจจะให้นักเรียนสร้างข้อความทางคณิตศาสตร์ขึ้นใหม่ เพื่อเป็นการเพิ่มพูนและขยายขอบเขตความเข้าใจในการพิสูจน์ของนักเรียน ซึ่งครูสามารถเสริมสร้างและส่งเสริมประสบการณ์ดังกล่าวได้โดยการจัดให้เรียนการให้เหตุผลและการพิสูจน์อย่างต่อเนื่องในทุกระดับชั้นและทุกหัวข้อที่เรียน

1.4 การเรียนการสอนการพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษา

ประสบการณ์เกี่ยวกับการพิสูจน์ของนักเรียนแตกต่างจากประสบการณ์ของนักคณิตศาสตร์ เนื่องจากมีจุดมุ่งหมายที่แตกต่างกัน นักคณิตศาสตร์มองกิจกรรมการพิสูจน์เป็นการค้นหาผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ขึ้นใหม่ แต่นักเรียนกลับมองแตกต่างออกไป นักเรียนมองว่าการพิสูจน์เป็นเพียงการยืนยันทฤษฎีบทว่าเป็นจริงเท่านั้น ซึ่งเป็นการเรียนรู้ทฤษฎีบทที่ขาดจุดประสงค์ทางปัญญา เพราะในสถานการณ์นี้นักเรียนมิได้ให้ความร่วมมืออย่างเต็มที่ในการค้นหาวิธีแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างเหมาะสม ส่วนใหญ่การพิสูจน์ในชั้นเรียนไม่ได้มุ่งไปสู่การพิสูจน์ที่เคร่งครัดโดยยึดตามสัจพจน์ การเรียนพิสูจน์ของนักเรียนนำเสนอในแบบสำเร็จรูปในการสอนกระบวนการของตรรกะการคิดและการสื่อสาร และการแก้ปัญหาตามตัวอย่าง

เหตุผลที่มีการสอนการพิสูจน์ในโรงเรียนเกิดจากความมุ่งหวังที่จะให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการให้เหตุผลที่คล้ายกับนักคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนได้เรียนรู้และเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง นักเรียนควรมีมุมมองต่อการพิสูจน์เป็นการให้ข้อมูลเชิงลึกว่า ทำไม? ประพจน์เป็นจริงหรือเท็จ? (Smith, 2006, p. 75; Zaslavsky et al., 2012, p. 217) แนวคิดพื้นฐานของการสอนการพิสูจน์ในโรงเรียน คือ สนับสนุนความเข้าใจในการพิสูจน์ และสร้างการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้กลายเป็นความเคยชิน ดังนั้นควรเสริมประสบการณ์เกี่ยวกับการพิสูจน์ให้กับนักเรียนอย่างต่อเนื่องในทุกเนื้อหาและทุกระดับชั้น (Heinze & Reiss, 2009; Stylianides, 2007; Zaslavsky et al., 2012)

การพิสูจน์เป็นเรื่องที่ท้าทายอย่างมากทั้งสำหรับครูและนักเรียน เนื่องจากนักเรียนจำนวนมากพบว่าการเรียนการพิสูจน์เป็นเรื่องยาก และรู้สึกว่าการพิสูจน์เป็นเพียงการตรวจสอบ

ว่าสิ่งใดสิ่งหนึ่งเป็นจริง (Knuth et al., 2009) ดังนั้นครูที่สอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาต้องสร้างความเข้าใจให้กับนักเรียนว่าการพิสูจน์เป็นกระบวนการในการอธิบายความจริงของข้อความทางคณิตศาสตร์ และเข้าใจลักษณะของการพิสูจน์ว่ามิได้เป็นเพียงเครื่องมือที่ใช้การอ้างเหตุผลเพื่อโน้มน้าวให้เชื่อในค่าความจริงนั้น (Anwar & Goedhart, 2019; Hanna, 2000, p. 7; McCrone & Martin, 2009, p. 214)

ครูคณิตศาสตร์และนักเรียนระดับมัธยมศึกษาจำนวนมากแสดงความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของการพิสูจน์สองคอลัมน์ (Knuth & Elliott, 1998, p. 714; Miyazaki et al., 2019) ในการศึกษาการพิสูจน์รูปแบบทางการในเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาพบสิ่งที่น่าสนใจ คือ นักเรียนใช้ข้อเท็จจริงและการให้เหตุผลแทนกัน ซึ่งบ่งชี้ถึงการขาดความเข้าใจในเหตุผลที่ใช้ในการพิสูจน์ เมื่อพิจารณาการแสดงข้อเท็จจริง นักเรียนกล่าวว่าข้อความและเหตุผลต้องเป็นลำดับขั้นตอนหรือเป็นเชิงเส้น (Anwar & Goedhart, 2019) ซึ่ง หว่อง (Wong, 2017) ได้ศึกษาการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ของโรงเรียนในฮ่องกง พบว่า ครูใช้แนวทางปัญหาในการสอนเรขาคณิตเป็นหลัก และเน้นการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ หนังสือเรียนเน้นการฝึกฝนทักษะ (หรือการคำนวณ) มากกว่าการให้เหตุผลและการพิสูจน์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้จัดทำมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยจัดให้นักเรียนเริ่มเรียนการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์เป็นครั้งแรกในสาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต เรื่องความเท่ากันทุกประการ ซึ่งการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นแบบเรขาคณิตนิวทรัล (neutral geometry) นั่นคือ เรขาคณิตที่ไม่มีการกล่าวถึงสัจพจน์การขนาน (Zaslavsky et al., 2012, p. 217; สสวท., 2560)

เมื่อศึกษามาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ของประเทศไทย พบว่าตัวอย่างและแบบฝึกหัดในบทเรียนที่เป็นการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเน้นการเขียนพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ ยังไม่มีการนำเสนอ หรือการสอดแทรกเนื้อหาเกี่ยวกับการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตให้นักเรียนได้เรียน รวมถึงยังไม่พบการเผยแพร่วิทยานิพนธ์หรืองานวิจัยเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ (proof comprehension) มีเพียงงานวิจัยหรือบทความเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ (proof understanding) การสร้างการพิสูจน์ (proof construction) ที่ปรากฏอย่างแพร่หลาย จึงนำไปสู่การศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (proof comprehension) ของผู้วิจัยในครั้งนี้ มีรายละเอียดดังหัวข้อถัดไป

2. ความเข้าใจการพิสูจน์

บ่อยครั้งที่คำว่า “การพิสูจน์” กลายเป็นคำหยาบสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ผู้ใหญ่หลายคนรวมถึงครูคณิตศาสตร์สามารถจดจำความรู้สึกสับสน และความรู้สึกผิดหวังในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นครั้งแรกได้เป็นอย่างดี เพราะมองว่าการพิสูจน์เป็นเรื่องยาก (Ellis et al., 2016) ความยากของการพิสูจน์มีสาเหตุหลายประการ ปัจจัยหนึ่ง คือ ความเข้าใจทั่วไปที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ของการพิสูจน์ มุมมองหนึ่งเกี่ยวกับแนวคิดในการพิสูจน์ที่ยืนยันความจริงของข้อความหรือผลลัพธ์ และอีกมุมมองหนึ่งเกี่ยวกับแนวคิดข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ไม่เพียงพอที่จะนับว่าเป็นการพิสูจน์ ซึ่งจะเห็นได้ว่านักเรียนมีความเข้าใจที่ไม่เพียงพอ นักเรียนทุกคนควรมีโอกาสอภิปรายแนวคิดของตนเอง เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่พิสูจน์ได้ และมีความโดดเด่นต่างจากศาสตร์แขนงอื่น กิจกรรมการพิสูจน์ต้องมีความยืดหยุ่น เป็นพลวัต มีประสิทธิผล มุมมองที่หลากหลายเกี่ยวกับกิจกรรมการพิสูจน์ต้องเกี่ยวข้องกัน รวมไปถึงทัศนคติเชิงบวกมีก็ความสำคัญต่อบุคคลที่กำลังเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วย (Carpenter & Lehrer, 2009; Heinze & Reiss, 2009; Knuth et al., 2009; Miyazaki et al., 2019)

การพิสูจน์มีบทบาทสำคัญในคณิตศาสตร์ การพิสูจน์ช่วยให้นักคณิตศาสตร์เข้าใจความหมาย และความสมเหตุสมผลของข้อความ หรือทฤษฎีบทผ่านกระบวนการพิสูจน์ ความเข้าใจในการพิสูจน์ยังเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของสมรรถนะคณิตศาสตร์ เนื่องจากเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการพัฒนาและแสดงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Anwar & Goedhart, 2019; NTCM, 2000) เป้าหมายของการเรียนคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจที่เพิ่มขึ้นตลอดการเรียน (Fennema, Sowder, & Carpenter, 2009, p. 187) ในขณะเดียวกันมีการศึกษาจำนวนมากที่แสดงให้เห็นว่านักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ไม่สามารถระบุได้ว่าการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์นั้นถูกต้องหรือไม่ หากนักศึกษาไม่สามารถระบุได้ว่าการอ้างเหตุผลถูกต้องหรือไม่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่นักศึกษากลุ่มนี้จะเข้าใจการอ้างเหตุผลได้เป็นอย่างดี (Mejia-Ramos et al., 2017, p. 131)

การพัฒนาสมรรถนะในการให้เหตุผล และการพิสูจน์เป็นจุดประสงค์สำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน เนื่องจากการพิสูจน์เป็นส่วนสำคัญของคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สมรรถนะประกอบด้วยความสามารถในการให้เหตุผลอย่างต่อเนื่อง และเป็นระบบในการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สมเหตุสมผล และการแสดงความถูกต้องของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นการพัฒนาความถูกต้องของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จึงมิใช่เรื่องง่าย

(Heinze & Reiss, 2009; Hemmi, Julin, & Pörn, 2017) นักเรียนควรได้รับโอกาสในการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ ประเมินค่า และสร้างการพิสูจน์ ผ่านหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ซึ่งสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติ (Ellis et al., 2016) ได้เสนอเป้าหมายในการเรียนเพื่อเป็นแนวทางในการวางแผนการสอนที่สนับสนุนความสามารถในการทำความเข้าใจไว้ 3 เป้าหมาย ดังนี้ 1) การพัฒนาความคล่องในการพิสูจน์ 2) ทำความเข้าใจข้อจำกัดของตัวอย่าง และ 3) เปลี่ยนจากการอ้างเหตุผลตามตัวอย่างไปสู่การพิสูจน์แบบนิรนัย และสิ่งที่จะช่วยให้บรรลุผลเป้าหมายการเรียนในห้องเรียน ได้แก่ ใช้วิธีการสอนที่มีประสิทธิภาพ ออกแบบปัญหาและกิจกรรม และสร้างวัฒนธรรมห้องเรียน

ความเข้าใจเป็นกิจกรรมทางความคิดที่ก่อให้เกิดการพัฒนาความเข้าใจแทนที่จะเป็นความรู้แบบคงที่ของแต่ละบุคคล การพัฒนาการมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจของนักเรียนจะเชื่อมโยงกับการปฏิบัติในห้องเรียน จำเป็นต้องจัดให้นักเรียนได้รับโอกาสในการพัฒนาความสัมพันธ์ที่เหมาะสม ขยายและประยุกต์ใช้ความรู้ สะท้อนประสบการณ์ เชื่อมโยงสิ่งรู้ และสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเอง ในการจัดชั้นเรียนที่ช่วยให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมเหล่านี้ ต้องพิจารณามิติของการสอนอย่างน้อยสามมิติ ได้แก่ กิจกรรมที่นักเรียนมีส่วนร่วม เครื่องมือที่แสดงถึงการคิดทางคณิตศาสตร์ และแนวปฏิบัติที่เป็นมาตรฐานในการควบคุมกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนและครูตกลงร่วมกัน (Carpenter & Lehrer, 2009)

ลักษณะเฉพาะหนึ่งของการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ คือ การเรียนรู้ในรูปแบบที่ได้รับการชี้แจงว่าความรู้นั้นสามารถนำไปใช้ได้อย่างไร ความเข้าใจขึ้นอยู่กับความคิดที่ถูกจัดระเบียบอย่างมีประสิทธิผลทำให้สามารถแก้ปัญหาได้ การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจมีหลายวิธี การสอนนั้นต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนจัดโครงสร้างความรู้ จุดเน้นหลักของการสอน คือ ต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พัฒนาความรู้อย่างต่อเนื่อง เมื่อนักเรียนไม่เข้าใจมักจะใช้ทักษะการท่องจำซึ่งเป็นการขัดขวางความพยายามในการพัฒนาความเข้าใจ ในทางตรงกันข้ามเมื่อเรียนรู้ทักษะด้วยความเข้าใจ ไม่เพียงความเข้าใจที่พัฒนาขึ้น แต่ความเชี่ยวชาญในทักษะก็พัฒนาขึ้นด้วย

การทำความเข้าใจการพิสูจน์ในเป็นวัตถุเชิงโครงสร้าง การพิสูจน์เป็นกิจกรรมทางปัญญา และบทบาท การทำงาน และความหมายของการพิสูจน์ช่วยให้นักเรียนเข้าใจการพิสูจน์ ครูจำเป็นต้องทราบระดับความเข้าใจของนักเรียน และศักยภาพของเครื่องมือ (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2017; Miyazaki, Fujita, Jones, & Iwanaga, 2017) การทำความเข้าใจการพิสูจน์แบ่งออกเป็นสามมุมมอง ได้แก่ มุมมองแรกลักษณะการทำงาน เกี่ยวกับบทบาทและหน้าที่ของการพิสูจน์ การทำงาน หมายถึง ความหมาย จุดประสงค์ และประโยชน์ของการพิสูจน์ มุมมองที่สอง

ด้านโครงสร้าง โครงสร้างของการพิสูจน์เป็นโครงข่ายของประพจน์เฉพาะที่และประพจน์ทั่วไประหว่างข้อตั้งและข้อยุติ ซึ่งเชื่อมโยงด้วยกฎนัยทั่วไปสู่นัยจำเพาะและตรรกบทแบบสมมติฐาน และมุมมองสุดท้ายด้านการสื่อสาร เกี่ยวกับกิจกรรมทางสติปัญญาของนักเรียนในการอ่านและเข้าใจการพิสูจน์ และตัดสิน โน้มน้าวเกี่ยวกับความสมเหตุสมผลของการพิสูจน์ ผ่านกระบวนการพิสูจน์ที่สมเหตุสมผล นักเรียนพิจารณาข้อเท็จจริงของการพิสูจน์บรรทัดต่อบรรทัด หรือขั้นต่อขั้นในการพิสูจน์หลายขั้นตอนโดยใช้ความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างของการพิสูจน์แบบนิรนัย (Anwar & Goedhart, 2019; Miyazaki, Fujita, & Jones, 2015)

ในอดีตการศึกษาเกี่ยวกับการพิสูจน์ส่วนใหญ่เน้นไปที่การสร้างการพิสูจน์ของนักเรียน และงานวิจัยที่เน้นการอ่านพิสูจน์ของนักเรียนมีค่อนข้างน้อย หรือกล่าวได้ว่าขาดแคลน ทศวรรษที่ผ่านมามีงานวิจัยเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ที่เน้นการอ่านเพิ่มขึ้นอย่างชัดเจน เช่น การทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ (Conradie & Frith, 2000) รูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang & Lin, 2008) รูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ (Mejia-Ramos et al., 2012) การประเมินการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ด้วยการให้ข้อสรุป (Davies & Jones, 2022) การฝึกอธิบายตนเองเพื่อพัฒนาความเข้าใจการพิสูจน์ (Mark, Lara, & Matthew, 2014) และ e-Proofs: การออกแบบแหล่งข้อมูลเพื่อสนับสนุนความเข้าใจการพิสูจน์ (Alcock & Wilkinson, 2011) เป็นต้น นักคณิตศาสตรศึกษาหันมาสนใจการศึกษาเกี่ยวความเข้าใจในการอ่านพิสูจน์มากขึ้นอย่างต่อเนื่อง เนื่องจากความสามารถในการอ่านและทำความเข้าใจการพิสูจน์เป็นทักษะที่นักเรียนควรพัฒนาเป็นอย่างมาก (Yang & Lin, 2008)

2.1 ความหมายของความเข้าใจการพิสูจน์

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นปัญหาหลักในการเรียนคณิตศาสตร์มาโดยตลอด ทั้งเรื่องภาษาและมโนทัศน์ และการอ่านเพื่อความเข้าใจเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเรียนคณิตศาสตร์ (Yang & Lin, 2008) โดยหลินและหยาง (Lin & Yang, 2007) เป็นผู้ริเริ่มใช้คำว่า “การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (reading comprehension of geometry proof)” ซึ่งหยางและหลิน (Yang & Lin, 2008) ได้ให้ความหมายไว้ว่า “การอ่านเพื่อความเข้าใจ (reading comprehension) หมายถึง การทำความเข้าใจการพิสูจน์จากองค์ประกอบที่สำคัญของการรู้วิธีการพิสูจน์และทำไมการพิสูจน์นั้นถูกต้อง และรู้ว่าสิ่งใดสามารถพิสูจน์ได้” (p. 60)

ความเข้าใจการพิสูจน์ (proof comprehension) หมายถึง ความสามารถในการเข้าใจหนังสือเรียน หรือการบรรยายการพิสูจน์ (Selden & Selden, 2015) เมฮิอา-ราโมส และคน

อื่น ๆ (Mejia-Ramos et al., 2012) ได้สร้างรูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์คณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรี โดยปรับปรุงจากรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ (Yang & Lin, 2008) และการทดสอบความเข้าใจในคณิตศาสตร์ (Conradie & Frith, 2000) และให้ความหมายของ “ความเข้าใจการพิสูจน์” ในทางปฏิบัติได้ดังนี้ ความเข้าใจการพิสูจน์แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม

1. ความเข้าใจแบบเฉพาะ นักเรียนสามารถเข้าใจและระบุรายละเอียดคำศัพท์ที่สำคัญ เขียนข้อความที่กำลังพิสูจน์เป็นภาษาของตนเอง ระบุสถานะตรรกะของข้อความและจุดประสงค์ของข้อความด้วยกรอบแนวคิดการพิสูจน์ บอกประเภทของกรอบแนวคิดการพิสูจน์และระบุเหตุผลที่ต้องใช้ข้อความต่อจากข้อความก่อนหน้า

2. ความเข้าใจแบบองค์รวม นักเรียนสามารถสรุปใจความสำคัญผ่านแนวคิดระดับสูง ระบุข้อสรุปของการพิสูจน์ย่อยที่สำคัญ แบ่งการพิสูจน์ออกเป็นส่วนย่อย ๆ ระบุจุดประสงค์ของแต่ละส่วนย่อยของการพิสูจน์ ระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของแต่ละส่วนย่อย ถ่ายโอนแนวคิดทั่วไปและวิธีการไปสู่บริบทอื่น ระบุขอบเขตของวิธีการ อธิบายลำดับของการอ้างเหตุผลด้วยตัวอย่างเฉพาะ และอธิบายข้อความหรือการพิสูจน์ด้วยแผนภาพ

2.2 การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์

การเรียนรู้คณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 21 ห้องเรียนควรปรับโครงสร้างการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ การสอนเพื่อความเข้าใจไม่ใช่เป้าหมายใหม่ของการสอนคณิตศาสตร์ ความพยายามในการปฏิรูปโรงเรียนตั้งแต่ช่วงเปลี่ยนศตวรรษที่ 20 มุ่งเน้นไปที่วิธีการสร้างสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ เป้าหมายของคณิตศาสตรศึกษา คือ ความเข้าใจและการพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนและเข้าใจคุณค่าของคณิตศาสตร์ การอธิบายและความเข้าใจเป็นสิ่งที่ไปด้วยกัน ดังนั้นคำอธิบายใดที่นำเสนอจึงมีวัตถุประสงค์เพื่อให้เข้าใจว่า “ทำไม” การอ้างทางคณิตศาสตร์เป็นจริง (Carpenter & Lehrer, 2009; Fennema et al., 2009; Reid & Vargas, 2017, p. 235)

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สามารถทำได้หลายรูปแบบ และสามารถนำไปสู่ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในหลากหลายวิธี ในการสอนแบบเน้นพิสูจน์นักเรียนจะเรียนรู้ผ่านการพิสูจน์เชิงสำรวจที่สร้างการแบ่งปันองค์ความรู้ และโอกาสในการพัฒนาความเข้าใจเชิงความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นวิธีที่ได้มาซึ่งความเข้าใจ เป้าหมายของการสอนแบบเน้นพิสูจน์เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจผ่านกระบวนการพิสูจน์ (Macbeth, 2012, p. 235; Reid & Vargas, 2017) สิ่งที่สำคัญที่สุดในการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ คือ การเรียนรู้ที่เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนได้รับความรู้ด้วย

เข้าใจและสามารถใช้ความรู้นั้นเพื่อเรียนรู้หัวข้อใหม่ และแก้ปัญหาใหม่ที่ไม่คุ้นเคย ในทางกลับกัน เมื่อนักเรียนไม่เข้าใจจะมองว่าแต่ละหัวข้อเป็นทักษะที่แยกจากกัน ไม่สามารถใช้ทักษะเพื่อแก้ปัญหาที่ไม่ครอบคลุมสิ่งที่ครูสอน หรือขยายการเรียนรู้สู่หัวข้อใหม่ (Carpenter & Lehrer, 2009)

การพิสูจน์เป็นการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงอย่างมีลำดับขั้นตอนในการยืนยันหรือการอ้างทางคณิตศาสตร์ (Stylianides, 2007, p. 291) ความเข้าใจการอ้างเหตุผลจำเป็นต้องมีการประเมินวิธี:

พื้นฐาน:ทำความเข้าใจข้อความ (เช่น บทนิยาม สัจพจน์) ที่เป็นการพิสูจน์และเข้าใจบทบาทในการพิสูจน์

การกำหนด: ทำความเข้าใจการพัฒนาการพิสูจน์และลักษณะทั่วไปที่สามารถดำเนินการอย่างมีตรรกะในขั้นตอนการพิสูจน์

การนำเสนอ: ทำความเข้าใจภาษาที่ใช้ในการแสดงการพิสูจน์ เข้าใจการพิสูจน์ที่แสดงด้วยภาษาของนักเรียนเอง

มิติทางสังคม: สนองความเป็นจริงของการพิสูจน์ของแต่ละบุคคล แต่ละการพิสูจน์ที่นำเสนอควรมีความเหมาะสมกับระดับการศึกษา โดยสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มมั่นใจในความจริงของการพิสูจน์

ความเข้าใจของนักเรียนในการพิสูจน์ที่กำหนดให้มักจะวัดโดยการให้ทำซ้ำหรือแก้ไขเล็กน้อยเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกัน แม้ว่าการประเมินประเภทนี้จะให้มุมมองที่ผิวเผินเกี่ยวกับความเข้าใจของนักเรียน จึงจำเป็นต้องมีวิธีซับซ้อนมากขึ้นในการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียน (Mejia-Ramos et al., 2012) ซึ่งอินัม และคนอื่น ๆ (Inam et al., 2018) ได้ให้ข้อเสนอแนะว่าไม่มีนักเรียนที่ประสบความสำเร็จในระดับความซับซ้อนสูงสุดของการทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ ซึ่งเกี่ยวกับการพิสูจน์หลายวิธีหรือทฤษฎีบทที่ต่างออกไปโดยใช้วิธีการเดิม การพิสูจน์ไม่ได้เป็นเพียงการทำความเข้าใจมโนทัศน์ และกระบวนการคิดเท่านั้น แต่ยังตระหนักถึงแนวคิดของบทนิยาม และกระบวนการคิดทำงานอย่างไรและทำไม การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญในการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ เช่นเดียวกับการคิดทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติ โครงสร้างของความเข้าใจ และธรรมชาติของความรู้ทางคณิตศาสตร์ การพิสูจน์ไม่เพียงสำคัญต่อการให้เหตุผลความรู้ทางคณิตศาสตร์ แต่ยังรวมถึงการปฏิบัติ และการทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ การพิสูจน์มีความจำเป็นต่อการสร้างและพัฒนาความรู้และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (Inam et al., 2018, pp. 339-340)

การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียนเป็นสิ่งที่สำคัญในการประเมินประสิทธิภาพของการสอนคณิตศาสตร์ รูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ควรใช้ตรวจสอบวิธีพัฒนาความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียนได้ การใช้เครื่องมือประเมินความเข้าใจช่วยให้ครูทราบถึงแง่มุมเฉพาะของการพิสูจน์ที่นักเรียนเข้าใจและไม่เข้าใจในแง่มุมใด "หากการทดสอบความเข้าใจที่ให้นักเรียนพิสูจน์ซ้ำด้วยการท่องจำเท่านั้น นักเรียนมีแนวโน้มที่จะพัฒนาความเข้าใจผิวเผินของการพิสูจน์นั้นและเน้นรูปแบบมากกว่าสาร" (Mejia-Ramos et al., 2012, p. 4) การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ มักจะให้นักเรียนพิสูจน์ซ้ำ หรือประยุกต์กับทฤษฎีบทที่คล้ายกัน ซึ่งการประเมินแบบนี้ทำให้รูปแบบการพิสูจน์มีความสำคัญกว่าความหมายของการพิสูจน์ การรู้เพียงขั้นตอนการพิสูจน์นั้นไม่เพียงพอ

ความเข้าใจการพิสูจน์เชิงตรรกะเป็นหัวใจสำคัญของความเข้าใจการพิสูจน์ วิธีการประเมินทั่วไปมักจะตั้งคำถามว่า "จงพิสูจน์ทฤษฎีบท" หรือ "จงบอกและพิสูจน์ทฤษฎีบท" และมักจะให้นักเรียนพิสูจน์ผลลัพธ์ที่ซับซ้อน (Conradie & Frith, 2000, p. 225; Inam et al., 2018, pp. 340-341) การประเมินแบบนี้มีข้อเสีย เนื่องจากเน้นการเรียนรู้แบบท่องจำ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์ได้ นักเรียนที่ไม่เก่งพยายามที่จะจดทีละคำทั้งที่ไม่เข้าใจ ทำให้เสียเวลา และกระบวนการเรียนรู้ไร้ประโยชน์ คำตอบของคำถามยากที่จะประเมิน การพิสูจน์ข้อความซ้ำได้อย่างสมบูรณ์แบบอาจบ่งชี้ได้แค่ความสามารถในการจำของนักเรียน และเป็นเรื่องยากที่จะระบุถึงการขาดความเข้าใจของนักเรียน และสุดท้ายนักเรียนอาจจะไม่เข้าใจเรื่องที่กำลังเรียนอยู่ ความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์ที่อ่านนั้นไม่ค่อยได้รับการประเมินในวิธีที่มีความหมาย ส่วนหนึ่งเป็นเพราะ "ขาดการประเมินที่ถูกต้องในการวัดความเข้าใจดังกล่าว" (Mejia-Ramos et al., 2017, p. 131) ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการอ่านพิสูจน์ที่เน้นการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ นักเรียนจะได้รับการอ้างเหตุผลและขอให้ประเมินอย่างใดอย่างหนึ่ง เช่น การอ้างเหตุลผลนี้ถูกต้องหรือไม่ นี่คือประเภทของการอ้างเหตุผลที่คุณอาจสร้างขึ้นใช่หรือไม่? คุณสามารถโน้มน้าวด้วยการอ้างเหตุผลนี้ได้หรือไม่?

วิธีหนึ่งที่สามารถประเมินว่านักเรียนเข้าใจการพิสูจน์หรือไม่ คือ การวัดขอบเขตของการพิสูจน์ของนักเรียนคนนั้นว่าบรรลุวัตถุประสงค์มากน้อยเพียงใด สามารถใช้วิธีการพิสูจน์ในสถานการณ์อื่น ๆ ได้ (Mejia-Ramos et al., 2012, p. 6) ในการพิสูจน์เรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายส่วนใหญ่ ข้อสรุปของทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้วได้มาโดยตรงหลังจากสันนิษฐานว่าสมมติฐานเป็นจริง การพิสูจน์ทางเรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมปลายเป็นแบบประโยคเงื่อนไข "ถ้า p แล้ว q" โดยทั่วไปยอมรับเงื่อนไขใน p และอนุมานว่า q ก็เป็นเช่นนั้น

จุดประสงค์ของการเรียนพิสูจน์ในชั้นเรียนระดับมัธยมศึกษา มีการเสนอแนวทางที่หลากหลาย ประกอบด้วย การฟัง การพูด การเขียน และการทำ การฟังและการพูดสนับสนุนการส่งเสริมการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mejia-Ramos et al., 2012, p. 9; Yang & Lin, 2008, p. 59)

2.3 กรอบแนวคิดในการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์

แบบวัดความเข้าใจการพิสูจน์ใช้เพื่อวัดความเข้าใจ ขั้นตอนพิเศษในการพิสูจน์ โครงสร้างของการพิสูจน์ แนวคิดของการพิสูจน์ ผลของสมมติฐาน และแนวคิดที่สำคัญของการพิสูจน์ (Inam et al., 2018, p. 344) ลักษณะสำคัญของวิธีนี้ คือ ให้นักเรียนได้รับผลลัพธ์ของการพิสูจน์ และตอบคำถามเกี่ยวกับคุณลักษณะเฉพาะของการพิสูจน์ (Conradie & Frith, 2000, pp. 226-227) แต่ในการทดสอบนักเรียนใช้เวลาในการตอบคำถามนานกว่าที่ควรจะเป็น ถ้าให้นักเรียนตอบคำถามเพียง 2-3 บรรทัดจะทำให้นักเรียนตอบคำถามได้เร็วขึ้น ครูควรคำนึงถึงเรื่องเวลาในการตอบคำถามของนักเรียน เนื่องจากนักเรียนต้องอ่านการพิสูจน์ที่เขียนไว้ก่อนหน้าทั้งหมดจึงจะตอบคำถามได้ การกำหนดคำถามควรมีความแม่นยำ ในบางครั้งอาจจะได้รับคำตอบที่ถูกต้องแต่เหนือความคาดหมาย ดังนั้นผู้ให้คะแนนควรเปิดใจในการตรวจให้คะแนน ข้อความในการพิสูจน์ควรระบุบรรทัดให้ชัดเจน เพื่อลดความสับสนและยากที่จะตีความการพิสูจน์ (Conradie & Frith, 2000, pp. 229-230)

2.3.1 แนวปฏิบัติในการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์

แนวปฏิบัติที่ดีในการเริ่มการทดสอบความเข้าใจด้วยคำถามง่าย ๆ และสร้างคำถามเชิงค้นหาเพิ่มเติมในภายหลัง การปรับเปลี่ยนวิธีการพื้นฐานสามารถประประยุกต์ได้ สามารถละเว้นข้อความที่เป็นผลลัพธ์ในคำถาม สามารถตรวจสอบส่วนใดส่วนหนึ่งของทั้งหมดการพิสูจน์ นักเรียนคาดหวังที่จะเติมคำตอบในช่องว่าง แต่ควรหลีกเลี่ยงการเรียนรู้แบบท่องจำ สามารถถามเนื้อหาที่เกี่ยวข้องแต่ไม่ปรากฏในการพิสูจน์ได้ คำถามควรจะมีความแม่นยำ สามารถจำแนกคำตอบที่ “ถูก” “ผิด” หรือ “เกือบถูก” ได้ หลีกเลี่ยงการให้คะแนนบางส่วนสำหรับคำถามแต่ละข้อในแบบทดสอบความเข้าใจ ผู้ให้คะแนนควรเปิดใจในการตรวจ ยอมรับคำตอบที่ไม่คาดคิด แม้จะระมัดระวังในการตั้งคำถามแล้วก็ตาม (Conradie & Frith, 2000, pp. 229-230)

2.3.2 ข้อดีของการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์

“การประเมินทุกรูปแบบย่อมมีจุดอ่อนและจุดแข็ง” (Conradie & Frith, 2000, p. 235) ข้อดีของแบบทดสอบความเข้าใจ นักเรียนประหยัดเวลาในการเตรียมตัว พยายามทำความ

เข้าใจการพิสูจน์มากกว่าท่องจำ แบบทดสอบความเข้าใจจะมีความแม่นยำมากขึ้นในการประเมินความเข้าใจทุกระดับ โดยกำหนดคำถามที่ระบุความเข้าใจในแต่ละขั้น โครงสร้างของการพิสูจน์ แนวคิดที่ใช้ในการพิสูจน์ สมมติฐานและข้อสรุป แง่มุมที่ละเอียดอ่อนของการพิสูจน์ ดังนั้นสิ่งที่สำคัญที่สุด คือ คำตอบของนักเรียน

2.3.3 ข้อเสียของการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์

"ไม่มีการประเมินรูปแบบใดที่ไม่มีข้อเสีย" (Conradie & Frith, 2000, p. 232) ข้อเสียของแบบทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ ใช้เวลาในการตรวจให้คะแนนมากขึ้น เนื่องจากการให้คะแนนคำถามสั้นอาจใช้เวลานานกว่าการอ่านพิสูจน์ทั้งหมด ข้อพึงระวัง คือนักเรียนอาจคิดว่าไม่จำเป็นต้องเตรียมตัวก่อนสอบ เนื่องจากมีการเตรียมบทพิสูจน์ไว้ให้สำหรับนักเรียนแล้ว ควรหลีกการบอกนักเรียนว่ามีการเตรียมบทพิสูจน์ไว้ให้ การทดสอบซ้ำ อาจนำไปสู่รูปแบบการท่องจำ และควรใช้การทดสอบในรูปแบบอื่น ๆ ข้อคำถามควรใช้ข้อความอย่างระมัดระวังเพื่อสร้างความชัดเจนว่าคาดหวังสิ่งใดจากนักเรียน ควรเพิ่มการทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ที่ "ไม่สังเกต" เพื่อให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการอ่านและพยายามทำความเข้าใจคณิตศาสตร์ "ใหม่" ด้วยตัวเอง (Conradie & Frith, 2000, pp. 230-233) การประเมินแบบเดิมนำไปสู่กลยุทธ์การเรียนรู้แบบท่องจำด้วยความเข้าใจเพียงน้อยนิด แต่แบบประเมินความเข้าใจช่วยขยายขอบเขตกลยุทธ์ในการเรียนรู้ แต่ในขณะเดียวกันความถูกต้องและความเชื่อมั่นของการวัดความเข้าใจการพิสูจน์เป็นสิ่งที่วัดได้ยาก

2.4 แบบประเมินความเข้าใจการพิสูจน์

หลินและหยาง (Lin & Yang, 2007) เป็นผู้ริเริ่มใช้คำว่า "การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (reading comprehension of geometry proof)" โดยให้ความหมายไว้ว่า "การอ่านเพื่อความเข้าใจ (reading comprehension) หมายถึง การทำความเข้าใจการพิสูจน์จากองค์ประกอบที่สำคัญของการรู้วิธีการพิสูจน์และทำไมการพิสูจน์ถูกต้อง และรู้ว่าสิ่งใดสามารถพิสูจน์ได้" (Yang & Lin, 2008, p. 60) และได้สร้างรูปแบบการประเมินการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยรูปแบบแบ่งออกเป็น 4 ระดับ ได้แก่

ระดับแรก "ความเข้าใจผิวเผิน" เป็นความเข้าใจที่เกิดขึ้นเองโดยปราศจากการวิเคราะห์องค์ประกอบของการอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ องค์ประกอบเหล่านี้เป็นความรู้เชิงมโนทัศน์และเชิงกระบวนการ เช่น ความหมายของคำศัพท์ สัญลักษณ์ และการคำนวณการวัดทางเรขาคณิต

ระดับที่สอง “ความเข้าใจการรู้จำองค์ประกอบ” รับรู้ข้อตั้ง ข้อยุติ หรือสมบัติที่ประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์

ระดับที่สาม “ความเข้าใจการเชื่อมโยงองค์ประกอบ” เชื่อมโยงข้อตั้ง สมบัติ และข้อยุติในการพิสูจน์

ระดับที่สี่ “ความเข้าใจที่ถูกห่อหุ้ม” เป็นระดับสูงสุดของรูปแบบ เรียบเรียงทฤษฎีบทและการพิสูจน์ในภาพรวม สามารถประยุกต์ทฤษฎีบทและการพิสูจน์ และสามารถจำแนกความแตกต่างของข้อตั้งและทฤษฎีบทที่คล้ายกันได้

รูปแบบการประเมินที่เน้นความเข้าใจการพิสูจน์ประยุกต์มาจากรูปแบบการประเมินการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang and Lin (2008) และการทดสอบความเข้าใจสำหรับคณิตศาสตร์ของ Conradie and Frith (2000) โครงสร้างหลักของรูปแบบนี้แบ่งออกเป็นสองกลุ่ม ได้แก่ ความเข้าใจแบบเฉพาะ และความเข้าใจแบบองค์รวม รูปแบบแบ่งออกเป็น 7 มิติ โดยสามมิติแรกเป็นความเข้าใจแบบเฉพาะซึ่งเป็นความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับคำศัพท์และข้อความ (บทนิยาม ทฤษฎีบท หรือข้อความที่กำลังจะพิสูจน์) และอีกสี่มิติที่เหลือเป็นความเข้าใจแบบองค์รวมซึ่งเป็นความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการมองภาพรวมของบทพิสูจน์ เช่น แนวคิดหลัก วิธีการพิสูจน์ และการประยุกต์สู่บริบทอื่น

มิติแรก “ความหมายของคำศัพท์และข้อความ” วิธีพื้นฐานในการทำความเข้าใจข้อความทุกประเภท คือ การทำความเข้าใจความหมายของแต่ละคำและประโยค

ตัวอย่างคำถามประเมินขอบเขตความเข้าใจความหมายของคำศัพท์

1. ระบุคำจำกัดความของคำศัพท์ที่กำหนดให้ในบทพิสูจน์
2. ระบุตัวอย่างที่แสดงถึงคำศัพท์ที่กำหนดให้ในบทพิสูจน์

ตัวอย่างคำถามประเมินขอบเขตความเข้าใจในแต่ละข้อความ

1. ระบุข้อความที่แตกต่างแต่สมมูลกัน
2. ระบุความหมายบางส่วนของข้อความที่กำหนดให้ในบทพิสูจน์
3. ระบุตัวอย่างที่แสดงถึงข้อความที่กำหนดให้บทพิสูจน์

มิติถัดไป “สถานะตรรกะของข้อความและกรอบการพิสูจน์” การยืนยันการพิสูจน์สามารถมีสถานะที่แตกต่างกัน การทำความเข้าใจสถานะของการยืนยันต่าง ๆ ในการพิสูจน์เข้าใจตรรกะการพิสูจน์ ไม่เพียงระบุสถานะตรรกะข้อความในการพิสูจน์เท่านั้น แต่ต้องตระหนักถึงความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อความที่พิสูจน์แล้ว สมมติฐาน และข้อสรุปของการพิสูจน์ การ

ตระหนักถึงความสัมพันธ์นี้ เรียกว่า กรอบการพิสูจน์ (โครงสร้างระดับสูงสุดของการพิสูจน์ ที่ไม่ได้ขึ้นอยู่กับรายละเอียดของความรู้ที่เกี่ยวข้องกับแนวคิด)

ตัวอย่างการขอให้นักเรียนทำสิ่งต่อไปนี้เพื่อประเมินความเข้าใจกรอบการพิสูจน์และสถานะเชิงตรรกะของข้อความในการพิสูจน์

1. ระบุจุดประสงค์ของข้อความในกรอบการพิสูจน์
2. ระบุประเภทของกรอบการพิสูจน์

มิติที่สาม “การให้เหตุผลในการอ้าง” ในการพิสูจน์ข้อความใหม่จะถูกอนุมานจากข้อความก่อนหน้าที่ได้รับการยอมรับจากหลักการทางคณิตศาสตร์ (เช่น ทฤษฎีบท กฎ สมบัติ)

ตัวอย่างการประเมินขอบเขตความเข้าใจการให้เหตุผลในการอ้างในการพิสูจน์

1. ระบุเหตุผลที่ชัดเจนในการพิสูจน์
2. ระบุข้อมูลเฉพาะที่สนับสนุนการอ้างที่กำหนดให้
3. ระบุการอ้างเฉพาะที่สนับสนุนโดยข้อความที่กำหนดให้

มิติที่สี่ “การสรุปผ่านแนวคิดระดับสูง” โครงสร้างของการพิสูจน์เป็นวิธีการปรับปรุงความเข้าใจการพิสูจน์นักเรียน นั่นหมายถึงนักเรียนมุมมองระดับบนสุด และเข้าใจแนวคิดหลักของการพิสูจน์

มีอย่างน้อยสองวิธีที่จะประเมินความเข้าใจการสรุปแนวคิดระดับสูงได้

1. ระบุหรือให้ข้อสรุปที่ดีของการพิสูจน์
2. ระบุหรือให้ข้อสรุปที่ดีของการพิสูจน์ย่อยที่สำคัญ

มิติที่ห้า “การระบุโครงสร้างย่อย” การแบ่งการพิสูจน์เป็นวิธีหนึ่งที่ทำให้นักเรียนมองเห็นการพิสูจน์ได้ชัดเจนขึ้นว่าวัตถุประสงค์ของแต่ละส่วนย่อยคืออะไร

ตัวอย่างการประเมินความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของแต่ละส่วนย่อย

1. แบ่งการพิสูจน์ออกเป็นส่วนย่อย ๆ
2. ระบุจุดประสงค์ของแต่ละส่วนย่อยในการพิสูจน์
3. ระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างส่วนย่อย

มิติที่หก “การถ่ายโอนแนวคิดทั่วไป หรือวิธีการสู่บริบทอื่น ๆ” สิ่งสำคัญของความเข้าใจการพิสูจน์คือการระบุกระบวนการพิสูจน์ หรือวิธีการใช้กระบวนการเหล่านั้น และสามารถนำแนวคิดของข้อพิสูจน์ที่นำเสนอในชั้นเรียนไปประยุกต์ใช้กับบริบทอื่น ๆ ได้

มีสามวิธีที่จะประเมินความเข้าใจเกี่ยวกับการถ่ายโอนแนวคิดหรือวิธีการสู่บริบทอื่น ๆ

1. การถ่ายโอนวิธีการ

2. ระบุวิธีการ

3. ระบุขอบเขตของวิธีการ

มิติสุดท้าย “การอธิบายด้วยตัวอย่าง” ความเข้าใจการพิสูจน์เกี่ยวกับความสามารถในการอธิบายลำดับการอ้างในรูปของตัวอย่าง

ตัวอย่างการประเมินการอธิบายด้วยตัวอย่าง

1. การอธิบายลำดับการอ้างด้วยตัวอย่าง

2. การตีความข้อความหรือการพิสูจน์ในรูปของแผนภาพ

ในการศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นครั้งนี้ อยู่บนพื้นฐานแนวคิดของรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang and Lin (2008) และใช้เป็นกรอบแนวคิดในการสร้าง งาน : ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในการศึกษาครั้งนี้มีจุดประสงค์เพื่ออธิบายธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นใน 5 ด้าน ได้แก่

1. ด้านความรู้พื้นฐาน เป็นการวัดความเข้าใจเกี่ยวกับคำศัพท์ ข้อความ สัญลักษณ์ และรูปภาพที่แนบประกอบการพิสูจน์ โดยนักเรียนต้องเข้าใจคำศัพท์ ข้อความ สัญลักษณ์ และรูปภาพเกือบทั้งหมดของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ สามารถตระหนักถึงความหมายของสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนภาพ และสามารถอธิบายและตระหนักถึงความหมายสมบัติของคำศัพท์ที่ใช้ในการพิสูจน์ได้

2. ด้านสถานะเชิงตรรกะ ด้านสถานะเชิงตรรกะวัดความเข้าใจจากการที่นักเรียนสามารถระบุได้ว่าข้อความพิสูจน์ส่วนใหญ่มีสถานะเป็นข้อตั้ง (premise) ข้อสรุป (conclusion) หรือสมบัติที่ใช้ (applied properties) ตระหนักถึงเงื่อนไขที่สามารถนำมาใช้ได้โดยตรงโดยไม่ต้องอธิบายเพิ่มเติม ตัดสินความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุป และสามารถบอกได้ว่าการพิสูจน์ที่กำหนดให้ต้องใช้สมบัติข้อใดบ้าง

3. ด้านการให้ข้อสรุป สามารถวัดได้จากการระบุข้อตั้ง ข้อสรุป หรือกระบวนการที่สำคัญ และให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้

4. ด้านความทั่วไป สามารถวัดได้จากการพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ และสามารถใช้การพิสูจน์ตรวจสอบข้อความ หรือกระบวนการพิสูจน์ในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

5. ด้านการประยุกต์ สามารถวัดได้จากการที่นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้หรือวิธีการจากการพิสูจน์ที่กำหนดให้ไปสู่สถานการณ์หรือข้อความพิสูจน์อื่นได้

3. การอ่านพิสูจน์

กิจกรรมการอ่านพิสูจน์ไม่เพียงควบคุมความถูกต้องของการพิสูจน์ แต่ยังเน้นการทำความเข้าใจบริบทของการพิสูจน์นั้นด้วย การอ่านไม่ได้เป็นเพียงการจำคำหรือระลึกความหมายได้ แต่ยังเป็นกระบวนการสร้างความเข้าใจระหว่างผู้อ่านกับสื่อและเนื้อหา การพิสูจน์ทฤษฎีบทสำคัญมักจะถูกจัดเตรียมและอาจมีการพิจารณาโครงสร้างที่จำเป็นในรายละเอียดบางอย่าง (Conradie & Frith, 2000, p. 225; Inam et al., 2018, p. 341) ให้นักเรียนได้ฝึกการอ่าน ซึ่งเป็นทักษะการคาดการณ์ แต่ไม่ค่อยมีการสอนลักษณะดังกล่าวในวิชาคณิตศาสตร์ การเน้นการอ่านและทำความเข้าใจการพิสูจน์ช่วยให้นักเรียนมีแนวคิดที่แม่นยำในการพิสูจน์ (Conradie & Frith, 2000, pp. 233-234)

นักการศึกษาหลายคนยอมรับว่าการอ่านเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการได้รับความเข้าใจจากการฝึกฝน (Shepherd & van de Sande, 2014) ความสามารถในการอ่านและทำความเข้าใจการพิสูจน์เป็นทักษะที่นักเรียนควรพัฒนา (Yang & Lin, 2008) เหตุผลหลักที่นักเรียนต้องอ่านและศึกษาการพิสูจน์ คือ พวกเขาสามารถทำความเข้าใจและเรียนรู้การพิสูจน์ได้ (Mejia-Ramos et al., 2012, p. 3) ตำราสามารถถือได้ว่าเป็นการอำนวยความสะดวกในการสนทนาระหว่างผู้เขียนและผู้อ่านที่ให้โอกาสในการค้นพบและสำรวจแนวคิดและขั้นตอนใหม่ (Shepherd & van de Sande, 2014, p. 86) การเป็นนักอ่านที่ดีของข้อความทั่วไปไม่จำเป็นต้องเป็นนักอ่านที่ดีของตำราคณิตศาสตร์ กลยุทธ์ที่ผู้อ่านใช้สร้างความหมายจากตำราขึ้นอยู่กับเป้าหมายของผู้อ่านและเนื้อหาที่อ่านของผู้อ่านแต่ละคน (Mejia-Ramos et al., 2012, p. 4; Shepherd & van de Sande, 2014, p. 75)

การอ่านเป็นองค์ประกอบสำคัญในการเรียนการสอน และการอ่านเพื่อความเข้าใจจึงจำเป็นต่อการเรียนรู้ที่ประสบความสำเร็จ กลยุทธ์การอ่านที่นักเรียนมีไม่เพียงพอที่จะอ่านข้อความที่มีความถูกต้องและกระชับ หรือหลีกเลี่ยงความซ้ำซ้อนของการใช้คำและโครงสร้างทางไวยากรณ์ที่ซับซ้อน ความล้มเหลวของนักเรียนในการใช้กลยุทธ์การอ่านอย่างมีประสิทธิภาพร่วมกับการใช้กลยุทธ์ที่ไม่มีประสิทธิภาพสามารถ อย่างน้อยก็อธิบายบางส่วนจากการขาดประสบการณ์ในการ

อ่านตำราเพื่อความเข้าใจ นักเรียนจะพยายามถอดความ ระลึกถึงความรู้เดิม และอ่านวลีซ้ำเมื่อสับสน รวมถึงการอ้างอิงตัวเลขหรือกราฟโดยปราศจากตัวอย่าง และให้ความสนใจกับสูตรและบทนิยาม การอ่านออกเสียงต้องใช้ความสามารถในการแปลข้อความที่เขียนเป็นคำพูดโดยอัตโนมัติและคล่องแคล่ว ถ้าเป้าหมายของการอ่าน คือ การได้รับความรู้และความเข้าใจเพิ่มขึ้น จึงจำเป็นต้องมีบางสิ่งที่ชัดเจนมากกว่าแค่การอ่านแต่ละคำบนหน้ากระดาษจนกว่าจะอ่านจบ (Davies et al., 2020, p. 181; Shepherd & van de Sande, 2014, pp. 75-80)

จากการศึกษาของอันวาร์ และคนอื่น ๆ (Anwar, Mali, & Goedhart, 2021) พบว่านักศึกษาครูประสบปัญหาเกี่ยวการทำความเข้าใจการเขียนพิสูจน์ในหนังสือเรียนหรือบันทึกการบรรยาย ความยากเพิ่มมากขึ้นเมื่อเขียนในรูปสองคอลัมน์ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ใช้กันทั่วไปในหลายประเทศ และได้ให้ข้อเสนอแนะว่าการสอนนักเรียนในการอ่านพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบที่หลากหลาย เช่น ผังงานไหล (flow-chart) เขียนย่อหน้า (paragraph) และสองคอลัมน์ (two-column) จะช่วยสนับสนุนการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

งานวิจัยเกี่ยวกับความเข้าใจในการพิสูจน์ของนักเรียนในอดีตเน้นไปที่การสร้างการพิสูจน์ ในปัจจุบันความเข้าใจในการเขียนพิสูจน์ได้รับความสนใจน้อยลง (Davies et al., 2020, p. 183) เพราะนักเรียนไม่ให้ความสนใจการกล่าวถึงโครงสร้างภาพรวมของการพิสูจน์ และไปเน้นการตรวจสอบการคำนวณหรือความหมายเฉพาะแทน แบบทดสอบแบบปรนัยทำงานได้ดีในบางแง่มุมของความเข้าใจมากกว่าแบบทดสอบแบบอื่น ๆ แต่ไม่ชัดเจน โดยเฉพาะวิธีการการทดสอบ “การสรุปแนวคิดระดับสูง” การสรุปและกลั่นกรองแนวคิดหลักเป็นหัวใจสำคัญของการปฏิบัติทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเดวีส์ และคนอื่น ๆ (Davies et al., 2020) ได้ศึกษาการตัดสินเชิงเปรียบเทียบของความเข้าใจการพิสูจน์และการสรุปบทพิสูจน์โดยการให้นักเรียนเขียนตอบไม่เกิน 40 คำ แทนการเลือกตอบ เพราะการสรุปเป็นการตระหนักถึงมุมมองความเข้าใจการพิสูจน์ และการตอบแบบเลือกตอบไม่เพียงพอที่จะวัดความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียนในมิตินี้

อันวาร์ และคนอื่น ๆ (Anwar et al., 2021) แนะนำว่าการรวมงานที่เน้นการอ่าน และงานที่เน้นการเขียน จะสนับสนุนการอ่านเพื่อความเข้าใจ งานที่เน้นการอ่านช่วยความเข้าใจลักษณะเฉพาะของการพิสูจน์ และงานที่เน้นการเขียนช่วยสนับสนุนการประยุกต์ทฤษฎีบทไปสู่บริบทอื่น ซึ่งสอดคล้องกับข้อเสนอแนะของเซลเดน และเซลเดน (Selden & Selden, 2015) “ควรสอนทั้งสองทักษะนี้ควบคู่กัน” การตรวจสอบความถูกต้องของการพิสูจน์ได้รับการอธิบายว่าเป็นการอ่าน และสะท้อนภาพความพยายามในการพิสูจน์ให้ถูกต้อง ความยากในการพิสูจน์ คือ การตีความและใช้บทนิยามและทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตร์มักจะอ่านการพิสูจน์เพื่อ

เข้าใจอย่างลึกซึ้ง ไม่เพียงตรวจสอบความถูกต้อง ความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียนได้รับประโยชน์จากความพยายามในการสร้างพิสูจน์ (Selden & Selden, 2015)

การสร้างพิสูจน์ขึ้นใหม่ด้วยตัวเอง ยากกว่าการทำความเข้าใจการพิสูจน์ที่เสร็จแล้วใครคนหนึ่ง หรือการตรวจสอบความถูกต้องโดยจะต้องไม่เป็นความพยายามพิสูจน์ที่นักเรียน “อ่านไม่ออก” หนึ่งในความแตกต่างระหว่างความเข้าใจการพิสูจน์และการตรวจความถูกต้องการพิสูจน์อาจจะเป็นเพราะความเข้าใจการพิสูจน์ส่วนใหญ่สามารถสรุปได้อย่างสมเหตุสมผลว่าการพิสูจน์นั้นถูกต้อง โดยเฉพาะปรากฏในหนังสือเรียนหรือการบรรยาย ให้ความสนใจความเข้าใจการพิสูจน์เพราะใช้เวลาส่วนใหญ่ไปกับการดูและฟังกับการสาธิตพิสูจน์ในการบรรยาย และมอบหมายให้อ่านการพิสูจน์ในหนังสือเรียน การบรรยายโดยให้รายละเอียดโดยการพูดมากกว่าเขียนบนกระดานดำ นักเรียนไม่เพียงลอกตามบนกระดานดำ แต่ไม่ได้ให้ความสนใจกับรายละเอียดที่ครูให้เพิ่ม ส่งผลให้ไม่เข้าใจสิ่งที่ครูจะสื่อ และไม่เห็นสิ่งสำคัญที่ครูกำลังอธิบายด้วยคำพูด (Selden & Selden, 2015)

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มุ่งศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยกำหนดคำถามการวิจัยไว้ 2 ข้อ ดังนี้ 1) ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร 2) กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร ใช้วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพตั้งแต่กระบวนการออกแบบการวิจัย การตั้งคำถามการวิจัย ความมุ่งหมาย ระเบียบวิธีการ การวิเคราะห์ข้อมูล และความถูกต้องและความน่าเชื่อถือของการวิจัย

กระบวนการวิจัยเชิงคุณภาพแบบสร้างทฤษฎีจากข้อมูล มีความเหมาะสมในการเก็บรวบรวมข้อมูล และการวิเคราะห์ข้อมูล เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้เป็นการสำรวจระบบที่มีขอบเขตจำกัดเพียงกรณีเดียวเท่านั้น คือ ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เวลาที่ใช้ในการศึกษาเป็นภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567 ซึ่งเป็นเวลาเรียนตามปกติของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา และพื้นที่ที่ศึกษาเป็นโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาของรัฐในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 จังหวัดกรุงเทพมหานคร นักเรียนเข้าที่ร่วมการวิจัยสามารถสะท้อนความหลากหลายของกลุ่มประชากรได้ระดับหนึ่ง ในการเก็บรวบรวมข้อมูลใช้แหล่งข้อมูลที่มีความหลากหลาย ประกอบด้วย การทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และการสัมภาษณ์เชิงลึก ทำให้เห็นภาพรวมของการวิเคราะห์ข้อมูลกับการพรรณนารายละเอียดเกี่ยวความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อให้มีข้อมูลหรือเนื้อหาสาระเพียงพอในบริบทที่กำลังศึกษา เห็นภาพลึกของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในการตีความหมายของกรณีที่กำลังศึกษาอยู่

จะเห็นได้ว่าการเลือกใช้กระบวนการวิจัยเชิงคุณภาพแบบสร้างทฤษฎีจากข้อมูลมีความเหมาะสมกับสิ่งที่ผู้วิจัยกำลังมุ่งศึกษา เนื่องจากประชากรไม่มีประสบการณ์เกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ อาจกล่าวได้ว่ายังไม่เคยเรียนเรื่องความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หรือการอ่านเพื่อความเข้าใจมาก่อนหน้า เพราะมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ได้จัดให้นักเรียนเริ่มเรียนการพิสูจน์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องความเท่ากันทุกประการ เนื้อหาการเรียนมุ่งไปที่การวัด (เช่น การคำนวณพื้นที่ ความยาว) และการสร้างการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์เท่านั้น

นักเรียนที่ร่วมการวิจัยและสนามการวิจัย

1. นักเรียนที่ร่วมการวิจัย

นักเรียนที่มีส่วนร่วมเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมศึกษาของรัฐ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 จำนวน 6 คน ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง โดยกำหนดเกณฑ์การคัดเข้า และเกณฑ์ถอนนักเรียนที่ร่วมการวิจัย ดังนี้

1.1 เกณฑ์การคัดเข้า

1) เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื่องจากเด็กที่มีอายุในช่วง 11-15 ปี นักเรียนสามารถคิดได้ใกล้เคียงกับผู้ใหญ่ ทั้งในเชิงรูปธรรมและนามธรรม สามารถคิดเชิงสมมติฐานและนิรนัยได้ การคิดมีความเป็นวิทยาศาสตร์มากขึ้น แก้ปัญหาเชิงนามธรรมอย่างมีตรรกะ มีการพิจารณาหลายมุมมอง การให้เหตุผลมีความเป็นรูปธรรมมากขึ้น ใช้วิธีการทางตรรกะ และในขณะเดียวกันพัฒนาการเกี่ยวกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ของนักเรียนสามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยโดยอยู่บนพื้นฐานของหลักการ หรือทฤษฎีบทที่นักเรียนเรียนมาแล้ว (Santrock, 2016, pp. 40-50; Woolfolk, 2016, pp. 70-79)

2) เคยเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง เส้นขนาน เพราะบทพิสูจน์ที่จัดเตรียมไว้ให้นักเรียนอ่านใน งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีเนื้อหาครอบคลุม เรื่อง เส้นขนาน จึงจำเป็นต้องระบุเนื้อหาที่นักเรียนเคยเรียนผ่านมาแล้ว เพื่อป้องกันมิให้เกิดปัญหาที่ส่งผลต่อผลการวิจัยทั้งที่ไม่มีส่วนเกี่ยวข้อง เช่น นักเรียนไม่เคยเรียนเนื้อหานั้นมาก่อนจึงทำให้ไม่สามารถอ่านและเข้าใจการพิสูจน์ที่กำหนดให้ได้

1.2 เกณฑ์การถอนนักเรียนที่ร่วมการวิจัย

นักเรียนที่ร่วมการวิจัยแสดงออกว่าไม่สบายกาย (เช่น ปวดศีรษะ คลื่นไส้ อาเจียน เป็นลม) หรือไม่สบายใจ (เช่น เครียด กดดัน หงุดหงิด) ขณะทำงาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หรือสัมภาษณ์ จนส่งผลให้ไม่สามารถทำงานและให้การสัมภาษณ์จนแล้วเสร็จได้ เนื่องจากเป็นการเข้าร่วมเพียงครั้งเดียว แต่ใช้เวลาต่อเนื่องประมาณ 1 ชั่วโมง 30 นาที

2. สนามการวิจัย

สนามการวิจัยครั้งนี้เป็นโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาของรัฐ ในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 จังหวัดกรุงเทพมหานคร

2.1 การเลือกสนามการวิจัย

สนามวิจัยเป็นโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาของรัฐขนาดใหญ่พิเศษ จัดการศึกษาตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีการคัดเลือกนักเรียนด้วยวิธีการที่หลากหลาย เช่น สอบทั่วไป สอบห้องเรียนพิเศษ ความสามารถพิเศษ เป็นต้น มีการแบ่งห้องเรียน

ตามความสามารถที่นักเรียนผ่านการสอบคัดเลือก จึงเป็นเหตุผลที่ผู้วิจัยเลือกโรงเรียนแห่งนี้เป็นสนามการวิจัย นักเรียนที่ร่วมการวิจัยสามารถสะท้อนความหลากหลายของกลุ่มประชากรเป้าหมายได้ในระดับหนึ่ง (โดยมิได้มุ่งเพื่อเป็นตัวแทนของประชากร) เพื่อให้ได้นักเรียนที่ร่วมการวิจัยที่เหมาะสม มีความรู้ด้านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สามารถให้ข้อมูลในมิติเชิงลึกและเป็นองค์รวมเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ที่เพียงพอในการตอบคำถามการวิจัย

อีกเหตุผลหนึ่งโรงเรียนแห่งนี้จัดการศึกษาภายใต้บริบทของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และวิชาคณิตศาสตร์จัดการเรียนรู้ภายใต้บริบทของมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ซึ่งเป็นไปตามการกำหนดเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ เรื่อง เส้นขนาน และผู้วิจัยเป็นครูประจำการที่โรงเรียนแห่งนี้จึงเข้าใจบริบทของการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี มีความคุ้นเคยกับครูผู้สอนและนักเรียน ทำให้การเข้าถึงข้อมูลจากครู เช่น ข้อมูลการเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต การตอบคำถามในชั้นเรียน และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์คัดเข้าเป็นรายบุคคล เป็นไปอย่างสะดวกเนื่องจากผู้วิจัยถูกมองว่าเป็นเพื่อนครู มิใช่คนนอกจึงให้ข้อมูลที่เป็นประโยชน์ต่อการวิจัยได้อย่างละเอียดและครบถ้วน

2.2 การเข้าสนามการวิจัย

การเข้าสนามวิจัยเป็นไปอย่างสะดวกและเรียบง่าย เนื่องจากผู้วิจัยเป็นครูประจำการอยู่ที่โรงเรียนดังกล่าว มีความคุ้นเคยกับระบบการติดต่อประสานงาน โดยแจ้งกับทางโรงเรียนด้วยวาจาว่าขอใช้เป็นสนามการวิจัย เมื่อได้รับการอนุญาตจึงดำเนินการส่งเอกสารขอความอนุเคราะห์ข้อมูลการวิจัยไปยังผู้อำนวยการโรงเรียน และเมื่อได้รับความอนุเคราะห์จากทางโรงเรียนผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บข้อมูลในวันเสาร์ซึ่งเป็นวันหยุด เพื่อเลี่ยงการกระทบเวลาเรียนปกติของผู้เข้าร่วมการวิจัย

เมื่อผู้วิจัยเข้าสนามวิจัยไปแล้วได้ติดต่อกับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อสอบถามข้อมูลการจัดการเรียนการสอน เรื่อง เส้นขนาน และสอบถามรายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับนักเรียนที่เป็นไปตามเกณฑ์คัดเข้า ในขณะเดียวกันนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์คัดเข้าทุกคนได้รับการแจ้งข้อมูลพื้นฐานว่าเข้าร่วมการวิจัยเรื่องใด มีความมุ่งหมายว่าอย่างไร ต้องปฏิบัติอะไรบ้าง และใช้เวลานานเท่าใด หากไม่เข้าร่วมส่งผลต่อการเรียนการสอน ผลการเรียน หรือผลกระทบต่อผู้ปกครอง และเมื่อเข้าร่วมไปแล้วหากมีผลกระทบทางกายหรือทางใจจนไม่สามารถกลับมาทำงานต่อจนลุล่วง สามารถขอถอนตัวออกจากการวิจัยได้ตลอดเวลาที่เข้าร่วม และเมื่อสิ้นสุดกระบวนการเลือกนักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัย ผู้วิจัยจึงดำเนินการเก็บข้อมูลเป็นลำดับถัดไป

2.3 การออกจากสนามวิจัย

เนื่องการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพจึงดำเนินการเก็บข้อมูลและวิเคราะห์ข้อมูลพร้อมกัน โดยกระทำพร้อมกัน จนกว่าผู้วิจัยมั่นใจว่าข้อมูลที่ได้เก็บรวบรวมถึงจุดอิ่มตัวของข้อมูลและเพียงพอต่อการตอบคำถามวิจัยได้อย่างชัดเจน จึงดำเนินการหยุดเก็บข้อมูลและออกจากสนามวิจัยชั่วคราว เพื่อทำการวิเคราะห์ข้อมูล และนำข้อมูลที่ได้จากการถอดเสียง และวิเคราะห์เบื้องต้นแล้วมาให้นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยร่วมตรวจสอบ เพื่อการตรวจสอบข้อมูลแบบสามเส้าให้ข้อมูลมีความน่าเชื่อถือมากขึ้น

เครื่องมือ และวิธีการสร้าง

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
2. แนวคำถามการสัมภาษณ์ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
3. แบบบันทึกการสัมภาษณ์

ซึ่งแต่ละเครื่องมือมีรายละเอียด และวิธีการสร้างเครื่องมือ ดังนี้

1. งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เป็นแบบอัตนัย จำนวน 14 ข้อ โดยกำหนดให้อ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้จำนวน 1 การพิสูจน์ และตอบคำถาม งานสร้างขึ้นบนพื้นฐานแนวคิดของรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang & Lin, 2008) เพื่อศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น งานฉบับนี้มีขั้นตอนในการสร้าง ดังนี้

1) ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องรูปแบบการประเมินการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang and Lin (2008) รูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ของ Mejia-Ramos et al. (2012) การทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ของ Conradie and Frith (2000) การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ด้วยการสรุปของ Davies and Jones (2022) และการพัฒนาและความถูกต้องของแบบทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ของ Mejia-Ramos et al. (2017)

2) ศึกษาเนื้อหาเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จากสาระการเรียนรู้และตัวชี้วัดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 หนังสือเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และคู่มือครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

3) สร้างงาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นแบบอัตนัย และเป็นคำถามปลายเปิด โดยคำถามแต่ละข้อสอดคล้องกับแต่ละมิติของรูปแบบการการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ ดูตัวอย่างการพิสูจน์ที่กำหนดให้จากภาพประกอบ 2 และตัวอย่างคำถามจากตาราง 1

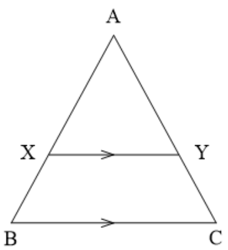
4) เสนองาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตต่ออาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ เพื่อพิจารณาความเหมาะสม และความแม่นยำของคำถาม และปรับงานตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

5) นำงาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปใช้กับกลุ่มนำร่องซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 6 คน

6) เสนองาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตต่ออาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์อีกครั้ง เพื่อนำเสนอข้อค้นพบจากการนำไปใช้กับกลุ่มนำร่อง และปรับงานตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

7) นำงาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตฉบับสมบูรณ์ ไปใช้กับนักเรียนที่มีส่วนร่วมการวิจัย

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$

พิสูจน์

จาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำหนดให้	บรรทัดที่ 1
ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 2
เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	กำหนดให้	บรรทัดที่ 3
จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 4

ภาพประกอบ 2 ตัวอย่างการพิสูจน์ที่กำหนดให้

ตาราง 1 ตัวอย่างคำถามความเข้าใจการพิสูจน์

มิติ	วัตถุของความเข้าใจ	ตัวอย่างคำถาม
พื้นฐาน	เนื้อหาเกี่ยวกับข้อตั้งและข้อสรุป	จงเขียนหมายเลข 1 ที่มุม A และ หมายเลข 2 ที่มุม B
สถานะเชิงตรรกะ	สถานะของข้อตั้ง ความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุป สมบัติที่ใช้เพื่อได้รับข้อสรุป	จากการพิสูจน์ ถ้ามีคนกล่าวว่า กระบวนการพิสูจน์เรียง 1, 2, 4, 3, 5, 6 นั้น ***ถูกต้อง*** นักเรียนมีความเห็นอย่างไร
การสรุป	แนวคิดหลัก	จงสรุปการพิสูจน์ที่กำหนดให้
ความทั่วไป	ทฤษฎีบท หรือการพิสูจน์	กำหนดให้....(ทฤษฎี)....จงพิสูจน์ว่า.....
การประยุกต์	ความรู้ที่ประยุกต์สู่สถานการณ์อื่น	ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว............ แล้ว AXY เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

1.1 เหตุผลในการเลือกการพิสูจน์

การพิสูจน์ที่กำหนดให้ : กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี $AB = AC$ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$

เหตุผลที่เลือกการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพราะมีลักษณะที่แตกต่างจากการพิสูจน์ทางพีชคณิต “เรขาคณิตไม่ได้เป็นเพียงเครื่องเคียงของเมนูคณิตศาสตร์ แต่ยังเป็นอาหารเรียกน้ำย่อยที่สำคัญอีกด้วย” (Goldenberg, Cuoco, & Mark, 2009, p. 3) เรขาคณิตมีสองลักษณะ คือ รูปธรรมและนามธรรม เรขาคณิตช่วยส่งเสริมให้นักเรียนปฏิบัติระหว่างการมองเห็น (ลักษณะรูปธรรม) และผลการสรุป (รูปแบบนามธรรม) ในขณะเดียวกันเรขาคณิตมีความเป็นนามธรรมไม่น้อยกว่าคณิตศาสตร์สาขาอื่น เพราะ จุด เส้น ระนาบ เป็นเพียงเรื่องจินตนาการเช่นเดียวกับพหุนาม (Goldenberg et al., 2009, p. 21) และวิธีการพิสูจน์เป็นแบบสังเคราะห์มากกว่าวิเคราะห์ (Chazan & Yerushalmy, 2009, p. 69) และอีกประการหนึ่งคือ การพิสูจน์ควรจัดเป็นเนื้อหาที่สำคัญในการเรียนตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ไม่ควรสงวนไว้ให้เป็นกิจกรรมพิเศษของนักเรียนกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง (Komatsu, 2017, p. 129; NCTM, 2000)

จากบทพิสูจน์ที่กำหนดให้มีความเหมาะสมในการศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื่องจากในการทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ Conradie and Frith (2000) ได้ให้ข้อเสนอแนะไว้ว่าไม่ควรให้นักเรียนทำแบบทดสอบในลักษณะเดียวกันจำนวนหลาย ๆ บทพิสูจน์ เพื่อหลีกเลี่ยงการจดจำรูปแบบและลอกเลียนแบบการตอบคำถามลักษณะเดียวกัน ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยได้กำหนดการพิสูจน์ไว้จำนวน 1 การพิสูจน์เป็นเนื้อหาเรขาคณิต เรื่อง เส้นขนาน และต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมุม

ภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด เพื่อทำความเข้าใจบทพิสูจน์ อีกทั้งการเขียนแสดงการพิสูจน์เป็นแบบสองคอลัมน์เขียนแสดงละเอียด ครบถ้วนทุกบรรทัด

2. แนวคำถามการสัมภาษณ์ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

การศึกษาข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นครั้งนี้ ใช้การสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน (task based interviews) แนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์กำหนดให้มีความสอดคล้องกับงาน : ความเข้าใจการพิสูจน์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งมีขั้นตอนในการสร้างแนวคำถามการสัมภาษณ์ ดังนี้

1) ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการประเมินการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang and Lin (2008) รูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ของ Mejia-Ramos et al. (2012) การทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ของ Conradie and Frith (2000) การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ด้วยการสรุปของ Davies and Jones (2022) และการพัฒนาและความถูกต้องของแบบทดสอบความเข้าใจการพิสูจน์ของ Mejia-Ramos et al. (2017) การสัมภาษณ์เชิงลึก และการเก็บข้อมูลของการวิจัยเชิงคุณภาพ

2) ออกแบบแนวคำถามการสัมภาษณ์ให้มีความสอดคล้องกับประเด็นที่ศึกษาได้แก่ ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และกลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งประกอบด้วย (1) คำถามหลัก เป็นคำถามเปิดประเด็นการสัมภาษณ์ในแต่ละประเด็น ซึ่งมีความเชื่อมโยงเป็นเรื่องเดียวกัน ในแต่ละคำถามหลักประกอบด้วย (2) คำถามเพื่อเก็บรายละเอียดและความชัดเจนเพื่อช่วยให้ได้ข้อข้อมูลที่เป็นรายละเอียดและลงลึกมากขึ้น และ (3) คำถามเพื่อตามประเด็นเป็นคำถามที่เกิดขึ้นเฉพาะหน้าที่คิดขึ้นและถามทันทีขณะที่ทำการสัมภาษณ์ เมื่อได้รับคำตอบที่เป็นประเด็นใหม่และน่าติดตาม โดยดูตัวอย่างคำถามการสัมภาษณ์ได้จากตาราง 2

3) เสนอแนวคำถามการสัมภาษณ์ต่ออาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ เพื่อพิจารณาความเหมาะสม และความแม่นยำของคำถาม และปรับแนวคำถามการสัมภาษณ์ตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

4) นำแนวคำถามการสัมภาษณ์ไปใช้กับกลุ่มนำร่องซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 6 คน เมื่อเสร็จสิ้นการทำงาน ระหว่างการสัมภาษณ์มีการบันทึกการสัมภาษณ์ เพื่อนำผลการสัมภาษณ์มาวิเคราะห์

1. แนวทางในการตีความคำถาม

2. คำตอบร่วมกันในแต่ละข้อ

3. แนวทางในการตัดสินคำตอบ

เพื่อให้มีความมั่นใจว่าคำตอบของงาน : ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนที่มีส่วนร่วมบ่งชี้ถึงความเข้าใจอย่างแท้จริง โดยตรวจสอบคำตอบที่ถูกต้องนั้น นักเรียนที่มีส่วนร่วมตอบได้ถูกต้องเพราะเข้าใจการพิสูจน์และคำถามที่กำหนดให้ หรือเพียงเพราะเป็นคำตอบที่สุ่มมา และตรวจสอบคำตอบที่ผิด ตอบผิดเพราะไม่เข้าใจการพิสูจน์ที่กำหนดให้ หรือเกิดจากการตีความเจตนาของคำถามของงานคลาดเคลื่อน รวมทั้งการตีความคำถามของนักเรียนที่มีส่วนร่วมเกี่ยวกับ และวิธีการที่ใช้ระหว่างการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่กำหนดให้

5) เสนอแนวคำถามการสัมภาษณ์ต่ออาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์อีกครั้ง เพื่อนำเสนอข้อค้นพบจากการนำไปใช้กับกลุ่มนำร่อง พิจารณาความเหมาะสมและความแม่นยำของคำถามแต่ละข้อ และปรับแนวคำถามตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

6) นำแนวคำถามการสัมภาษณ์ไปใช้ประกอบการสัมภาษณ์นักเรียนที่มีส่วนร่วม

ตาราง 2 ตัวอย่างแนวคำถามการสัมภาษณ์

คำถามหลัก	คำถามเก็บรายละเอียด	คำถามตามประเด็น
ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (มโนทัศน์)		
1. นิยาม “รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” ว่าอย่างไร	1.1 บอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 1.2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือไม่	
2. บทพิสูจน์ 1 ที่กำหนดให้ถูกต้องหรือไม่	2.1 บทพิสูจน์ที่กำหนดให้สามารถสลับบรรทัดในการเขียนได้หรือไม่	2.1.1 สลับขั้นตอนแล้วบทพิสูจน์ยังคงเป็นจริงหรือไม่
3. ข้อความใดที่เป็นผลโดยตรงมาจาก XY//BC บ้าง	3.1 ถ้าไม่กำหนดว่า XY//BC จะสามารถพิสูจน์ได้หรือไม่	
กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (มโนทัศน์)		
1. มีการวางแผนล่วงหน้าหรือไม่ ว่าต้องทำอะไรบ้างเมื่อเริ่มอ่าน	1.1 เล่าลำดับเหตุการณ์ตั้งแต่ได้รับแบบทดสอบจนส่งแบบทดสอบ	
	1.2 เพราะอะไรจึงเลือกทำสิ่งนั้นเป็นสิ่งแรก	1.2.1 สลับขั้นตอนในการอ่านได้หรือไม่

3. แบบบันทึกการสัมภาษณ์

การศึกษาข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตใช้การสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน ระหว่างการสัมภาษณ์มีการบันทึกวิดีโอ บันทึกเสียง และจดบันทึกข้อมูลที่สำคัญ เช่นพฤติกรรม และอวจนภาษาของผู้ให้สัมภาษณ์ที่พบระหว่างทำการสัมภาษณ์ เพื่อนำข้อมูลที่ได้มาใช้ประกอบการวิเคราะห์บทสัมภาษณ์ การสร้างแบบบันทึกการสัมภาษณ์มีขั้นตอน ดังนี้

1) ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับการสัมภาษณ์เชิงลึก และการบันทึกการสัมภาษณ์

2) สร้างแบบบันทึกการสัมภาษณ์

3) เสนอแบบบันทึกการสัมภาษณ์ต่ออาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์เพื่อพิจารณาความเหมาะสม และปรับแบบบันทึกการสัมภาษณ์ตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

4) นำแบบบันทึกการสัมภาษณ์ไปใช้บันทึกระหว่างทำการสัมภาษณ์

กระบวนการเก็บข้อมูล

การเก็บรวบรวมข้อมูลครั้งนี้ ประกอบด้วยการทำงาน : ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และการสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐานเกี่ยวกับความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และวิธีการที่นักเรียนใช้ในการอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

1. งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

1) การทำงาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยให้นักเรียนที่มีส่วนร่วมอ่านและทำความเข้าใจการพิสูจน์ที่กำหนดให้ในงาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และตอบคำถามจากการพิสูจน์ที่กำหนดให้ ให้เวลาในการทำประมาณ 30 นาที และในขณะที่ทำงานมีการบันทึกวิดีโอตลอดการทำ

2) เมื่อเสร็จสิ้น ให้นักเรียนที่มีส่วนร่วมนั่งพักคอยเพื่อเป็นการลดความกังวลในการสัมภาษณ์ ในขณะนี้ผู้วิจัยตรวจงาน เพื่อดูว่ามีประเด็นใหม่ หรือสิ่งที่น่าสนใจในการตอบงานหรือไม่ และกำหนดคำถามในการสัมภาษณ์เพิ่มเติมได้แก่คำถามเพื่อเก็บรายละเอียด หรือคำถามตามประเด็น

2. การสัมภาษณ์

การสัมภาษณ์ประกอบด้วยคำถาม 2 ประเด็นหลัก ได้แก่ ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และกลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ ซึ่งในแต่ละประเด็นประกอบด้วยคำถามหลัก คำถามเก็บรายละเอียด และคำถามตามประเด็น (ดูตัวอย่างแนวคำถามการสัมภาษณ์ ตาราง 2) การสัมภาษณ์เริ่มขึ้นเมื่อผู้วิจัยตรวจสอบประเด็นที่น่าสนใจจากการตอบงานของนักเรียนที่มีส่วนร่วมเรียบร้อยแล้ว ใช้เวลาในการสัมภาษณ์ประมาณ 30 นาทีต่อคน ระหว่างการสัมภาษณ์มีการบันทึกเสียง บันทึกวิดีโอ และบันทึกการสัมภาษณ์ (เสียงและวิดีโอที่ได้จากการสัมภาษณ์ ไม่มีการเผยแพร่ข้อมูลใดๆ เกี่ยวกับนักเรียนที่มีส่วนร่วม ใช้ประกอบการถอดเสียงสัมภาษณ์เท่านั้น) เพื่อใช้ประกอบการวิเคราะห์ข้อมูล

3. การตรวจสอบข้อมูล

การตรวจสอบข้อมูลมีวัตถุประสงค์เพื่อให้มั่นใจในความเชื่อถือได้ของข้อมูล ตรวจดูความครบถ้วนของข้อมูล และประเมินคุณภาพของข้อมูลว่าอยู่ในระดับที่นำมาวิเคราะห์เพื่อตอบคำถามการวิจัยได้

ในการตรวจสอบเพื่อหาความเชื่อถือได้ของข้อมูลในระหว่างรวบรวมข้อมูล ผู้วิจัยได้เชิญอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ไปสัมผัสสิ่งที่กำลังศึกษาในสนามจริง เพื่อให้อาจารย์เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับข้อมูลเบื้องต้น และยอมรับความเชื่อถือได้ของข้อมูล อีกทั้งการซักถามและข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาช่วยให้ผู้วิจัยต้องตรวจสอบข้อมูลอย่างระมัดระวังมากขึ้น

ให้นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยมีส่วนร่วมในการตรวจความน่าเชื่อถือ และความถูกต้องของข้อมูลด้วย โดยนำข้อมูลที่ได้จากการรวบรวมมาวิเคราะห์ ตีความ และให้นักเรียนช่วยตรวจสอบว่าการตีความสอดคล้องกับสิ่งที่นักเรียนต้องการสื่อความหมายหรือไม่

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลครั้งนี้ใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหา ซึ่งกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูลกับกระบวนการรวบรวมข้อมูลเกิดขึ้นพร้อมกัน กระทำแบบล้อกันไปตลอดระยะเวลาของการรวบรวมข้อมูล และยังทำต่อไปหลังการรวบรวมข้อมูลสิ้นสุดลง เพราะเน้นการออกไปสัมผัสกับข้อมูลที่เป็นรูปธรรมก่อนแล้วจึงพยายามสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรมในลักษณะของสมมติฐาน และพยายามตรวจสอบสมมติฐานนั้นเป็นขั้น ๆ ไป จนมั่นใจว่าเป็นข้อค้นพบที่ลงข้อสรุปได้ (สุภางค์, 2556) การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. การจัดการข้อมูล

การจัดการข้อมูลเป็นการทำให้ข้อมูลที่รวบรวมมาจากการทำงาน : ความเข้าใจ การพิสูจน์ และบทสัมภาษณ์ของนักเรียนที่มีส่วนร่วมเป็นระเบียบ เพื่อพร้อมที่นำไปวิเคราะห์ในขั้นตอนต่อไปได้สะดวก เนื่องจากข้อมูลที่ได้มากจากการรวบรวมข้อมูลภาคสนาม ยังไม่อยู่ในสภาพที่ทำการวิเคราะห์ได้ทันที เพราะเป็นเสียงพูดที่มาจากการสัมภาษณ์นักเรียนที่มีส่วนร่วม เพื่อเตรียมข้อมูลให้พร้อมสำหรับการวิเคราะห์ ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 การจัดระเบียบข้อมูล

การจัดระเบียบข้อมูลเป็นการจัดการให้ข้อมูลอยู่ในรูปแบบที่พร้อมให้ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ได้สะดวก เนื่องจากข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลภาคสนามเป็นการบันทึกเสียง และวิดีโอการสัมภาษณ์ โดยผู้วิจัยดำเนินการ ดังนี้

1) นำบันทึกเสียง และวิดีโอจากการสัมภาษณ์ มาถอดเสียงออกเป็นข้อความในการถอดเสียงเป็นการถอดโดยละเอียด แบบคำต่อคำ รักษาความเป็นธรรมชาติ อารมณ์ความหมาย และความรู้สึกของผู้ให้สัมภาษณ์ ในระหว่างถอดเสียงจะเก็บอวจนภาษา เช่น คำอุทาน เสียงหัวเราะ การเน้นเสียง หรือความเงียบ โดยการใส่วงเล็บสิ่งเหล่านี้ไว้ในข้อความ

2) นำเสียงที่ได้จากการถอดออกมาเป็นข้อความ จัดพิมพ์เก็บไว้ สร้างแฟ้มข้อมูลแยกจากข้อมูลทั่วไปในคอมพิวเตอร์ ป้องกันมิให้ผู้ที่ไม่มีส่วนเกี่ยวข้องเข้าถึงได้ เพื่อเป็นการรักษาความลับของข้อมูลตามหลักจริยธรรมการวิจัย และทำสำเนาไว้อีกชุดหนึ่งและเก็บไฟล์ไว้บนคลาวด์ (Cloud Storage) เพื่อป้องกันการสูญหายของข้อมูล

2. การให้รหัสข้อมูล

การให้รหัสเป็นการคัดสรรข้อมูลที่จัดระเบียบแล้ว เพื่อเลือกเอาเฉพาะข้อมูลส่วนที่มีเนื้อหาน่าสนใจ ขั้นตอนนี้ผู้วิจัยกำหนดรหัส ในข้อความหรือวลี เป็นเครื่องหมายข้อความจากบทสัมภาษณ์ที่ถอดเสียงมา ในการระบุว่าข้อความนั้น คืออะไรหรือบอกอะไร เพื่อเป็นหน่วยพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ เชื่อมโยงข้อความในข้อมูล และทอนข้อความให้มีขนาดเล็กลง ในขั้นนี้แบ่งเป็น 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นต้น ขั้นกลาง และขั้นสูง โดยใช้ซอฟต์แวร์วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพโดยใช้คอมพิวเตอร์ (computer-assisted qualitative data analysis software) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Atlas.ti ซึ่งมีขั้นตอนการให้รหัสดังภาพประกอบ 3

2.1 การให้รหัสขั้นต้น

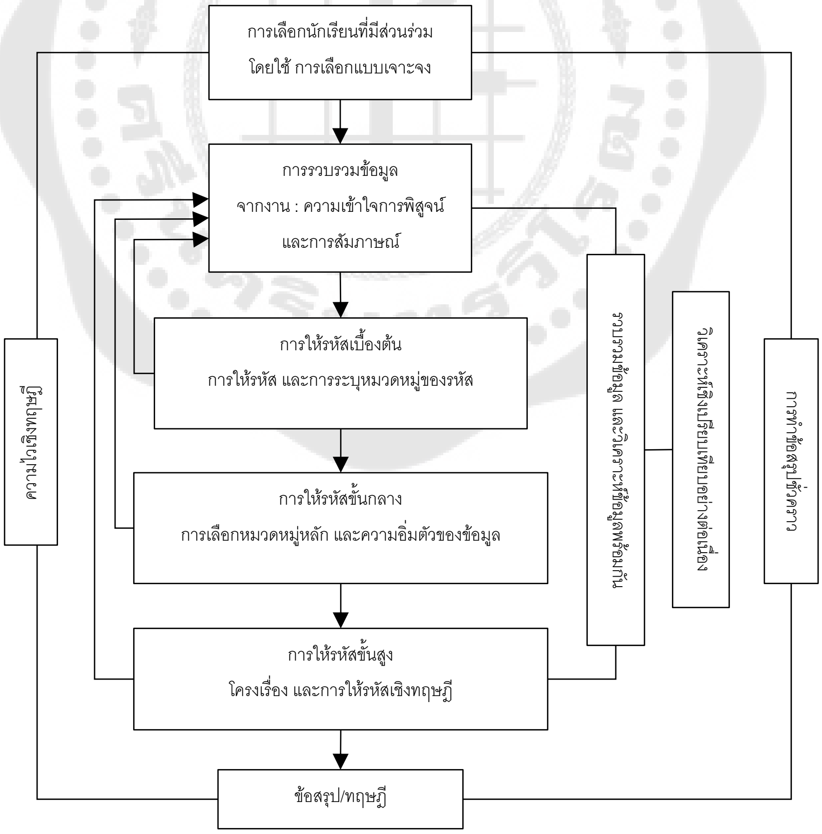
ในขั้นนี้ผู้วิจัยดำเนินการ 2 ขั้นตอนย่อย ได้แก่ การให้รหัส และการจัดหมวดหมู่ เริ่มขั้นตอนให้รหัสจากอ่านบทสัมภาษณ์ซ้ำหลาย ๆ ครั้ง และกำหนดรหัสเพื่อระบุและติดป้าย

ข้อความกำกับคำหรือข้อความสำคัญในโปรแกรม Atlas.ti โดยรหัสที่กำหนดให้มีความคล้ายกับข้อมูลให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

การจัดหมวดหมู่ โดยจัดกลุ่มรหัสที่มีลักษณะเดียวกันและนำข้อมูลที่ให้รหัสไว้แล้วมาจำแนกเป็นประเด็น ๆ ตามเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกัน ในแต่ละประเด็นประกอบด้วยข้อความสำคัญ พร้อมด้วยรายละเอียดที่บอกให้รู้เป็นเรื่อง ๆ แต่ละประเด็นถือว่าเป็นส่วนหนึ่งของข้อค้นพบของการวิจัย

2.2 การให้รหัสขั้นกลาง

ในขั้นนี้เริ่มทำให้รหัสมีความเป็นนามธรรมมากขึ้น โดยตรวจสอบว่าแต่ละหมวดหมู่ และทำการรวมบางหมวดหมู่ย่อยเข้ากับหมวดหมู่ที่มีลักษณะทั่วไปโดดเด่น สามารถบอกประเด็นสำคัญได้ หรือเลือกจากรหัสที่บ่งบอกถึงมโนทัศน์สำคัญที่จะเชื่อมโยงเอารหัสอื่นเข้ามาเป็นส่วนหนึ่งได้ และนอกจากการรวมหมวดหมู่ย่อยเข้ากับหมวดหมู่หลักแล้วต้องตรวจสอบความอิ่มตัวของข้อมูลด้วย



ภาพประกอบ 3 กระบวนการวิเคราะห์ข้อมูล

2.3 การให้รหัสขั้นสูง

ในขั้นนี้เป็นขั้นตอนสำคัญในการสร้างทฤษฎีที่มีพื้นมาจากข้อมูลและการอธิบายที่สำคัญ ในการอธิบายข้อมูลผู้วิจัยมุ่งค้นหาว่าแต่ละประเด็นมีแบบแผน ความสัมพันธ์ หรือความหมายของข้อค้นพบเหล่านั้น มีปัจจัยอะไรบ้างที่เกี่ยวข้องกับแบบแผน ความสัมพันธ์ หรือความหมายของข้อมูลที่ค้นพบ โดยผู้วิจัยมองหาแบบแผนหรือประเด็นสำคัญเพื่ออธิบายข้อค้นพบมองหาว่าข้อค้นพบเหล่านั้น น่าจะบอกอะไร แบบแผนหรือความสัมพันธ์ของข้อค้นพบเป็นอย่างไร จัดกลุ่มความสัมพันธ์ หรือพฤติกรรมที่ค้นพบ สร้างคำหรือวลีเปรียบเทียบเพื่อช่วยให้เห็นภาพสิ่งที่กำลังอธิบาย มองหาความแตกต่างหรือความเหมือนของประเด็นที่กำลังวิเคราะห์ หาตัวแปรเพื่อเชื่อมโยงตัวแปรเข้าด้วยกัน หรือหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร หาตัวแปรที่ทำให้ความสัมพันธ์เกิดความซับซ้อน และสุดท้ายเชื่อมโยงเข้าด้วยกันอย่างมีเหตุผล โดยผู้วิจัยสร้างโครงเรื่องจากการเชื่อมโยงหมวดหมู่ต่าง ๆ และสร้างชุดข้อเสนอเชิงทฤษฎีที่มีลักษณะโต้แย้งได้ โครงเรื่องที่ได้รับการพัฒนาถูกสรุปโดยใช้การให้รหัสเชิงทฤษฎีที่เป็นกรอบในการเสริมสร้างพลังการอธิบายโครงเรื่องและศักยภาพในฐานะทฤษฎี

บทที่ 4
ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

การศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพเกี่ยวกับธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตและกลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยออกแบบให้นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยที่ผ่านการเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องเส้นขนานมาแล้ว จำนวน 6 คน อ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ ซึ่งการพิสูจน์ที่กำหนดให้มีลักษณะเช่นเดียวกับการเรียนการสอนการพิสูจน์ในชั้นเรียนปกติ เลือกมาจากเอกสารประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีเนื้อหาตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) สาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต คำถามอยู่ในรูปแบบ “กำหนดให้ A จงพิสูจน์ B” และเขียนแสดงการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ โดยรวบรวมข้อมูลผ่านการสัมภาษณ์และบันทึกภาคสนาม และวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรม Atlas.ti ตามแนวทางของกระบวนทัศน์ธรรมชาติและใช้ทฤษฎีที่อยู่ในภววิสัยตามขอบเขตของการวิจัยเพื่อตอบคำถามการวิจัย

บทนี้แบ่งการนำเสนอออกเป็น 2 ตอน

ตอนที่ 1 ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เป็นผลการศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อตอบคำถามวิจัยข้อที่ 1 ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นอย่างไร

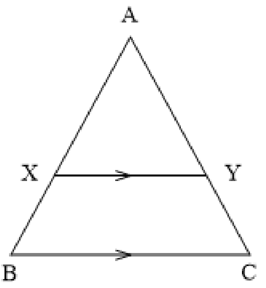
ตอนที่ 2 กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เป็นผลการศึกษากลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อตอบคำถามวิจัยข้อที่ 2 กลยุทธ์ที่ใช้ในการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร

ตอนที่ 1 ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

การศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นครั้งนี้ กำหนดให้นักเรียนอ่านการพิสูจน์ ดังภาพประกอบ 4

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$

พิสูจน์

จาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำหนดให้	บรรทัดที่ 1
ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 2
เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	กำหนดให้	บรรทัดที่ 3
จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 4
และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 5
ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	สมบัติของการเท่ากัน	บรรทัดที่ 6
ดังนั้น $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน	บรรทัดที่ 7
นั่นคือ $AX = AY$	บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 4 การพิสูจน์ที่กำหนดให้นักเรียนเข้าร่วมการวิจัยอ่าน

ตอนที่ 1 แบ่งการนำเสนอผลการศึกษาออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

1) ภาพรวมของธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2) ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตรายด้าน

3) ประเด็นที่น่าสนใจในการพิสูจน์

1. ภาพรวมของธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต คือ ลักษณะที่นักเรียนแสดงถึงความสามารถในการทำความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตจากองค์ประกอบที่สำคัญของการพิสูจน์ว่าทำงานอย่างไร ทำไมการพิสูจน์ถูกต้อง และรู้ว่าสิ่งใดสามารถพิสูจน์ได้ โดยการศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตครั้งนี้อยู่บนพื้นฐานของรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ของ Yang and Lin (2008) ซึ่งแบ่งความเข้าใจการพิสูจน์ออกเป็น 5 ด้าน ได้แก่ (1) ความรู้พื้นฐาน (2) สถานะเชิงตรรกะ (3) การให้ข้อสรุป (4) ความทั่วไป และ (5) การประยุกต์ จากการศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยภาพรวมพบว่า

ด้านความรู้พื้นฐาน นักเรียนเข้าใจความหมายคำศัพท์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด เข้าใจความหมายสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ เช่น (1) $\triangle ABC$ หมายถึง รูปสามเหลี่ยม ABC (2) $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ หมายถึง ส่วนของเส้นตรง XY ขนานกับส่วนของเส้นตรง BC และ (3) $AX=AY$ หมายถึง ความยาวของส่วนของเส้นตรง AX เท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรง AY เข้าใจรูปที่ประกอบการพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น โดยสามารถเขียนหมายเลขกำกับมุมบนรูปที่กำหนดได้ถูกต้อง และนักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น เช่น (1) การเขียนส่วนโค้ง ($\measuredangle$) ที่มุม ABC และมุม ACB แสดงว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน และ (2) ใช้การขีดบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC เพื่อแสดงว่า $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ มีความยาวเท่ากัน

ด้านสถานะเชิงตรรกะ นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความได้ เช่น $AX=AY$ ในบรรทัดที่ 8 เป็นบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เนื่องจาก $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และสามารถระบุสมบัติที่ใช้ในบทพิสูจน์ที่อ่านได้ เช่น (1) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีด้านสองด้านยาวเท่ากัน (2) สมบัติของเส้นขนาน; มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน และ (3) สมบัติการเท่ากัน และสามารถระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุปด้วยการตัดสินลำดับเชิงตรรกะของข้อความที่นำมาอ้าง เช่น นักเรียนระบุว่าไม่สามารถสลับกระบวนการพิสูจน์ใหม่เป็น 1, 2, <u>4, 3</u>, 5, 6, 7, 8 ได้ เนื่องจากข้อความ $A\widehat{B}C = A\widehat{X}Y$ ในบรรทัดที่ 4 เป็นผลมาจากข้อความ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

ด้านการให้แนวคิดหลัก นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถระบุได้ว่าข้อตั้งที่สำคัญ คือ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แต่มีนักเรียนเพียง 3 คน ที่สามารถระบุได้ว่าข้อตั้งที่สำคัญการพิสูจน์ว่า AX=AY คือ (1) $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ (2) $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ โดยนักเรียนส่วนใหญ่มองว่ามีเพียงเงื่อนไข $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ก็เพียงพอที่สรุปว่า AX=AY และมีเพียงสามคนนี้เท่านั้นที่สามารถระบุเงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุป AX=AY นั้นต้องพิสูจน์ว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก่อนจึงสร้างข้อสรุปได้ ในขณะเดียวกันเมื่อขอให้นักเรียน “ให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์” มีนักเรียนเพียงบางส่วนที่สามารถให้แนวคิดหลักที่สื่อสารได้ชัดเจน สามารถเข้าใจได้โดยง่ายว่า ต้องพิสูจน์สิ่งใด ใช้วิธีการใด และข้อสรุปของการพิสูจน์เป็นอย่างไร

ด้านความทั่วไป นักเรียนทั้ง 6 คน ระบุว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง โดยมีวิธีพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ 3 ลักษณะ ดังนี้ (1) มีนักเรียนจำนวน 3 คน พิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์ (2) มีนักเรียนจำนวน 2 คน เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านถูกต้อง และ (3) มีนักเรียนจำนวน 1 คน สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่และเปรียบเทียบข้อสรุปของการพิสูจน์ นอกจากนี้เมื่อให้นักเรียนใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์พิจารณาความถูกต้องของข้อความ “ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่จุดทั้งสองยังคงอยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ เช่นเดิม แล้วผลการพิสูจน์ยังคงเหมือนเดิมหรือไม่” นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถตอบได้ถูกต้อง แต่ไม่สามารถพิจารณาข้อความที่มีความซับซ้อนกว่า “ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แต่จุดทั้งสองไม่จำเป็นต้องอยู่บนด้าน AB และ AC แล้วผลการพิสูจน์เหมือนเดิมหรือไม่ ” มีนักเรียนเพียง 2 คนเท่านั้น ที่สามารถตอบได้ถูกต้อง

ด้านการประยุกต์ เมื่อถามนักเรียนว่า “กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี AB=AC จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แล้ว $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด” นักเรียนทุกคนยืนยันคำตอบว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ แต่ในทางกลับกันเมื่อขอให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความ “กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี AB=AC ต่อ $\overline{BA}$ ไปทางจุด A ถึงจุด D และที่จุด A ลาก $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$” มีนักเรียนจำนวน 4 คนตอบว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ แต่มีนักเรียนเพียงคนเดียวเท่านั้นที่สามารถประยุกต์แนวคิดเกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดจากบทพิสูจน์ที่อ่านไปพิสูจน์ได้ และอีก 3 คน มีการพิสูจน์ดังนี้ (1) คนแรกสามารถประยุกต์ความรู้จากบทพิสูจน์ที่อ่านได้ แต่ไม่สามารถสร้างข้อสรุปได้ว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ (2) คนที่สองสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ถูกต้อง แต่ไม่สามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านได้ และ (3) ใช้การสมมติขนาดมุมเพื่อแสดงว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ โดยปราศจากการประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านเช่นเดียวกัน

2. ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตรายด้าน

การศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นครั้งนี้ ดำเนินการโดยกำหนดให้นักเรียนอ่านบทพิสูจน์ (ดูจากภาพประกอบ 4 หน้า 41) ตอบคำถามที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ จากนั้นดำเนินการสัมภาษณ์ด้วยคำถามปลายเปิด ซึ่งออกแบบมาเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนแสดงออกถึงธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต การตั้งคำถามอยู่บนพื้นฐานของรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang and Lin (2008) โดยตลอดการสัมภาษณ์มีการบันทึกวิดีโอและการบันทึกภาคสนาม เพื่อใช้เป็นข้อมูลหลักในการวิเคราะห์ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตแบ่งออกเป็น 5 ด้าน ได้แก่ ความรู้พื้นฐาน สถานะเชิงตรรกะ การให้ข้อสรุป ความทั่วไป และการประยุกต์ ซึ่งแต่ละด้านมีรายละเอียดดังนี้

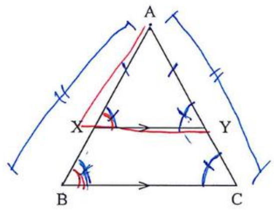
2.1 ด้านความรู้พื้นฐาน

ด้านความรู้พื้นฐานเป็นการวัดความเข้าใจเกี่ยวกับคำศัพท์ สัญลักษณ์ และรูปประกอบการพิสูจน์ และข้อความพิสูจน์ ซึ่งในด้านนี้พบว่า นักเรียนเข้าใจความหมายคำศัพท์และสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ได้ เข้าใจรูปที่ประกอบการพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น นักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น

เมื่อให้นักเรียนอ่านบทพิสูจน์ และตอบคำถามในงาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และสัมภาษณ์ด้วยคำถามที่แสดงถึงความเข้าใจของวัตถุทางเรขาคณิตที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ของนักเรียนทั้งหมด 6 คน พบว่า มีนักเรียนจำนวน 5 คน บอกความหมายของสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ได้ เช่น (1) $\triangle ABC$ หมายถึง รูปสามเหลี่ยม ABC (2) $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ หมายถึง ส่วนของเส้นตรง XY ขนานกับส่วนของเส้นตรง BC และ (3) $AX=AY$ หมายถึง ความยาวของส่วนของเส้นตรง AX เท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรง AY

นักเรียนมีความเข้าใจรูปที่ประกอบการพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถเขียนหมายเลขกำกับมุมที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง และนักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น มีการใช้สัญลักษณ์แสดงว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน เช่น (1) การเขียนส่วนโค้งที่มุม ABC และมุม ACB ($\measuredangle$) และ (2) ใช้การขีด (∤) บนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC เพื่อแสดงว่า $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ มีความยาวเท่ากัน

ดังภาพประกอบ 5 เพื่อเป็นการลดเวลาในการย้อนกลับมาอ่านทวนเพื่อทำความเข้าใจข้อความพิสูจน์ใหม่อีกครั้ง แสดงให้เห็นว่านักเรียนรู้ความหมายของสัญลักษณ์ และตระหนักถึงการใช้สัญลักษณ์เพื่อแสดงรายละเอียดบนรูปที่ประกอบการพิสูจน์



ภาพประกอบ 5 ตัวอย่างการทำสัญลักษณ์บนภาพเพื่อแสดงการเท่ากันของขนาดมุมและด้าน

รวมทั้งเมื่อให้นักเรียนบอกความหมายของคำศัพท์ที่พบบางคำ เช่น การขอให้นักเรียน “นิยามรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตามความเข้าใจของตนเอง” พบว่า นักเรียนจำนวน 4 คน จากทั้งหมด 6 คน ให้คำจำกัดความที่สามารถเข้าใจได้ว่ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเท่ากันสองด้าน แม้ใช้ถ้อยคำที่แตกต่างกันไป เช่น “รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วหมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่สองด้านเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันคู่หนึ่ง หรือ “รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันสองข้าง” เป็นต้น ในขณะที่นักเรียน 2 คนที่เหลือ ได้แก่ เทนนิส และกังฟู ให้ความหมายด้วยการอธิบายสมบัติบางประการของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รายละเอียดดังบทสัมภาษณ์ 1 และบทสัมภาษณ์ 2

บทสัมภาษณ์ 1

เทนนิส : รูปสามเหลี่ยมที่ผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180 องศา มีสองมุมที่เท่ากัน มีสองด้านเท่ากัน ถ้าไม่ตรงสมบัติใดสมบัติหนึ่งอาจจะเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดอื่น เพราะถ้าสามมุมเท่ากันจะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ต้องกำหนดไว้ที่สอง ถ้าน้อยกว่าหรือมากกว่าสองจะไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทสัมภาษณ์ 2

กังฟู : รูปสามเหลี่ยมที่ด้านประกอบมุมยอดเท่ากัน แล้วมุมที่ฐานจะเท่ากัน รวมถึงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าก็สามารถมองเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งได้

จากการให้คำจำกัดความของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วของนักเรียนทั้ง 6 คน พบว่าทุกคนสามารถให้ความหมายที่สื่อความหมายได้ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แม้ว่าการให้คำจำกัดความของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วของเทนนิสและกังฟูให้ข้อมูลที่เกินจากเงื่อนไขที่จำเป็น แต่ความหมายที่ให้นั้นแสดงถึงการคิดเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เมื่อถูกขอให้บอกความหมายของคำศัพท์ที่กล่าวถึง โดยเทนนิสพยายามคิดเกี่ยวกับสมบัติของผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา แม้ว่าสมบัตินี้เป็นสมบัติของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มิได้เจาะจงว่ามีเพียงรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่านั้นที่มีผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180 องศา เนื่องจากพยายามสร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นมาใหม่ ด้วยการมองว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ซ้อนทับอยู่ใน $\triangle ABC$ ที่ใช้มุมยอดร่วมกัน ทำให้มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน ในขณะเดียวกันกังฟูพยายามคิดเกี่ยวกับด้านประกอบมุมยอดและมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเป็นข้อตั้งที่จำเป็นในการพิสูจน์ ซึ่งพฤติกรรมเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าเทนนิสและกังฟูตระหนักถึงสมบัติของคำศัพท์ที่ต้องใช้ในการพิสูจน์

แม้ว่านักเรียนทั้ง 6 คน สามารถให้คำจำกัดความของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่สามารถเข้าใจได้ตรงกัน แต่เมื่อให้ “บอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” มีนักเรียน 5 คน ที่สามารถบอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ว่า “ด้านมีความยาวเท่ากัน 2 ด้าน และมุมมีขนาดเท่ากัน 2 มุม” ยกเว้นนักเรียนคนหนึ่ง คือ เบสบอลที่ไม่สามารถบอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ โดยเลือกนิ่งไปสักครู่แล้วให้เหตุผลบ่ายเบี่ยงว่า “ลืม” รายละเอียดดังบทสัมภาษณ์ 3

บทสัมภาษณ์ 3

ผู้วิจัย : อธิบายความหมาย “รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” ตามความเข้าใจ

เบสบอล : รูปสามเหลี่ยมที่สองด้านเท่ากัน

ผู้วิจัย : บอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ไหม

เบสบอล : ....(เงียบ).... ลืมครับ

แม้ว่าเบสบอลสามารถให้คำจำกัดความของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ แต่ในขณะเดียวกันไม่สามารถบอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าพิจารณาว่าเข้าใจความหมายของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือไม่จากการให้ความหมาย แน่นอนว่าเบสบอลเข้าใจ

หากพิจารณาการอธิบายสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพิ่มเติม กล่าวได้ว่าอาจจะไม่เข้าใจคำศัพท์ดังกล่าว

นอกจากนี้เมื่อถามนักเรียนว่า “ถ้า $\overline{XY} \nparallel \overline{BC}$ แล้ว $A\widehat{B}C \neq A\widehat{X}Y$ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด” นักเรียนทั้ง 6 คนให้คำตอบที่เหมือนกันว่า “ถ้า $\overline{XY} \nparallel \overline{BC}$ แล้ว $A\widehat{B}C \neq A\widehat{X}Y$ จริง” และให้เหตุผลในทำนองเดียวกันว่า มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แต่ทว่าเมื่อให้นักเรียนวาดภาพประกอบการอธิบายความหมายของ “มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด” ผลปรากฏว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถวาดภาพและอธิบายได้ว่ามุมใดเป็นมุมภายนอก มุมใดเป็นมุมภายใน และมุมคู่ใดที่เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ยกเว้นเบสบอลที่ระบุว่ามุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นคือมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ดังบทสัมภาษณ์ 4 และภาพประกอบ 6

บทสัมภาษณ์ 4

ผู้วิจัย : มีข้อความ สัญลักษณ์ คำ หรือรูปภาพตรงไหนที่ไม่เข้าใจไหมครับ

เบสบอล : มีที่ต้องนึก มุมภายในกับมุมภายนอก

ผู้วิจัย : เป็นยังไง วาดและชี้ให้ดูหน่อยได้ไหมครับ

เบสบอล : (วาดภาพ เส้นตรงตัดเส้นตรงสองเส้น และเขียนสัญลักษณ์มุมตรงข้าม)

ภาพประกอบ 6 การอธิบายมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดของเบสบอล

สรุปด้านความรู้พื้นฐาน จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจความหมายคำศัพท์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ สามารถบอกความหมายของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ถูกต้อง จำนวน 4 คน แต่สามารถระบุสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ จำนวน 5 คน สามารถบอกความหมายของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดได้ถูกต้อง จำนวน 5 คน ในขณะเดียวกันนักเรียนทั้ง 6 คน เข้าใจความหมายสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ สามารถบอกความหมายของสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านได้ถูกต้องทั้งหมด เข้าใจรูปที่ประกอบการพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น โดยสามารถเขียนหมายเลขกำกับมุมได้ถูกต้อง และนักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น เช่น การใช้สัญลักษณ์แสดงว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

ดังนั้น ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านความรู้พื้นฐาน เมื่อนักเรียนอ่านบทพิสูจน์ และทำความเข้าใจบทพิสูจน์ นักเรียนมีความเข้าใจความหมายของคำศัพท์ที่เกี่ยวข้องกับบทพิสูจน์ ตระหนักถึงสมบัติของคำศัพท์ของคำศัพท์เหล่านั้น เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ที่อ่านพบ และรูปที่ประกอบการพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูป นอกจากนี้นักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์ผ่านการการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น

2.2 ด้านสถานะเชิงตรรกะ

ด้านสถานะเชิงตรรกะวัดความเข้าใจจากการที่นักเรียนสามารถระบุได้ว่าข้อความพิสูจน์ข้อความใดมีสถานะเป็นข้อตั้ง (premise) ข้อสรุป (conclusion) หรือสมบัติที่ใช้ (applied properties) ตระหนักถึงเงื่อนไขที่สามารถนำมาใช้ได้โดยตรงโดยไม่ต้องอธิบายเพิ่มเติม ระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุป และสามารถบอกได้ว่าบทพิสูจน์ต้องใช้สมบัติใดบ้าง ซึ่งในด้านนี้พบว่า นักเรียนสามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์ได้ ระบุสมบัติที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ และระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความระหว่างบรรทัดในบทพิสูจน์ได้

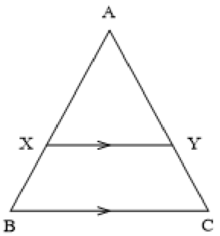
นักเรียนสามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์ เช่น (1) $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$ ในบรรทัดที่ 2 เป็นสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เนื่องจาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี AB=AC ทำให้มุม ABC และมุม ACB ซึ่งเป็นมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาด

เท่ากัน (2) $\widehat{ABC}=\widehat{AXY}$ ในบรรทัดที่ 4 และ $\widehat{ACB}=\widehat{AYX}$ ในบรรทัดที่ 5 เป็นสมบัติของเส้นขนาน เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน และ (3) $AX=AY$ ในบรรทัดที่ 8 เป็นบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เนื่องจาก $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ในขณะเดียวกันเมื่อขอให้นักเรียนระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความกับบรรทัดก่อนหน้าด้วยการให้แสดงความคิดเห็นว่า “ถ้าสลับข้อความ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ กำหนดให้ ในบรรทัดที่ 3 กับข้อความ $\widehat{ABC}=\widehat{AXY}$ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ในบรรทัดที่ 4 แล้วกระบวนการพิสูจน์เรียงบรรทัดใหม่เป็น 1, 2, <u>4, 3</u>, 5, 6, 7, 8 นั้น ***ถูกต้อง*** (ดังภาพประกอบ 7) นักเรียนมีความเห็นอย่างไร” ปรากฏว่า นักเรียนทุกคนให้ความเห็นไปในทิศทางเดียวกันว่า “ไม่สามารถสลับบรรทัดในการเขียนพิสูจน์ได้ เนื่องจากบรรทัดที่ 4 เป็นผลมาจากสิ่งที่กำหนดให้ นั่นคือ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$”

สลับบรรทัดที่ 3 กับบรรทัดที่ 4

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB=AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX=AY$



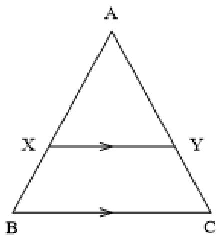
สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$		
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX=AY$		
พิสูจน์		
จาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำหนดให้	บรรทัดที่ 1
ดังนั้น $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$	สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 2
จะได้ $\widehat{ABC}=\widehat{AXY}$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 4
เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	กำหนดให้	บรรทัดที่ 3
และ $\widehat{ACB}=\widehat{AYX}$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 5
ทำให้ $\widehat{AXY}=\widehat{AYX}$	สมบัติของการเท่ากัน	บรรทัดที่ 6
ดังนั้น $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน	บรรทัดที่ 7
นั่นคือ $AX=AY$	บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 7 กระบวนการพิสูจน์เมื่อสลับบรรทัดที่ 3 และบรรทัดที่ 4

เมื่อให้นักเรียนพิจารณาว่า “ถ้าสลับข้อความ $A\widehat{B}C = A\widehat{X}Y$ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ในบรรทัดที่ 4 กับข้อความ $A\widehat{C}B = A\widehat{Y}X$ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ในบรรทัดที่ 5 แล้วกระบวนการพิสูจน์เรียงบรรทัดใหม่เป็น 1, 2, 3, <u>5, 4</u>, 6, 7, 8 นั้น***ถูกต้อง*** (ดังภาพประกอบ 8) นักเรียนมีความเห็นอย่างไร” นักเรียนทุกคนให้เหตุผลว่า “สามารถสลับบรรทัดในการเขียนพิสูจน์ได้ เนื่องจากบรรทัดที่ 4 และบรรทัดที่ 5 เป็นการอ้างในทำนองเดียวกัน” กล่าวได้ว่านักเรียนทุกคนสามารถตัดสินลำดับเชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์ และเชื่อมโยงความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุปได้

สลับบรรทัดที่ 4 กับบรรทัดที่ 5

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$

พิสูจน์

จาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำหนดให้	บรรทัดที่ 1
ดังนั้น $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$	สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 2
เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	กำหนดให้	บรรทัดที่ 3
จะได้ $A\widehat{C}B = A\widehat{Y}X$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 5
และ $A\widehat{B}C = A\widehat{X}Y$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 4
ทำให้ $A\widehat{X}Y = A\widehat{Y}X$	สมบัติของการเท่ากัน	บรรทัดที่ 6
ดังนั้น $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน	บรรทัดที่ 7
นั่นคือ $AX = AY$	บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 8 กระบวนการพิสูจน์เมื่อสลับบรรทัดที่ 4 และบรรทัดที่ 5

เมื่อให้นักเรียนระบุสมบัติที่ใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งประกอบด้วย (1) สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เช่น มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน (2) สมบัติของเส้นขนาน เช่น มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน และ (3) สมบัติของการเท่ากัน พบว่านักเรียนทั้ง 6 คน สามารถระบุสมบัติส่วนใหญ่ที่ใช้ในการพิสูจน์ได้ แต่ไม่มีนักเรียนคนใดที่สามารถระบุได้ครบถ้วนทุกสมบัติ นักเรียนแต่ละคนมีการระบุที่แตกต่างกันออกไป ดังนี้

1. เบสบอลและรักบี้ ก้มไปอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้อีกครั้งเพื่อมองหาสมบัติที่ระบุในข้อความพิสูจน์ก่อนตอบว่า “สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และสมบัติของการเท่ากัน”

2. ปิงปองตอบด้วยความรวดเร็วอย่างมั่นใจว่า “ใช้สมบัติมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน” โดยบอกสมบัติที่ต้องใช้จากลักษณะของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

3. เทนนิส เคนโด้ และกังฟู เมื่อได้ยินคำถามก็เงียบไปสักครู่หนึ่งเพื่อคิดก่อนระบุสมบัติที่ใช้ว่า “มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน และมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน” เป็นการตอบจากการมองภาพรวมของการพิสูจน์ว่าจำเป็นต้องใช้สมบัติใดบ้าง และใช้เพื่อให้เหตุผลในการอ้างข้อความใด

สรุปด้านสถานะเชิงตรรกะ จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน นักเรียนทุกคนสามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์ได้ สามารถระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุปด้วยการตัดสินลำดับเชิงตรรกะของข้อความที่นำมาอ้าง เช่น ไม่สามารถสลับกระบวนการพิสูจน์ใหม่เป็น 1, 2, <u>4, 3</u>, 5, 6, 7, 8 ได้ เนื่องจากข้อความ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$ ในบรรทัดที่ 4 เป็นผลมาจากข้อความ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ในบรรทัดที่ 3 และนักเรียนตระหนักได้ว่าบทพิสูจน์ที่อ่านต้องใช้สมบัติใดบ้าง โดยนักเรียนทั้ง 6 คน สามารถระบุสมบัติส่วนใหญ่ที่ใช้ในการพิสูจน์ได้ แต่ไม่มีนักเรียนคนใดที่สามารถระบุได้ครบถ้วนทุกสมบัติ

ดังนั้น ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านสถานะเชิงตรรกะ นักเรียนที่เข้าใจคำศัพท์และข้อความพิสูจน์ในด้านความรู้พื้นฐาน สามารถระบุสมบัติส่วนใหญ่ที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ได้ ในขณะเดียวกันนักเรียนสามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์ สามารถระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความกับบรรทัดก่อนหน้า และเชื่อมโยงความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุปได้

2.3 ด้านการให้แนวคิดหลัก

ด้านการให้แนวคิดหลักเป็นการมองทั้งองค์ประกอบย่อยและภาพรวมของการพิสูจน์ โดยพิจารณาจากการระบุข้อตั้ง ข้อสรุป หรือกระบวนการที่สำคัญ และให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้ ในด้านนี้พบว่า มีนักเรียนบางส่วนสามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญ เงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของบทพิสูจน์ และสามารถให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้

นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญได้เช่นเดียวกัน คือ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แต่เทนนิส เคนโด้ และกังฟู มองว่ามีข้อตั้งที่สำคัญเพิ่มอีกข้อหนึ่ง คือ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ในขณะเดียวกันทุกคนสามารถให้ข้อสรุปที่สำคัญ คือ $AX=AY$ และมีเพียงเทนนิส เคนโด้ และกังฟู เท่านั้น ที่สามารถอธิบายได้ว่า "เงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุป $AX=AY$ คือ ต้องสรุปว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วให้ได้เสียก่อน" กล่าวคือมีเพียง เทนนิส เคนโด้ และกังฟู เท่านั้นที่สามารถเข้าใจการพิสูจน์ทั้งองค์ประกอบย่อย และการเชื่อมโยงด้วยตรรกะของแต่ละองค์ประกอบย่อยที่สำคัญ ในขณะที่เบสบอล รักบี้ และปิงปอง มีความเข้าใจได้แค่องค์ประกอบย่อยบางส่วนเท่านั้น

เมื่อขอให้นักเรียนสรุปแนวคิดหลักของการพิสูจน์ที่อ่านด้วยปากเปล่าด้วยข้อความสั้น ๆ มีเพียงแนวคิดของเคนโด้เท่านั้นที่สามารถนับได้ว่าเป็นแนวคิดที่สามารถสื่อความหมายของการพิสูจน์ได้ชัดเจนและกระชับที่สุด เมื่ออ่านตามแล้วสามารถเข้าใจได้โดยง่ายว่าต้องพิสูจน์สิ่งใด ใช้วิธีการใด และข้อสรุปของการพิสูจน์เป็นอย่างไร และแนวคิดหลักที่ให้ปราศจากการอ่านตามหรือคัดลอกจากบทพิสูจน์ที่อ่าน ซึ่งมีรายละเอียดดังบทสัมภาษณ์ 5

บทสัมภาษณ์ 5

เคนโด้ : $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พิสูจน์ว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $A\widehat{B}C=A\widehat{C}B$ เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมี $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ทำให้ $A\widehat{X}Y=A\widehat{Y}X$ เพราะ $A\widehat{B}C=A\widehat{C}B$ แล้ว $\triangle AXY$ มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน แล้วก็มีด้านยาวเท่ากัน $(AX=AY)$

แม้ว่าแนวคิดของเทนนิสสามารถสื่อแนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้ชัดเจน กระชับ แต่อาจจะต้องใช้เวลามากขึ้นในการทำความเข้าใจ ต้องอาศัยการถอดความเพื่อช่วยให้เข้าใจแนวคิดได้ชัดเจนขึ้น (ถอดความ บทสัมภาษณ์ 6) เนื่องจากให้นักเรียนสรุปแนวคิดหลักด้วย

ปากเปล่าจึงทำให้เทนนิสใช้ภาษาพูดในการสรุป ไม่มีการระบุชื่อมุม หรือชื่อด้านของรูปสามเหลี่ยมโดยตรง ดังบทสัมภาษณ์ 6

บทสัมภาษณ์ 6

เทนนิส : เขาสรุปว่าเส้น 2 เส้นนี้เท่ากัน เขาสรุปด้วยการใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะว่ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 ด้านข้างบนมันเท่ากันแล้วมีเส้นมาขีดระหว่างรูปสามเหลี่ยมข้างใน และเส้นนั้นขนานกับเส้นข้างล่าง แสดงว่ามุมฝั่งซ้ายสุดของเส้นข้างในแล้วก็เส้นข้างนอกจะมีขนาดเท่ากัน แล้วมุมซ้ายมุมขวามีขนาดเท่ากัน จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้ว 2 ด้านเท่ากัน แสดงว่าเส้นด้านซ้ายกับเส้นด้านขวาก็จะเท่ากัน

จากบทสัมภาษณ์ 6 สามารถถอดความได้ดังนี้

เทนนิส : สรุปว่า $AX=AY$ ด้วยการใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $\triangle ABC$ มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน มี $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ทำให้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$ จะได้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$ ดังนั้น $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว นั่นคือ $AX=AY$

ในขณะเดียวกันกังฟูให้แนวคิดด้วยพยายามบอกเล่าสิ่งที่จำได้ทั้งหมดจากการอ่าน และอธิบายเพิ่มเติมในทุกข้อความพิสูจน์ จึงไม่สามารถนับว่าเป็นการให้แนวคิดที่ดีได้เนื่องจากเป็นแนวคิดที่ยาวเกินไปไม่กระชับ ในทางตรงกันข้ามเบสบอล รักบี้ และปิงปองไม่สามารถให้แนวคิดที่สื่อสาร กระบวนการที่สำคัญของการพิสูจน์ได้ นักเรียนที่เข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์จะให้แนวคิดหลักที่ดีของการพิสูจน์ได้ แนวคิดหลักที่ดีนั้น หมายถึง ความคิดรวบยอดของการพิสูจน์ที่สื่อความหมายของการพิสูจน์ได้ชัดเจน สามารถเข้าใจได้โดยง่ายว่า ต้องพิสูจน์สิ่งใด ใช้วิธีการใด ข้อสรุปของการพิสูจน์เป็นอย่างไร มีความกระชับ และแนวคิดหลักที่ให้ปราศจากการอ่านตามหรือคัดลอกจากบทพิสูจน์ที่อ่าน จากการให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ของนักเรียนทั้ง 6 คน พบว่า มีนักเรียนจำนวน 2 คน ที่สามารถให้แนวคิดหลักได้ ได้แก่ (1) เคนโด้ สามารถให้แนวคิดหลักที่ดี และ (2) เทนนิส ให้แนวคิดหลักที่สื่อความหมายได้ แต่ต้องใช้เวลาทำความเข้าใจมากขึ้น ส่วนกังฟูให้แนวคิดที่ยาว ไม่กระชับ ซึ่งเป็นการให้รายละเอียดทุกขั้นตอนมากกว่าการสรุปแนวคิดหลัก

สรุปด้านการให้แนวคิดหลัก จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน นักเรียนทุกคนสามารถระบุข้อสรุปที่สำคัญ คือ AX=AY ได้ แต่มีนักเรียนจำนวน 3 คน ที่สามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญ คือ คือ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ และ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และเงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุป AX=AY คือ ต้องสรุปว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมีนักเรียนเพียง 2 คน ที่สามารถให้แนวคิดหลักที่ดีของการพิสูจน์ สามารถสื่อสารได้ชัดเจน เข้าใจง่าย และกระชับได้

ดังนั้น ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านการให้แนวคิดหลัก นักเรียนบางส่วนสามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญได้ แต่เมื่อให้ระบุเงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของการพิสูจน์ มีนักเรียนเพียงบางส่วนที่สามารถระบุได้ถูกต้อง และมีแนวโน้มว่านักเรียนที่ระบุได้เพียงข้อตั้งที่สำคัญเข้าใจเพียงองค์ประกอบย่อยของการพิสูจน์เท่านั้น ในขณะเดียวกันมีนักเรียนบางส่วนที่สามารถให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ที่อ่านได้ ซึ่งมีแนวโน้มว่านักเรียนที่สามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญ เงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของการพิสูจน์ และให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์นั้นมีความเข้าใจบทพิสูจน์ที่อ่านทั้งองค์ประกอบย่อยและภาพรวมของการพิสูจน์

2.4 ด้านความทั่วไป

ด้านความทั่วไปสามารถวัดได้จากการพิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์ และสามารถใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์พิจารณาข้อความที่กำหนดให้ได้ ในด้านนี้พบว่า นักเรียนมีวิธีพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ 3 ลักษณะ ดังนี้ (1) พิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์ (2) เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง และ (3) สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่และเปรียบเทียบข้อสรุปของการพิสูจน์ นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ในการพิจารณาความถูกต้องของข้อความพิสูจน์ที่ใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ แต่ไม่สามารถพิจารณาข้อความที่มีความซับซ้อนกว่าได้

เมื่อให้นักเรียนพิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์ที่อ่าน พบว่านักเรียนทั้ง 6 คน ระบุว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง แต่เมื่อให้นักเรียนอธิบายวิธีการพิจารณาความถูกต้องมีการพิจารณา 3 ลักษณะ ดังนี้

(1) พิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์ นักเรียนที่มีลักษณะการพิจารณาเช่นนี้ ได้แก่ เทนนิส เคนโด้ และกังฟู โดยนักเรียนตัดสินความถูกต้องของบทพิสูจน์ที่อ่าน ด้วยการอ่านข้อเสนอ ระบุสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ อ่านข้อความพิสูจน์และพิจารณาการเชื่อมโยงของข้อตั้งและข้อสรุป ข้อความพิสูจน์แต่ละข้อความมีการเชื่อมโยงเชิงตรรกะกับบรรทัดก่อนหน้าอย่างไร มีการให้เหตุผลที่ถูกต้องหรือไม่ ตรวจสอบความสอดคล้อง

ของกระบวนการพิสูจน์กับภาพที่กำหนดให้ เมื่ออ่านเสร็จสิ้นจึงระบุว่าการพิสูจน์นั้นถูกต้อง แต่ในขณะเดียวกันกังฟูให้เหตุผลเพิ่มเติมว่าการพิสูจน์ที่กำหนดให้นั้นถูกต้อง แต่ถูกต้องไม่ทั้งหมด เพราะยังสามารถพิสูจน์ด้วยวิธีการอื่นได้

(2) เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง นักเรียนที่มีลักษณะการพิจารณาเช่นนี้ ได้แก่ เบสบอล และรักบี้ ระบุว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง โดยพิจารณาความถูกต้องด้วยการอ่านข้อเสนอ สิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ข้อความพิสูจน์และเหตุผลของแต่ละข้อความ และตัดสินว่าการพิสูจน์ดังกล่าวถูกต้อง เพราะรู้สึกว่ามันถูกต้องและเป็นการพิสูจน์ที่ครูมอบให้ ตลอดการเรียนในชั้นเรียนปกติไม่เคยได้รับการพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้อง ตัวอย่างในแบบเรียน หรือเอกสารประกอบการเรียนล้วนเป็นการพิสูจน์ที่ถูกต้อง จึงเชื่อว่าการแสดงการพิสูจน์ที่อ่านนั้นย่อมถูกต้อง

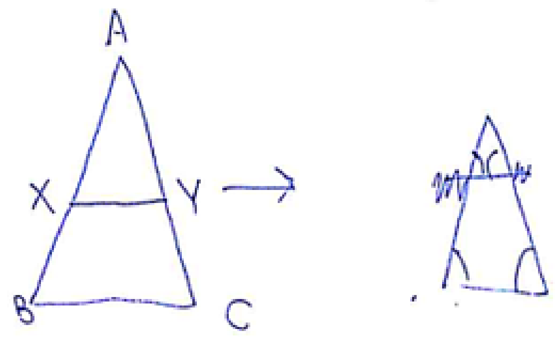
(3) สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่และเปรียบเทียบข้อสรุปของการพิสูจน์ นักเรียนที่มีลักษณะการพิจารณาเช่นนี้ คือ ปิงปอง พิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์ที่อ่าน ด้วยการเปรียบเทียบผลการพิสูจน์จากวิธีการพิสูจน์ที่สร้างขึ้นใหม่กับข้อสรุปในการพิสูจน์ที่กำหนดให้ โดยพิสูจน์ด้วยการเลื่อนขนาน $\overline{BC}$ ให้มาอยู่ในตำแหน่งเดียวกับ $\overline{XY}$ แล้วมุมที่ฐานของ $\triangle AXY$ มีขนาดเท่ากัน ซึ่งเป็นเพียงการพิจารณาข้อสรุปในบรรทัดสุดท้ายว่า $AX=AY$ จริง ไม่ใช่การตัดสินว่ากระบวนการพิสูจน์ของบทพิสูจน์นั้นถูกต้อง หรือการเชื่อมโยงข้อตั้งและข้อสรุปถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุผล

หากพิจารณาเพียงคำตอบของการพิจารณาความถูกต้อง นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถให้คำตอบที่ถูกต้อง แต่เมื่อพิจารณาคำตอบร่วมกับวิธีการการพิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์ พบว่า มีนักเรียนเพียง 3 คนเท่านั้น ได้แก่ เทนนิส เคนโด้ และกังฟู ที่สามารถให้คำตอบที่ถูกต้อง และพิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์

ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านความทั่วไปนั้น นักเรียนไม่เพียงตัดสินความถูกต้องของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ได้เท่านั้น แต่ต้องใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ที่อ่านตรวจสอบความถูกต้องข้อความที่กำหนดให้ได้ ซึ่งในขั้นตอนนี้กำหนดให้นักเรียนใช้ข้อมูล “$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB=AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แล้ว $AX=AY$” และกระบวนการพิสูจน์จากการพิสูจน์ดังกล่าวประกอบการพิจารณาข้อความ 2 ข้อความ ดังนี้

ข้อความ 1 ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่จุดทั้งสองยังคงอยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ เช่นเดิม แล้วผลการพิสูจน์ยังคงเหมือนเดิมหรือไม่

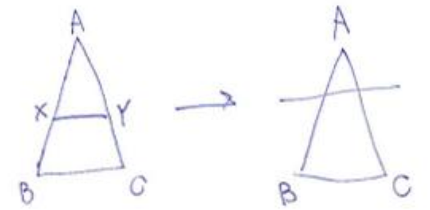
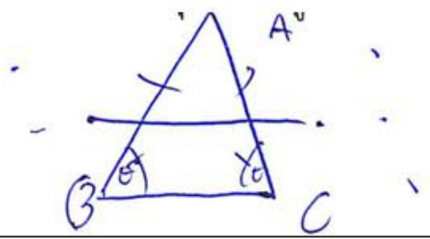
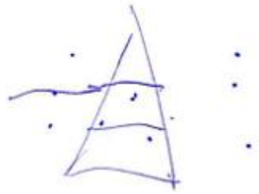
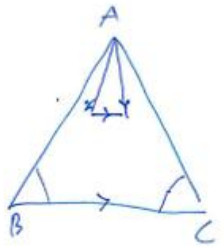
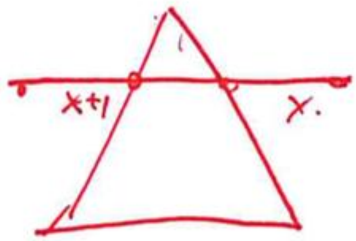
เมื่อให้นักเรียนพิจารณาข้อความ 1 โดยใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ที่อ่าน พบว่า นักเรียนทุกคนสามารถระบุได้ว่าข้อสรุปยังคงเป็น AX=AY เหมือนเดิม และให้เหตุผลในทำนองเดียวกันว่า เพราะ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จึงใช้สมบัติมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันได้เหมือนเดิม ไม่ว่าจะเลื่อนจุด X และจุด Y พร้อมกันให้ไปอยู่ในตำแหน่งใดบนด้าน AB และ AC ก็ตาม โดยมีตัวอย่างภาพที่นักเรียนวาดประกอบการพิจารณาข้อความ 1 ดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 9 ตัวอย่างการพิจารณาข้อความ 1

ข้อความ 2 ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แต่จุดทั้งสองไม่จำเป็นต้องอยู่บนด้าน AB และ AC แล้วผลการพิสูจน์เหมือนเดิมหรือไม่

เมื่อให้นักเรียนใช้การพิสูจน์ที่กำหนดให้พิจารณาข้อความ 2 พบว่า นักเรียนทั้ง 6 คน ตอบว่าข้อสรุปยังคงเป็น AX=AY เช่นเดิม โดยให้เหตุผลเช่นเดียวกับการพิจารณาข้อความ 1 ว่า เท่ากันเหมือนเดิมเพราะ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ทำให้มีมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด แต่เมื่ออธิบายเพิ่มเติมว่าจุด X และจุด Y สามารถเลื่อนไปอยู่ที่ตำแหน่งใดได้บ้าง ซึ่งใน 6 คนนี้สามารถจำแนกคำตอบที่แตกต่างกันออกเป็น 3 กลุ่ม ดังภาพประกอบ 10 ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้ กลุ่มแรกมีนักเรียนเพียง 2 คน ได้แก่ เทนนิส และกังฟู ที่ได้รับการอธิบายแล้วสามารถตอบได้ถูกต้องว่า AX และ AY สามารถเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ และให้เหตุผลที่คล้ายกันว่า AX=AY เมื่อจุด X และจุด Y มีระยะห่างจากด้าน AB และ AC เท่ากันตามลำดับ กลุ่มที่สอง คือ ปิงปอง เมื่อได้รับการอธิบายจึงเปลี่ยนคำตอบเป็น AX$\neq$ AY เพราะ เมื่อเลื่อนจุด X และจุด Y จะยาวไม่เท่ากัน และสำหรับกลุ่มที่สาม ได้แก่ รักบี้ เบสบอล และเคนโด้ แม้ว่าได้รับการอธิบายถึงลักษณะการเลื่อนจุด X และจุด Y แล้วก็ยังยืนยันคำตอบว่า AX=AY เช่นเดิม

มองว่าเท่ากันเหมือนเดิม	
รักบี้ 	เคนโด้ 
มองว่าไม่เท่ากัน	
ปิงปอง 	
มองว่าเท่าหรือไม่เท่ากันก็ได้	
กังฟู 	เทนนิส 

ภาพประกอบ 10 ตัวอย่างการพิจารณาข้อความ 2

สรุปด้านความทั่วไป นักเรียนทั้ง 6 คน ระบุว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง แต่เมื่อพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ 3 ลักษณะ ดังนี้ (1) มีนักเรียนจำนวน 3 คน พิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์ (2) มีนักเรียนจำนวน 2 คน เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านถูกต้อง และ (3) มีนักเรียนจำนวน 1 คน สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่และเปรียบเทียบข้อสรุปของการพิสูจน์ เมื่อให้นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ “$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB=AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แล้ว $AX=AY$” ในการพิจารณาความถูกต้องของข้อความพิสูจน์ที่ใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ “ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่จุดทั้งสองยังคงอยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ เช่นเดิม แล้วผลการพิสูจน์ยังคงเหมือนเดิมหรือไม่” นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถตอบได้ถูกต้องและให้เหตุผลใน

ทำนองเดียวกันว่า "$\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จึงใช้สมบัติมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันได้เหมือนเดิม" แต่ไม่สามารถพิจารณาข้อความที่มีความซับซ้อนกว่าได้ "ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แต่จุดทั้งสองไม่จำเป็นต้องอยู่บนด้าน AB และ AC แล้วผลการพิสูจน์เหมือนเดิมหรือไม่ " มีนักเรียนเพียง 2 คนเท่านั้น ที่สามารถตอบได้ถูกต้องว่า AX และ AY สามารถเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ และให้เหตุผลที่คล้ายกันว่า AX=AY เมื่อจุด X และจุด Y มีระยะห่างจากด้าน AB และ AC เท่ากันตามลำดับ

ดังนั้น ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านความทั่วไป นักเรียนมีวิธีพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ 3 ลักษณะ ดังนี้ (1) พิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์ (2) เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง และ (3) สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่และเปรียบเทียบข้อสรุปของการพิสูจน์ และนักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ใน การพิจารณาความถูกต้องของข้อความพิสูจน์ที่ใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ แต่ไม่สามารถพิจารณาข้อความที่มีความซับซ้อนกว่าได้

2.5 ด้านการประยุกต์

ด้านการประยุกต์วัดได้จากการที่นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้หรือวิธีการจากการพิสูจน์ที่กำหนดให้ไปสู่สถานการณ์หรือข้อความพิสูจน์อื่นได้ ในด้านนี้พบว่า นักเรียนสามารถประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านบทพิสูจน์ไปพิจารณาข้อความใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ได้ แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าได้

กำหนดให้นักเรียนใช้แนวคิดจากบทพิสูจน์พิจารณาข้อความ 3 และประยุกต์แนวคิดไปพิสูจน์ข้อความ 4 ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ข้อความ 3 กำหนดให้ $\triangle ABC$ มีจุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิจารณาว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

1) ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

2) ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

3) ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

จากข้อความ 3 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีจุด X และจุด Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ และให้นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดได้บ้าง พบว่า นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถให้คำตอบได้ว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดก็ได้ และจะระบุชนิดของ $\triangle AXY$ ได้ เมื่อกำหนดชนิดของ $\triangle ABC$ ก่อน ในขณะที่เบสบอลลังเลก่อนตอบว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดหนึ่ง ดังบทสัมภาษณ์ 7 และก่อนที่รักบี้ตอบแสดงอาการไม่มั่นใจและถามว่าตอบว่าไม่รู้ว่าเป็นชนิดใดได้หรือไม่ ดังบทสัมภาษณ์ 8 ซึ่งชี้ให้เห็นว่านักเรียน 2 คนนี้ กลัวการตอบว่าไม่รู้ แม้ว่าคำตอบที่คิดได้อาจจะถูกต้อง (แนวทางคำตอบของสถานการณ์นี้ คือ จากข้อมูลที่กำหนดให้จะระบุชนิดของ $\triangle AXY$ ได้เมื่อทราบชนิดของ $\triangle ABC$ ก่อน) ในทางตรงกันข้ามนักเรียนที่เหลืออีก 4 คน มีลักษณะการตอบที่มั่นใจว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดก็ได้ และจะเป็นชนิดเดียวกับ $\triangle ABC$

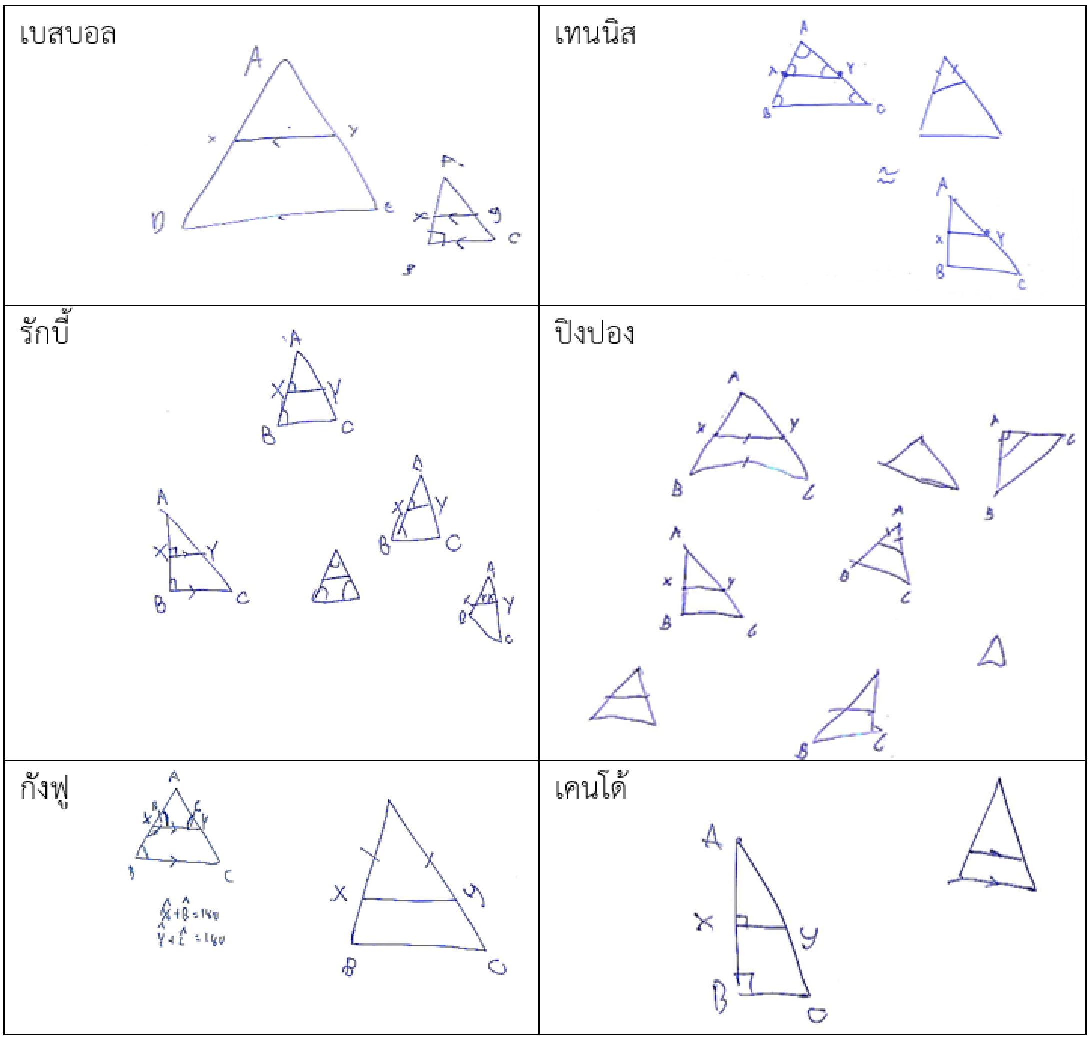
บทสัมภาษณ์ 7

ผู้วิจัย :	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีจุด X และจุด Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ โดยที่ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แล้ว $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดได้บ้าง
เบสบอล :	(ลังเล) รูปสามเหลี่ยมอะไรสักอย่าง
ผู้วิจัย :	ระบุชนิดของสามเหลี่ยมได้ไหมครับ
เบสบอล :	น่าจะไม่รู้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ
ผู้วิจัย :	ต้องทราบข้อมูลอะไรเพิ่ม
เบสบอล :	ระบุว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมอะไร

บทสัมภาษณ์ 8

ผู้วิจัย :	$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีจุด X และจุด Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ โดยที่ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แล้ว $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดได้บ้าง
รักบี้ :	ตอบว่าไม่รู้ได้ไหมครับ
ผู้วิจัย :	ได้ครับ
รักบี้ :	ไม่รู้ เพราะ โจทย์ไม่ระบุอะไรมาให้เลย
ผู้วิจัย :	เพราะอะไร ถึงไม่กล้าตอบว่าไม่รู้ครับ
รักบี้ :	โจทย์ถามว่าชนิดใด แต่มันระบุไม่ได้ครับ

นอกจากการให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้า $\triangle ABC$ รูปสามเหลี่ยมใด ๆ แล้ว $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใดได้บ้าง และให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อเนื่องว่า ถ้ากำหนดชนิดของ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ตามลำดับ แล้ว $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด นักเรียนทุกคนตอบได้ถูกต้องทั้งหมด ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ตามลำดับ โดยให้เหตุผลว่า เพราะ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน ส่งผลให้มุมฐานที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีขนาดเท่ากัน จึงทำให้ระบุชนิดของ $\triangle AXY$ ได้ ซึ่งเป็นการประยุกต์สมบัติที่ใช้ในบทพิสูจน์ที่อ่าน ดังนั้นนักเรียนทั้ง 6 คน สามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านในข้อตั้งเดียวกันได้ ซึ่งมีตัวอย่างการพิจารณาข้อความ 3 ของนักเรียนดังภาพประกอบ 11



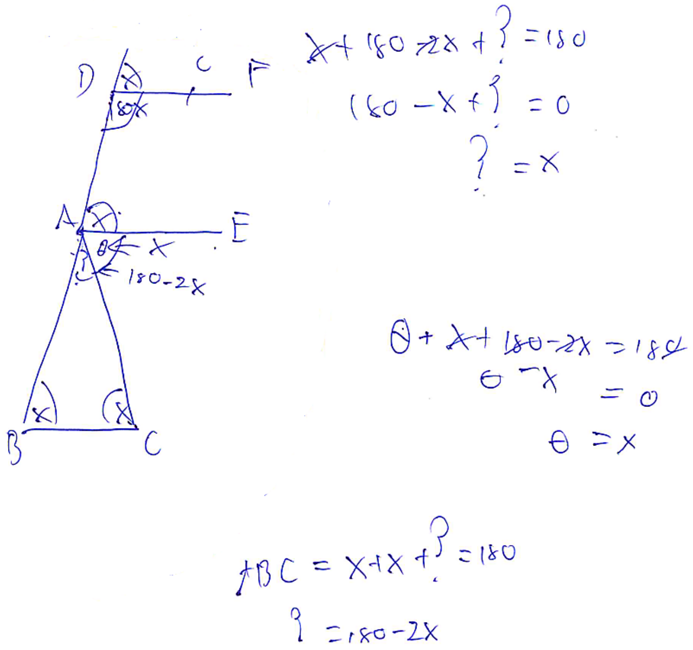
ภาพประกอบ 11 ตัวอย่างการพิจารณาข้อความ 3 ของนักเรียน

ในขณะเดียวกันเมื่อให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความ 4 ซึ่งเป็นการตรวจสอบว่านักเรียนสามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ไปข้อความที่ซับซ้อนกว่าได้หรือไม่ (โดยต้องใช้แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่าน คือ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน ในการพิสูจน์ข้อความ 4)

ข้อความ 4 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB=AC$ และ
ต่อ $\overline{BA}$ ออกไปทางจุด A ถึงจุด D และที่จุด A ลาก $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$
จงพิสูจน์ว่า $D\hat{A}E = C\hat{A}E$

จากการพิจารณาข้อความ 4 พบว่า (1) เคนโด้ ตอบว่าสามารถพิสูจน์ได้ พร้อมกับวาดภาพและเขียนแสดงเหตุผลว่า $D\hat{A}E = C\hat{A}E$ (2) รักบี้ แสดงการพิสูจน์ได้ถูกต้องบางส่วนแต่ไม่สามารถสรุปได้ และนักเรียนอีก 4 คนที่เหลือ ไม่สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ได้ โดยนักเรียนใช้เวลาในการคิดประมาณ 10 นาที ซึ่งเทนนิสขออธิบายปากเปล่าแทนการเขียนแสดงการพิสูจน์ ส่วนคนที่เหลือผู้วิจัยขอให้นักเรียนอธิบายปากเปล่าแทน โดยเริ่มจากการถามสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่พิสูจน์ สมบัติที่ต้องใช้ เริ่มการพิสูจน์อย่างไร และได้ข้อสรุปว่าอะไร ซึ่งมีรายละเอียดการแสดงการพิสูจน์ของนักเรียนแต่ละคน ดังนี้

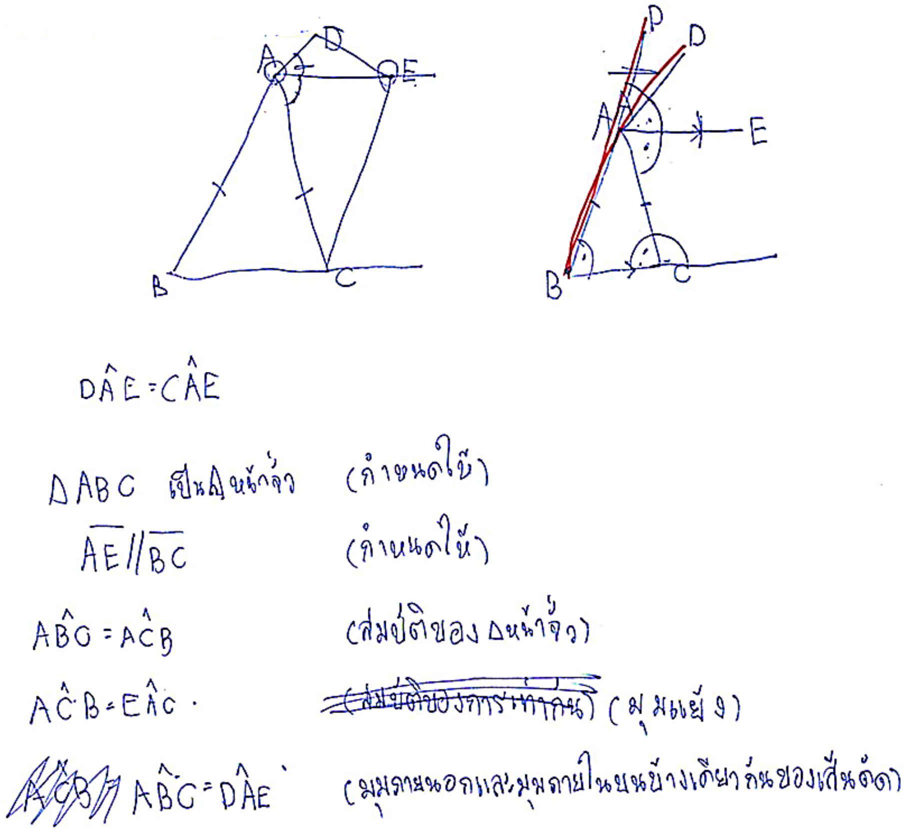
1) เคนโด้ แสดงว่า $D\hat{A}E = C\hat{A}E$ ด้วยการลาก $\overline{DF}$ ให้ขนานกับ $\overline{AE}$ และขนานกับ $\overline{BC}$ ด้วย ที่จุด D ต่อ $\overline{BD}$ ออกไป ทำให้มุม $E\hat{A}D$ มีขนาดเท่ากับมุมภายนอกของเส้นขนาน $\overline{AE}$ และ $\overline{DF}$ ที่เกิดจากการต่อ $\overline{BD}$ ออกไป และกำหนดขนาดมุมเท่ากับ x ดังนั้นมุมภายใน เ กิ ด จ า ก การต่อ $\overline{BD}$ ออกไปมีขนาดเท่ากับ $180 - x$ และใช้ทฤษฎีทขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากัน 180 องศา เขียนสมการ จะได้ $x + x + \text{Something} = 180$ ดังนั้น $\text{Something} = 180 - 2x$ โดย Something คือ $B\hat{A}E$ และใช้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดสรุปว่า $D\hat{A}E = A\hat{B}C$ เพราะ $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ และกำหนดให้ $A\hat{B}C = x$ และ $C\hat{A}E = \theta$ เขียนสมการใหม่เป็น $\theta + x + 180 - 2x = 180$ แก้สมการและ สรุปว่า $\theta = x$ ดังนั้น $D\hat{A}E = C\hat{A}E$ ซึ่งมีรายละเอียดดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 การแสดงการพิสูจน์ในสถานการณ์ 4 ของเคนโด้

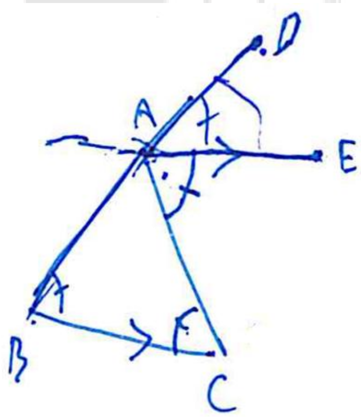
การแสดงการพิสูจน์ของเคนโด้เป็นการสมมติค่าตัวแปรแทนมุมที่ไม่ทราบขนาด โดยการลากเส้นเพื่อต่อรูปเพิ่มเติม ใช้สมบัติของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน และทฤษฎีบทขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากัน 180 องศา เพื่อสรุปขนาดมุม เขียนสมการจากตัวแปรที่สมมติมุมไม่ทราบค่าก่อนหน้า ซึ่งสมบัติที่ใช้สอดคล้องกับการพิสูจน์ที่กำหนดให้ ซึ่งหากพิจารณาว่านักเรียนที่ประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านไปพิสูจน์ข้อความ 4 ได้ และมีการให้เหตุผลที่ถูกต้อง ดังนั้นเคนโด้สามารถประยุกต์ความรู้ไปสู่สถานการณ์อื่นได้ แต่ถ้าพิจารณาการขยายขอบเขตความรู้ด้วยการเข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์และขยายไปสู่สถานการณ์อื่นได้ การแสดงพิสูจน์ของเคนโด้มีการให้เหตุผลที่วนซ้ำ เช่น (1) มุม $E\widehat{A}D$ มีขนาดเท่ากับมุมภายนอกของเส้นขนาน $\overline{AE}$ และ $\overline{DF}$ ที่เกิดจากการต่อ $\overline{BD}$ ออกไป และ (2) $D\widehat{A}E = A\widehat{B}C$ เพราะ $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ ซึ่งไม่มีความจำเป็นในการให้เหตุผลใน (1) สามารถใช้ (2) ได้เลย เพราะมีการให้เหตุผลในทำนองเดียวกัน และขั้นตอนถัดไปในกระบวนการพิสูจน์ไม่แตกต่างกัน กล่าวได้ว่าเคนโด้ไม่ได้มีการพิจารณาเงื่อนไขหรือข้อตั้งที่จำเป็นในการพิสูจน์ และการตรวจสอบองค์รวมของกระบวนการพิสูจน์ที่สร้างขึ้น

2) รักบี้ แสดงการพิสูจน์โดยระบุว่า จาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้ $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$ และจาก $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ จะได้ $A\widehat{C}B = C\widehat{A}E$ เพราะเป็นมุมแย้ง และ $A\widehat{B}C = D\widehat{A}E$ เพราะเป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ดังภาพประกอบ 13 การพิสูจน์ของรักบี้ มีการใช้สมบัติของเส้นขนาน ได้แก่ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน และมุมแย้ง ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติที่ใช้ในการพิสูจน์ที่กำหนดให้ มีการประยุกต์ความรู้จากการพิสูจน์ที่อ่านไปสู่สถานการณ์ที่กำหนดให้ แม้ว่าการพิสูจน์ของรักบี้เชื่อมโยงข้อตั้งและให้เหตุผลถูกต้องเกือบทั้งหมด แต่ไม่สามารถเชื่อมโยงได้ว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ เพราะเหตุใด แม้ว่าผู้วิจัยถามกระตุ้นเพื่อให้สังเกตว่ามีมุมคู่ใดเท่ากันอีกบ้าง “รักบี้ตบมือ 1 ครั้ง พร้อมร้อง อ๋อ!!” แสดงอาการเหมือนจะเข้าใจ แต่สุดท้ายก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ จึงไม่สามารถให้รหัสได้ว่าสามารถประยุกต์แนวคิดไปสู่สถานการณ์อื่นได้



ภาพประกอบ 13 การแสดงการพิสูจน์ในสถานการณ์ 4 ของรักบี้

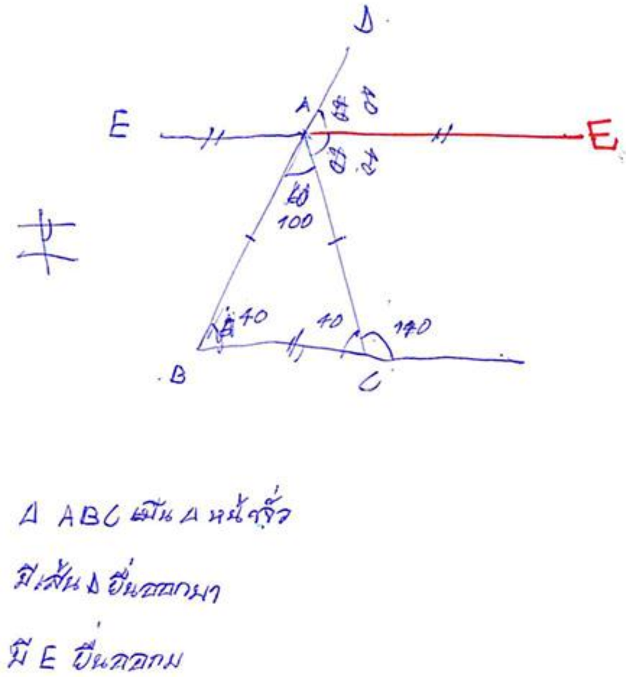
3) กังฟู แสดงการพิสูจน์โดยระบุว่า $A\widehat{C}B = C\widehat{A}E$ เพราะเป็นมุมแย้ง และเมื่อต่อด้าน $\overline{BA}$ ทำให้มุมภายนอก ($C\widehat{A}D$) ที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากับผลบวกของสองมุมภายใน ($A\widehat{C}B,\ A\widehat{B}C$) ที่ไม่ใช่มุมประชิดมุมภายนอกจะได้ $A\widehat{C}B + A\widehat{B}C = C\widehat{A}D$ และ $C\widehat{A}D - C\widehat{A}E = D\widehat{A}E$ ดังนั้น $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ เพราะ $A\widehat{C}B = A\widehat{B}C$ ซึ่งมีรายละเอียดดังภาพประกอบ 14 แม้ว่ากังฟูสามารถอธิบายการพิสูจน์ได้ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุผล มีการเชื่อมโยงข้อตั้งและข้อสรุปที่ถูกต้อง แต่การพิสูจน์นี้เป็นการใช้ความรู้เรื่องมุมแย้งที่เป็นสมบัติของเส้นขนาน และทฤษฎีบท “ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป แล้วมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น” ซึ่งไม่สอดคล้องกับแนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่าน กล่าวได้ว่ากังฟูสามารถแสดงการพิสูจน์ได้แต่การพิสูจน์นั้นยังมิใช่การประยุกต์แนวคิดไปสู่สถานการณ์อื่น ๆ



ภาพประกอบ 14 การแสดงการพิสูจน์ในสถานการณ์ 4 ของกังฟู

4) ปิงปอง ใช้การสมมติค่ามุมเป็นตัวเลขเพื่อแสดงว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ โดยกำหนดขนาดมุมที่ฐานทั้งสองมุมของ $\triangle ABC$ ให้มีขนาดเท่ากับ 40 องศา และผลรวมของขนาดมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา ดังนั้น $B\widehat{A}C$ มีขนาดเท่ากับ 100 องศา และต่อด้าน BC ออกไปทางจุด C จะได้มุมภายนอกที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากับ 140 องศา เพราะมุมตรงมีขนาดเท่ากับ 180 องศา และที่มุมเดียวกันใช้สมบัติขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา จะได้ $C\widehat{A}E$ มีขนาดเท่ากับ 40 องศา ทำให้

$B\widehat{A}C + C\widehat{A}E = 100^\circ + 40^\circ$ ดังนั้น $D\widehat{A}E$ มีขนาดเท่ากับ 40 องศา นั่นคือ $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ เพราะมีขนาด 40 องศาเท่ากัน ดังภาพประกอบ 15 แม้ว่าปิงปองสามารถแสดงได้ว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ มีการให้เหตุผลและเชื่อมโยงขนาดมุมแต่ละมุมว่าใช้สมบัติใดบ้าง ซึ่งประกอบด้วยสมบัติขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา ขนาดของมุมตรง แต่สมบัติเหล่านี้ไม่ได้เกิดจากการใช้ความรู้ที่ได้จากการอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ จึงไม่สามารถให้รหัสได้ว่าสามารถประยุกต์ความรู้สู่สถานการณ์อื่นได้



ภาพประกอบ 15 การแสดงการพิสูจน์ในสถานการณ์ 4 ของปิงปอง

เมื่อให้นักเรียนพิจารณาข้อความ 3 นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถตอบและให้เหตุผลได้ถูกต้อง เมื่อให้พิจารณาข้อความ 4 นักเรียนที่สามารถประยุกต์แนวคิดในการพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าบทพิสูจน์ที่อ่านได้มีเพียง เคนโด้ คนเดียวเท่านั้น โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ในการอธิบายว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ แม้ว่ากระบวนการพิสูจน์มีการให้เหตุผลที่ซับซ้อนและวนซ้ำ ในขณะที่รักบี้สามารถประยุกต์ความรู้จากบทพิสูจน์ที่อ่านได้ แต่ไม่สามารถสรุปได้ว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ กังฟูสามารถแสดงการพิสูจน์ได้

ถูกต้อง แต่ไม่สามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านได้ และปิงปองใช้การสมมติขนาดมุมเพื่อแสดงว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ โดยปราศจากการประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านเช่นเดียวกัน

นักเรียนสามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ไปใช้ในสถานการณ์อื่นที่มีลักษณะใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ที่อ่านได้ ซึ่งนักเรียนสามารถตอบคำถามและให้เหตุผลได้ถูกต้อง แต่เมื่อกำหนดให้นักเรียนต้องประยุกต์แนวคิดไปพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าบทพิสูจน์ นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้ข้อสรุปได้ว่าสิ่งที่ต้องพิสูจน์เป็นจริง แต่เมื่อพิจารณาการแสดงการพิสูจน์ พบว่า นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์แบบนิรนัยได้ มีนักเรียนเพียงคนเดียวเท่านั้นที่สามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่าน แต่ในขณะเดียวกันการพิสูจน์ที่นักเรียนคนนี้เขียนแสดงมีการให้เหตุผลที่วนซ้ำซึ่งมีแนวโน้มที่ไม่เข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์ นักเรียนคนที่ 2 สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ได้ถูกต้องเกือบทั้งหมดแต่ไม่สามารถสร้างข้อสรุปได้ว่าสิ่งที่ต้องพิสูจน์นั้นเป็นจริง และนักเรียนคนที่ 3 สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ได้ถูกต้องเช่นเดียวกัน ซึ่งวิธีการพิสูจน์ที่สร้างขึ้นนั้นไม่ได้เกิดจากการประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่าน แต่ใช้ทฤษฎีบท “ถ้าต่อด้านมดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป แล้วมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น” แทนการใช้ความรู้เรื่องมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ส่วนนักเรียนคนสุดท้ายสามารถให้คำตอบได้ว่าสิ่งที่ต้องการพิสูจน์นั้นเป็นจริง โดยใช้วิธีการตรวจสอบความถูกต้องด้วยการสมมติค่าขนาดของมุม และใช้ความรู้เรื่องผลบวกของขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด เพื่อสร้างข้อสรุปว่าสิ่งที่ต้องพิสูจน์นั้นเป็นจริง ซึ่งนักเรียนคนนี้มีแนวโน้มที่จะสร้างการพิสูจน์แบบสมมติค่าและไม่สามารถสร้างการพิสูจน์แบบนิรนัยได้ และนักเรียน 2 คนที่เหลือไม่สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์และระบุได้ว่าสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ถูกต้องหรือไม่

ดังนั้น ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านการประยุกต์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น นักเรียนสามารถประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านบทพิสูจน์ไปพิจารณาข้อความใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ได้ และมีนักเรียนบางส่วนที่สามารถพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าได้

3. ประเด็นที่น่าสนใจในการพิสูจน์

ประเด็นที่น่าสนใจนี้เป็นผลมาจากการศึกษากลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ขณะที่ผู้วิจัยขอให้นักเรียนแต่ละคนเล่าวิธีการอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ และถามว่านักเรียนพยายามคิดวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังอ่านการพิสูจน์หรือไม่ เมื่อนักเรียนเล่าถึง

วิธีการพิสูจน์ที่สร้างขึ้นใหม่ พบว่า มีวิธีการพิสูจน์ที่น่าสนใจ จำนวน 4 วิธี ซึ่งมีรายละเอียดดังหัวข้อวิธีการพิสูจน์ที่น่าสนใจ

3.1 **วิธีการพิสูจน์ที่น่าสนใจ**

นอกจากนักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้หรือวิธีการจากการพิสูจน์ที่กำหนดให้ไปสู่สถานการณ์อื่นแล้ว สิ่งที่แสดงถึงความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านการประยุกต์ คือ การพิสูจน์ข้อความเดิมด้วยวิธีการที่แตกต่าง มีนักเรียน 4 คน ได้แก่ กังฟู ปิงปอง เทนนิส และเคนโด้ ที่พยายามพิสูจน์ว่า AX=AY ด้วยวิธีการใหม่ มีรายละเอียด ดังนี้

กังฟู พยายามใช้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันรวมกันเท่ากับ 180 องศา แทนมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

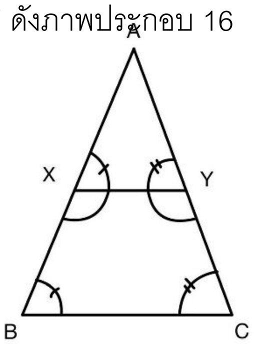
ปิงปอง พยายามใช้การเลื่อนขนานด้าน BC ขึ้นไปซ้อนทับด้าน XY เพื่อสรุปว่ามุมที่ฐานของ $\triangle ABC$ และ $\triangle AXY$ มีขนาดเท่ากัน และ $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเช่นเดียวกับ $\triangle ABC$

เทนนิส พยายามใช้ผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม เพื่ออธิบายว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ซ้อนทับอยู่ใน $\triangle ABC$ เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปใช้จุดยอดร่วมกัน และฐานขนานกัน ดังนั้นมุมที่ฐานจึงมีขนาดเท่ากัน

เคนโด้ พยายามพิสูจน์โดยใช้ความยาวด้านมาหักออกจากกัน โดยอธิบายว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AB=AC ถ้ามีเส้นตรงมาขนานกับฐาน จะได้ $\square BCYX$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ทำให้ XB=YC ดังนั้น $AB - XB = AC - YC$

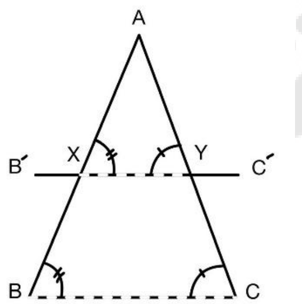
เมื่อพิจารณาวิธีการพิสูจน์ทั้ง 4 พบว่า มีเพียงวิธีการของกังฟูเท่านั้นที่แสดงถึงการขยายขอบเขตความเข้าใจการพิสูจน์ออกไป เพราะวิธีการพิสูจน์ที่ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุใช้วิธีการพิสูจน์แบบนิรนัยมีการเชื่อมโยงระหว่างข้อตั้งและข้อสรุป โดยมีวิธีการพิสูจน์ดังนี้ เนื่องจาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AB=AC ทำให้ $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$ และใช้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันรวมกันเท่ากับ 180 องศา จะได้ว่า $A\widehat{B}C + B\widehat{X}Y = 180^\circ$ และ $A\widehat{C}B + C\widehat{Y}X = 180^\circ$ และใช้ขนาดของมุมประชิดรวมกันเท่ากับ 180 องศา จะได้ว่า

$A\widehat{X}Y + B\widehat{X}Y = 180^\circ$ และ $A\widehat{Y}X + C\widehat{Y}X = 180^\circ$ ดังนั้น $A\widehat{X}Y = A\widehat{Y}X$ ทำให้ $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว นั่นคือ AX=AY ดังภาพประกอบ 16



ภาพประกอบ 16 วิธีการพิสูจน์ของกังฟู

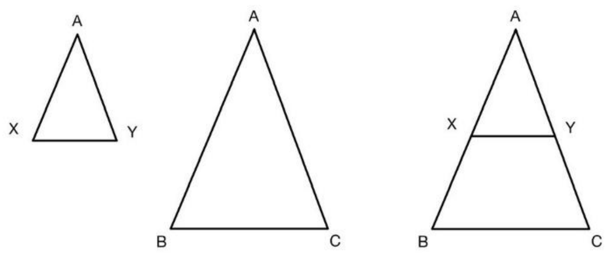
วิธีการพิสูจน์ของปิงปอง คือ พยายามใช้การแปลงทางเรขาคณิตด้วยการเลื่อนขนานด้าน BC ขึ้นไปซ้อนทับด้าน XY เพื่อสรุปว่ามุมที่ฐานของ $\triangle ABC$ และ $\triangle AXY$ มีขนาดเท่ากัน และ $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเช่นเดียวกับ $\triangle ABC$ ดังนั้น AX=AY ดังภาพประกอบ 17 ซึ่งวิธีการพิสูจน์นี้ไม่เป็นที่นิยมในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เนื่องจากวิธีการนี้เป็นเพียงการตรวจสอบว่าสิ่งที่กำลังพิสูจน์นั้นถูกต้องหรือไม่ ไม่มีการให้เหตุผลตามหลักการอ้างเหตุผล แม้ว่าปัจจุบันในทางเรขาคณิตยอมรับว่าการเคลื่อนวัตถุทำให้ขนาดไม่เปลี่ยนแปลง แต่เป็นการยอมรับในเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตเท่านั้น



ภาพประกอบ 17 วิธีการพิสูจน์ของปิงปอง

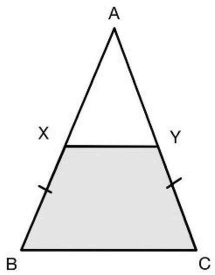
วิธีการพิสูจน์ของเทนนิส คือ พยายามใช้ผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเพื่ออธิบายว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ซ้อนทับอยู่ใน $\triangle ABC$ เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปใช้จุดยอดร่วมกัน และฐานขนานกัน ดังนั้นมุมที่ฐานจึงมีขนาดเท่ากัน จึงสรุปว่า AX=AY ดังภาพประกอบ 18 เมื่อพิจารณาโดยละเอียด พบว่าการพิสูจน์ของเทนนิสนั้นไม่ถูกต้อง เนื่องจากยอมรับสิ่งที่ต้องพิสูจน์เพื่อนำมาใช้เป็นข้อตั้งในการสรุปว่า AX=AY โดยอนุมานไปเองว่ามุมที่

ฐานเท่ากันแบบคู่ต่อคู่ ซึ่งในความเป็นจริงแล้วไม่ได้มีการให้เหตุมารองรับว่ามุมแต่ละคู่เท่ากันด้วยเหตุผลใด ให้เหตุผลเพียงว่านอกจากมุมยอดร่วมกันแล้วมุมที่เหลือจะเท่ากันเพียงเพราะขนาดมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมทั้งมุมรวมกันเท่ากับ 180 องศา ซึ่งเป็นวิธีการที่คล้ายกับการเทียบขนาดของมุมที่เท่ากันคู่ต่อคู่ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน ซึ่งชี้ให้เห็นว่าเทนนิสยอมรับยอมรับสิ่งที่ต้องพิสูจน์มาใช้เป็นเงื่อนไขในการแสดงการพิสูจน์ เนื่องจากยอมรับว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน นั่นก็คือ $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยไม่ได้มีการพิสูจน์มาก่อน



ภาพประกอบ 18 วิธีการพิสูจน์ของเทนนิส

วิธีการพิสูจน์ของเคนโด้ คือ พยายามพิสูจน์โดยใช้ความยาวด้านมาหักออกจากกัน โดยอธิบายว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB=AC$ ถ้ามีเส้นตรงมาขนานกับฐานจะได้ $\square BCYX$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ทำให้ $XB=YC$ ดังนั้น $AB-XB=AC-YC$ ดังภาพประกอบ 19 ซึ่งชี้ให้เห็นว่าเคนโด้ยอมรับสิ่งที่ต้องพิสูจน์ เนื่องจากให้เหตุผลเพียงว่า $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จึงยอมรับว่า $\square BCYX$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว โดยที่ยังไม่มีการพิสูจน์ว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



ภาพประกอบ 19 วิธีการพิสูจน์ของเคนโด้

จากวิธีการพิสูจน์ที่แตกต่างกันทั้ง 4 วิธี พบว่ามีเพียงวิธีเดียวเท่านั้นที่เป็นวิธีการพิสูจน์ที่ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุผล คือวิธีการพิสูจน์ของกังฟู ส่วนอีก 3 วิธีการที่เหลือ ได้แก่ ของปิงปอง เทนนิส และเคนโด้ นั้นไม่เป็นที่ยอมในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเนื่องจาก วิธีการพิสูจน์ของปิงปองใช้การเลื่อนขนานมาตรวจสอบสิ่งที่ต้องพิสูจน์เท่านั้น เนื่องจากการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไม่นิยมใช้การแปลงทางเรขาคณิตในการพิสูจน์แต่อาศัยหลักการสร้างทางเรขาคณิตแทนการเคลื่อนรูป และวิธีการพิสูจน์ของเทนนิสและเคนโด้อาศัยการยอมรับสิ่งที่ต้องพิสูจน์มาใช้เป็นข้อตั้งหรือเงื่อนไขที่จำเป็นเพื่อทำการพิสูจน์สิ่งที่ต้องพิสูจน์วนซ้ำอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งไม่ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุที่ต้องเชื่อมโยงข้อตั้งเพื่อสร้างข้อสรุป

แม้ว่าทั้ง 4 วิธีการพิสูจน์นี้มีวิธีการที่ถูกต้องเพียงวิธีเดียวเท่านั้น ส่วนอีก 3 วิธีการไม่ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุผล แต่สิ่งที่น่าสนใจในวิธีการพิสูจน์ทั้ง 4 วิธีนี้ เพราะ การพิสูจน์ คือการค้นหาวิธีการใหม่ ๆ จะเห็นได้ว่านักเรียนทั้ง 4 คนนี้พยายามสร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่ โดยทั้ง 4 วิธีนี้ใช้ความรู้ที่แตกต่างกันทั้งหมด ซึ่งในบางวิธีการนักเรียนอาจจะต้องได้รับการชี้แนะเพื่อให้พิจารณาความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์แต่ละข้อความ ความสัมพันธ์ระหว่างข้อความพิสูจน์กับบรรทัดก่อนหน้า และภาพรวมของการพิสูจน์เพื่อเชื่อมโยงข้อตั้งและข้อสรุป เพื่อหลีกเลี่ยงวิธีการที่ไม่เหมาะสม ได้แก่ (1) การยอมรับสิ่งที่ต้องพิสูจน์มาเป็นหนึ่งในข้อตั้ง เงื่อนไขหรือเหตุผลที่ใช้อ้างเพื่อสร้างข้อสรุปนั้นอีกครั้งหนึ่ง (2) การใช้การเลื่อนขนานในการแปลงทางเรขาคณิตเพื่อเคลื่อนวัตถุแทนการสร้างทางเรขาคณิต

ตอนที่ 2 กลยุทธ์ที่ใช้ในการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์เป็นการกระทำที่นักเรียนโต้ตอบโดยตรงกับข้อความเพื่อวางแผน ติดตาม โดยใช้ความพยายามในการถอดรหัสข้อความ และทำความเข้าใจคำ และสร้างความหมายของข้อความ ที่เกิดขึ้นก่อน ระหว่าง และหลังการคิด ซึ่งตอนที่ 2 นี้นำเสนอกลยุทธ์ที่นักเรียนใช้ในการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์เพื่อตอบคำถามการวิจัยข้อที่สอง กลยุทธ์ที่ใช้ในการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีลักษณะเป็นอย่างไร โดยกำหนดให้นักเรียนอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ รวบรวมข้อมูลจากการสัมภาษณ์และบันทึกภาคสนาม และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในวิเคราะห์ข้อมูล การศึกษากลยุทธ์ที่นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นใช้ในการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นการศึกษาความพยายามของนักเรียนในการถอดรหัสข้อความ ทำความเข้าใจคำศัพท์ และสร้างความหมายของข้อความในการพิสูจน์

โดยการศึกษาครั้งนี้กำหนดให้นักเรียนอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยทั้ง 6 คนใช้เวลาอ่านที่ใกล้เคียงกัน ประมาณ 3-10 นาที และเข้าสู่กระบวนการสัมภาษณ์ใช้เวลาประมาณ 30 นาที โดยบันทึกวิดีโอและบันทึกภาคสนามตลอดการอ่านและการสัมภาษณ์ ข้อมูลที่ได้จากการรวบรวม ได้แก่ วิดีโอการสัมภาษณ์ งาน:ความเข้าใจการพิสูจน์ และบันทึกภาคสนาม โดยผู้วิจัยได้สังเคราะห์ข้อมูลจากบันทึกการสัมภาษณ์ที่ได้มาจากถอดเสียงวิดีโอการสัมภาษณ์ ร่องรอยการทำเครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ของงาน:ความเข้าใจการพิสูจน์ บันทึกภาคสนามที่บันทึกขณะดูนักเรียนอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้และสัมภาษณ์ และดูวิดีโอประกอบการสังเคราะห์ข้อมูลออกมาเป็นวิธีการอ่านของนักเรียนแต่ละคนว่ามีลักษณะการอ่านอย่างไร มีการแสดงออกของพฤติกรรมใดบ้าง และนำวิธีการอ่านของนักเรียนแต่ละคนมาวิเคราะห์ว่ามีการใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ใดบ้าง โดยพิจารณาตั้งแต่ก่อนอ่าน ขณะอ่าน และหลังอ่าน ซึ่งมีรายละเอียดดังหัวข้อวิธีการอ่าน

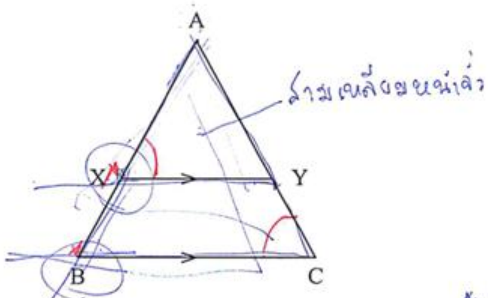
วิธีการอ่าน

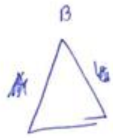
เมื่อให้นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยทั้ง 6 คน อ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ และสัมภาษณ์การใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตนักเรียนเป็นรายบุคคล ผลปรากฏดังนี้

1. วิธีการอ่านของเบสบอล

เบสบอล เริ่มจากการอ่านข้อเสนอและข้อความพิสูจน์กำหนดให้ 2 ครั้ง ครั้งแรกใช้การอ่านเร็ว ๆ แบบข้ามคำ แม้ว่าจะพบคำศัพท์หรือข้อความที่ไม่เข้าใจ หรือไม่สามารถเข้าใจได้ในทันที ก็จะอ่านต่อไปจนจบการพิสูจน์ และในครั้งที่สองจะอ่านอย่างระมัดระวัง โดยเริ่มกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องข้อความ และขีดเส้นใต้คำที่ไม่สามารถเข้าใจได้ในทันที ในการอ่านข้อความพิสูจน์แต่ละบรรทัดจะย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ หากข้อความใดที่ยังไม่เข้าใจจะย้อนกลับไปดูภาพและกลับมาอ่านทวนข้อความซ้ำ ๆ จนเข้าใจ (ซึ่งมีรายละเอียดการทำสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความ ดังภาพประกอบ 20)

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$





สิ่งที่กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$

พิสูจน์	จาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 1
	ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 2
	เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 3
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 4
	และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 5
	ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	(สมบัติของการเท่ากัน)	บรรทัดที่ 6
	ดังนั้น ΔAXY เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 7
	นั่นคือ $AX = AY$	(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 20 การกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความของเบสบอล

จากวิธีการอ่านของเบสบอลพบว่า ใช้กลยุทธ์การอ่านการพิสูจน์เพื่อความเข้าใจในขณะอ่านการพิสูจน์เท่านั้น กลยุทธ์ที่ใช้ ได้แก่

1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน

2) พยายามอ่านต่อไปเพื่อดูว่ามีขั้นตอนอย่างไรบ้าง

3) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์

4) ใช้การอ่านเร็ว ๆ แบบข้ามคำแล้วอ่านอย่างระมัดระวัง

5) พยายามคิดเกี่ยวกับข้อความที่ยังไม่เข้าใจ

6) ย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจ

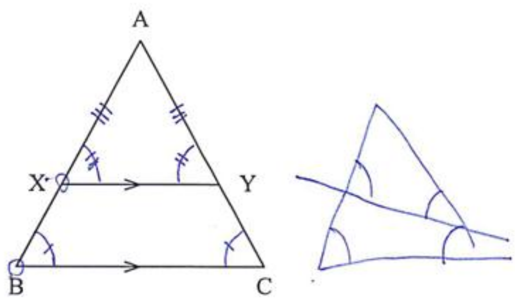
7) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ

8) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์

2. วิธีการอ่านของรักบี้

รักบี้ เริ่มจากการอ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ ขีดเส้นใต้คำศัพท์และข้อความสำคัญเพื่อระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ ข้ามการดูภาพในครั้งแรก ตรวจสอบสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ที่ระบุไว้ในการพิสูจน์ว่าตรงกับที่ระบุไว้หรือไม่และทำการอ่านข้อความพิสูจน์อย่างระมัดระวังตั้งแต่ครั้งแรก และจะย้อนกลับมาดูภาพประกอบการอ่าน โดยข้ามการดูภาพในข้อความที่ให้เหตุผลว่าเป็นสิ่งที่กำหนดให้ และดูภาพซ้ำมากกว่า 1 ครั้งในข้อความที่ยังไม่สามารถเข้าใจได้ทันที ขณะที่ย้อนกลับไปดูภาพแต่ละครั้งจะกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์ (ซึ่งมีรายละเอียดการทำสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความดังภาพประกอบ 21)

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} // \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} // \overline{BC}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$

พิสูจน์	จาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 1
	ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 2
	เนื่องจาก $\overline{XY} // \overline{BC}$	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 3
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 4
	และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 5
	ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	(สมบัติของการเท่ากัน)	บรรทัดที่ 6
	ดังนั้น ΔAXY เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 7
	นั่นคือ $AX = AY$	(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 21 การกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความของรักบี้

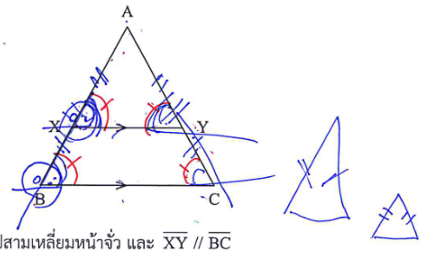
จากวิธีการอ่านของรักบี้พบว่า ใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ตั้งแต่ก่อนเริ่มอ่านและขณะอ่าน กลยุทธ์ที่ใช้ ได้แก่

1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน
2) ระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนอ่านการพิสูจน์
3) ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์
4) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์
5) พยายามคิดเกี่ยวกับข้อความที่ยังไม่เข้าใจ
6) อ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน
7) ย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจ
8) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ
9) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์

3. วิธีการอ่านของเทนนิส

เทนนิส เริ่มจากการอ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ ระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์และคิดว่าจะทำอย่างไรให้สรุปได้ว่า AX=AY และทำการอ่านข้อความพิสูจน์โดยข้ามภาพที่แนบ สิ่งที่กำหนดให้ และเริ่มอ่านสิ่งที่ต้องพิสูจน์เพื่อตรวจสอบว่าตรงกับที่คิดไว้ก่อนหน้าหรือไม่ ในครั้งแรกใช้การอ่านการเร็ว ๆ แบบข้ามคำ ขีดเส้นใต้คำศัพท์สำคัญ เช่น สมบัติ บทนิยาม ทำสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความ และระบุขั้นตอนสำคัญของการพิสูจน์ เมื่ออ่านครั้งแรกเสร็จสิ้นจะถามตัวเองว่ายังไม่เข้าใจข้อความใดบ้าง จะทำอย่างไรให้เข้าใจต้องใช้สมบัติใดบ้าง และจะกลับไปอ่านการพิสูจน์อีกครั้งโดยเริ่มอ่านข้อเสนอและข้อความพิสูจน์ในการอ่านครั้งนี้เป็นการอ่านอย่างระมัดระวัง และย้อนกลับไปดูภาพประกอบการอ่านทุก ๆ ข้อความ ข้อความใดที่ยังไม่สามารถเข้าใจได้ในทันทีจะย้อนกลับไปดูภาพกลับมาอ่านทวนซ้ำ ๆ จนเข้าใจ และจะเริ่มอ่านบรรทัดต่อไป (ซึ่งมีรายละเอียดการทำสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความ ดังภาพประกอบ 22)

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} // \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้	ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} // \overline{BC}$		
สิ่งที่ต้องพิสูจน์	$AX = AY$		
พิสูจน์	จาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 1
	ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 2
	เนื่องจาก $\overline{XY} // \overline{BC}$	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 3
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 4
	และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 5
	ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	(สมบัติของการเท่ากัน)	บรรทัดที่ 6
	ดังนั้น ΔAXY เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 7
	นั่นคือ $AX = AY$	(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 22 การกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความของเทนนิส

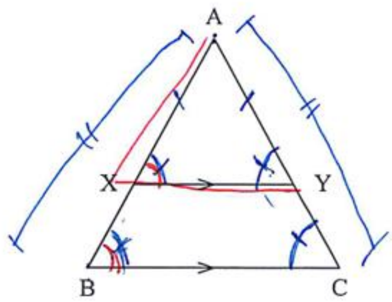
จากวิธีการอ่านของเทนนิสพบว่า ใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ตั้งแต่ก่อนเริ่มอ่านและขณะอ่าน กลยุทธ์ที่ใช้ ได้แก่

1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน
2) ระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนอ่านการพิสูจน์
3) ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์
4) พยายามคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์หลังอ่านข้อเสนอ
5) ใช้การอ่านเร็ว ๆ แบบข้ามคำแล้วอ่านอย่างระมัดระวัง
6) พยายามอ่านต่อไปเพื่อดูว่ามีขั้นตอนอย่างไรบ้าง
7) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์
8) ระบุขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์
9) ขีดเส้นใต้สมบัติหรือบทนิยามในข้อความพิสูจน์
10) พยายามคิดเกี่ยวกับข้อความที่ยังไม่เข้าใจ
11) อ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน
12) ย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจ
13) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ
14) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์

4. วิธีการอ่านของกังฟู

กังฟู เริ่มจากการอ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ ระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ อ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอนและระบุขั้นตอนที่สำคัญ โดยย้อนกลับไปดูภาพประกอบการอ่านรายบรรทัดพร้อมทั้งทำสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความเพื่อทำให้เข้าใจมากขึ้น ข้อความใดที่ไม่สามารถเข้าใจได้ในทันทีจะย้อนกลับไปดูภาพจะใช้การกลับมาอ่านทวนซ้ำ ๆ จนเข้าใจ และพยายามคิดเกี่ยวกับสมบัติของคำศัพท์ที่ยังไม่เข้าใจ เมื่ออ่านจบจะตรวจสอบความถูกต้องของการพิสูจน์ด้วยการอ่านทวนซ้ำ และคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์และแก้ไขข้อความพิสูจน์เพื่อเปรียบเทียบกับการพิสูจน์ที่กำหนดให้ (ซึ่งมีรายละเอียดการทำสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความ ดังภาพประกอบ 23)

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้	ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$		
สิ่งที่ต้องพิสูจน์	$AX = AY$		
พิสูจน์	จาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 1
	ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 2
	เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 3
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 4
	และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 5
	ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	(สมบัติของการเท่ากัน)	บรรทัดที่ 6
	ดังนั้น ΔAXY เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 7
	นั่นคือ $AX = AY$	(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 23 การกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความของกังฟู

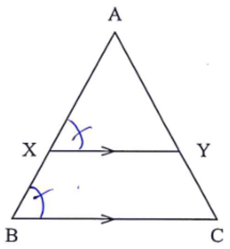
จากวิธีการอ่านของกังฟูพบว่า ใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ตั้งแต่ก่อนเริ่มอ่าน ขณะอ่าน และหลังอ่าน กลยุทธ์ที่ใช้ ได้แก่

1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน
2) ระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนอ่านการพิสูจน์
3) ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์
4) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์
5) ระบุขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์
6) พยายามคิดเกี่ยวกับข้อความที่ยังไม่เข้าใจ
7) อ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน
8) ย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจ
9) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ
10) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์
11) พิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์
12) พยายามคิดวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังอ่านการพิสูจน์

5. วิธีการอ่านของเคนโด้

เคนโด้ เริ่มจากการอ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ ระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ คิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ว่าจะเริ่มพิสูจน์และสรุปผลอย่างไร และทำการอ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน ระบุขั้นตอนสำคัญของการพิสูจน์ ในทุก ๆ ขั้นตอนจะย้อนกลับไปดูภาพ และทำสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความ เมื่ออ่านจบจะเปรียบเทียบการพิสูจน์กับของตนเองว่าแตกต่างหรือเหมือนกับวิธีที่ตนคิดอย่างไร และกลับไปอ่านทวนซ้ำอีกครั้งหนึ่งเมื่ออ่านครั้งที่สองจบจะพยายามคิดเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อเสนอด้วยวิธีการพิสูจน์ที่แตกต่าง (ซึ่งมีรายละเอียดการทำสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความ ดังภาพประกอบ 24)

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้	ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$		
สิ่งที่ต้องพิสูจน์	$AX = AY$		
พิสูจน์	จาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 1
	ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 2
	เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 3
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 4
	และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 5
	ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	(สมบัติของการเท่ากัน)	บรรทัดที่ 6
	ดังนั้น ΔAXY เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 7
	นั่นคือ $AX = AY$	(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 24 การกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความของเคนโด้

จากวิธีการอ่านของเคนโด้พบว่า ใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ตั้งแต่ก่อนเริ่มอ่าน ขณะอ่าน และหลังอ่าน กลยุทธ์ที่ใช้ ได้แก่

1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน

2) ระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนอ่านการพิสูจน์

3) ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์

4) พยายามคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์หลังอ่านข้อเสนอ

5) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์

6) ระบุขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์

7) อ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน

8) ย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจ

9) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ

10) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์

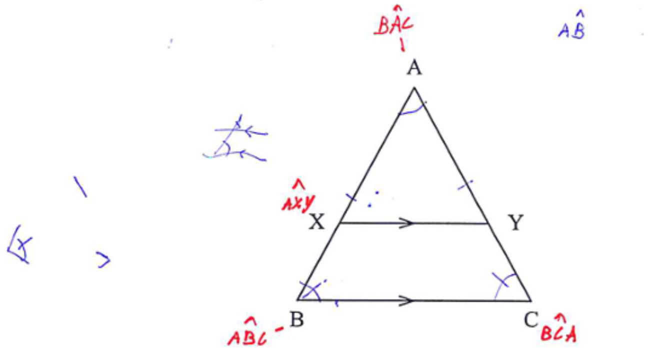
11) พิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์

12) พยายามคิดวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังอ่านการพิสูจน์

6. วิธีการอ่านของปิงปอง

ปิงปอง เริ่มจากการอ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ ระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ คิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ว่าจะเริ่มพิสูจน์และสรุปผลอย่างไร และทำการอ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน ระบุขั้นตอนสำคัญของการพิสูจน์ ในทุก ๆ ขั้นตอนจะย้อนกลับไปดูภาพ และทำสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความ เมื่ออ่านจบจะเปรียบเทียบการพิสูจน์กับของตนเองว่าแตกต่างหรือเหมือนกับวิธีที่ตนคิดอย่างไร (ซึ่งมีรายละเอียดการทำสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความดังภาพประกอบ 25)

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} // \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$



สิ่งที่กำหนดให้	ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} // \overline{BC}$		
สิ่งที่ต้องพิสูจน์	$AX = AY$		
พิสูจน์	จาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 1
	ดังนั้น $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 2
	เนื่องจาก $\overline{XY} // \overline{BC}$	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 3
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 4
	และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	(มุมภายนอกและมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 5
	ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	(สมบัติของการเท่ากัน)	บรรทัดที่ 6
	ดังนั้น ΔAXY เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 7
	นั่นคือ $AX = AY$	(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 8

ภาพประกอบ 25 การกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพและข้อความของปิงปอง

จากวิธีการอ่านของปิงปองพบว่า ใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ตั้งแต่ก่อนเริ่มอ่าน ขณะอ่าน และหลังอ่าน กลยุทธ์ที่ใช้ ได้แก่

1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน
2) ระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนอ่านการพิสูจน์
3) ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์
4) พยายามคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์หลังอ่านข้อเสนอ
5) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์
6) อ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน
7) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ
8) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์
9) พิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์

การใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ผลการศึกษาการใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ได้การพิสูจน์ที่กำหนดให้จนเสร็จสิ้นกระบวนการอ่านของนักเรียนทั้ง 6 คน เมื่อวิเคราะห์วิธีการอ่านของนักเรียนเป็นรายบุคคล และสรุปกลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งมีรายละเอียดดังตาราง 3 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เลือกอ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อนแทนการข้ามไปอ่านข้อความพิสูจน์หรืออ่านข้อสรุปของการพิสูจน์ มีการระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์ มีการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพประกอบที่แนบในการพิสูจน์ที่กำหนดให้ อ่านข้อความทีละบรรทัดและพยายามคิดเกี่ยวกับข้อความที่อ่านพบแล้วยังไม่เข้าใจ และจะย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจหรือเมื่อพบข้อความที่ยังไม่เข้าใจ และเมื่ออ่านจบในรอบแรกจะย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจอีกครั้งหนึ่ง

เมื่อพิจารณาโดยละเอียดอีกครั้งหนึ่ง พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่จะอ่านข้อเสนอก่อน และเริ่มระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เริ่มอ่านข้อความพิสูจน์ทีละขั้นตอน และจะย้อนกลับไปดูภาพเมื่อไม่เข้าใจ ซึ่งสอดคล้องกับความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านความรู้พื้นฐานที่นักเรียนส่วนใหญ่มีความเข้าใจการพิสูจน์ด้านนี้ยกเว้นเบสบอล แต่ในขณะเดียวกันเมื่อพิจารณาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านสถานะเชิงตรรกะนักเรียนส่วนใหญ่ที่อ่านขั้นตอนอย่างละเอียดทีละขั้นตอนและระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ สามารถระบุสมบัติที่ต้องใช้ในการพิสูจน์ที่กำหนด และสามารถบอกลำดับเชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์ เพื่อ

เชื่อมโยงความสัมพันธ์เชิงตรรกะระหว่างข้อตั้งและข้อสรุปได้ แต่ไม่สามารถใช้ข้อมูลในส่วนนี้เชื่อมโยงสมบัติที่นำมาใช้เป็นข้อตั้งโดยไม่ต้องอธิบายเพิ่มเติมได้

นอกจากนี้ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านการให้ข้อสรุป กลยุทธ์ที่นักเรียนได้แก่ กังฟู และเคนโด้ ใช้ คือ ระบุขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์ ซึ่งสอดคล้องกับเมื่อขอให้นักเรียนระบุข้อตั้งและขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ และในขณะเดียวกันด้านความทั่วไปนักเรียนสามารถพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ โดยพิจารณาจากการให้เหตุผลของการพิสูจน์ว่าเป็นไปตามการพิสูจน์แบบนิรนัยหรือไม่ และนักเรียนมีการใช้กลยุทธ์ที่พยายามคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังจากอ่านการพิสูจน์ ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการพิสูจน์ที่น่าสนใจที่เป็นส่วนหนึ่งของความเข้าใจการพิสูจน์ด้านการประยุกต์ที่นักเรียนพยายามพิสูจน์ข้อเสนอด้วยวิธีการใหม่ แม้ว่าวิธีการพิสูจน์ของนักเรียนที่คิดวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่จะไม่ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุผลแต่นักเรียนพยายามใช้ความรู้ที่นอกเหนือจากที่พบหรือปรากฏในการพิสูจน์ที่กำหนดให้

ตาราง 3 สรุปกลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจ	เบสบอล	รักบี้	เทนนิส	กังฟู	เคนโด้	ปิงปอง
1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2) ระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนอ่านการพิสูจน์		✓	✓	✓	✓	✓
3) ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์		✓	✓	✓	✓	✓
4) พยายามคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์หลังอ่านข้อเสนอ			✓		✓	✓
5) ใช้การอ่านเร็ว ๆ แบบข้ามคำแล้วอ่านอย่างระมัดระวัง	✓		✓			
6) พยายามอ่านต่อไปเพื่อดูว่ามีขั้นตอนอย่างไรบ้าง	✓		✓			
7) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8) ระบุขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์				✓	✓	
9) ขีดเส้นใต้สมบัติหรือบทนิยามในข้อความพิสูจน์			✓			
10) พยายามคิดเกี่ยวกับข้อความที่ยังไม่เข้าใจ	✓	✓	✓	✓		
11) อ่านข้อความทีละขั้นตอน		✓	✓	✓	✓	✓
12) ย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจ	✓	✓	✓	✓	✓	
13) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ	✓	✓	✓	✓	✓	✓
14) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์	✓	✓	✓	✓	✓	✓
15) พิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์				✓	✓	✓
16) พยายามคิดวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังอ่านการพิสูจน์				✓	✓	

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะจากการวิจัย

จากการศึกษาความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อตอบคำถามการวิจัยทั้ง 2 ข้อ ได้แก่ 1) ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และ 2) กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต พบว่านักเรียนแต่ละคนมีลักษณะของธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่แตกต่างกันออกไป ทั้ง 5 ด้าน ได้แก่ ด้านความรู้พื้นฐาน ด้านสถานะเชิงตรรกะ ด้านการให้ข้อสรุป ด้านความทั่วไป และด้านการประยุกต์ อีกทั้งเมื่อนักเรียนอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ มีการใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ที่แตกต่างกันออกไปโดยสิ้นเชิง โดยสามารถอภิปรายผลตามประเด็นต่าง ๆ ดังนี้

สรุปผลการวิจัย

1. ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

1) ด้านความรู้พื้นฐาน นักเรียนเข้าใจความหมายคำศัพท์ และสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ได้ เข้าใจรูปที่ประกอบการพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น นักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น

2) ด้านสถานะเชิงตรรกะ นักเรียนสามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความพิสูจน์ได้ ระบุสมบัติที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ และระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความระหว่างบรรทัดในบทพิสูจน์ได้

3. ด้านการให้ข้อสรุป มีนักเรียนบางส่วนที่สามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญ เงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของบทพิสูจน์ และสามารถให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้

4. ด้านความทั่วไป นักเรียนมีวิธีพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ 3 ลักษณะ ดังนี้ (1) พิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์ (2) เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง และ (3) สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่และเปรียบเทียบข้อสรุปของการพิสูจน์ นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ในการพิจารณาความถูกต้องของข้อความพิสูจน์ที่ใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ แต่ไม่สามารถพิจารณาข้อความที่มีความซับซ้อนกว่าได้

5. ด้านการประยุกต์ นักเรียนสามารถประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านบทพิสูจน์ไปพิจารณาข้อความใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ได้ แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าได้

2. กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่นักเรียนแสดงออกขณะอ่านการพิสูจน์ที่กำหนดให้ มีทั้งหมด 16 กลยุทธ์ ดังนี้

1) อ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อน

2) ระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนอ่านการพิสูจน์

3) ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ก่อนอ่านการพิสูจน์

4) พยายามคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์หลังอ่านข้อเสนอ

5) ใช้การอ่านเร็ว ๆ แบบข้ามคำแล้วอ่านอย่างระมัดระวัง

6) พยายามอ่านต่อไปเพื่อดูว่ามีขั้นตอนอย่างไรบ้าง

7) กำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์

8) ระบุขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์

9) ขีดเส้นใต้สมบัติหรือบทนิยามในข้อความพิสูจน์

10) พยายามคิดเกี่ยวกับข้อความที่ยังไม่เข้าใจ

11) อ่านข้อความทีละขั้นตอน

12) ย้อนกลับไปอ่านทวนเพื่อเพิ่มความเข้าใจ

13) ย้อนกลับไปดูภาพเพื่อเพิ่มความเข้าใจ

14) พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างภาพและกระบวนการพิสูจน์

15) พิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์

16) พยายามคิดวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังอ่านการพิสูจน์

การอภิปรายผล

1. ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

1.1 ด้านความรู้พื้นฐาน

นักเรียนเข้าใจความหมายคำศัพท์ จากการที่ให้นักเรียนให้คำจำกัดความของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว นักเรียนทั้ง 6 คนสามารถให้คำจำกัดความที่สื่อความหมายว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมีนักเรียน 2 คน จาก 6 คน ที่มีการให้ความหมายที่เกินความจำเป็น ให้นิยามตามความรู้สึกมากกว่าการให้นิยามด้วยเงื่อนไขที่จำเป็น มีการอธิบายความหมายจากลักษณะที่พบ เช่น ในกรณีของเทนนิสได้นิยามรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไว้ว่า “รูปสามเหลี่ยมที่มีผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180 องศา มีสองมุมที่เท่ากัน มีสองด้านที่เท่ากัน ถ้าไม่ตรงกับสมบัติใดสมบัติหนึ่งอาจจะเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดอื่น ๆ เพราะถ้าสามมุมเท่ากันจะเป็นรูปสามเหลี่ยม

ด้านเท่า ต้องกำหนดไว้ที่สอง ถ้าน้อยกว่าหรือมากกว่าสองจะไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” เมื่อพิจารณาโดยละเอียดพบว่า เทนนิสให้ความหมายที่ซ้ำซ้อน โดยระบุว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมและเน้นว่าต้องมีผลรวมของมุมภายในเท่ากับ 180 องศา อีกทั้งยังมีการเน้นย้ำเพิ่มเติมว่าต้องมีสองมุมที่เท่ากันเท่านั้น แสดงให้เห็นว่าเทนนิสให้นิยามโดยอาศัยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมากกว่าพิจารณาเงื่อนไขที่จำเป็นในการให้ความหมาย ในทำนองเดียวกันกังฟูก็มีการให้คำจำกัดความที่คล้ายกัน คือ ระบุว่าด้านประกอบมุมยอดเท่ากัน แล้วมุมที่ฐานจะเท่ากัน กังฟูให้คำจำกัดความจากการพิจารณาด้าน และอธิบายเพิ่มเติมถึงสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วว่ามุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน

แม้ว่านักเรียนทั้งสองคนนี้ให้ความหมายโดยไม่คำนึงถึงเงื่อนไขที่จำเป็น แต่เมื่อถามถึงสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สามารถบอกสมบัติได้ถูกต้อง ในทางตรงกันข้ามกลับพบว่าเบสบอลที่ให้นิยามไว้ว่า “รูปสามเหลี่ยมที่มีสองด้านเท่ากัน” แต่ไม่สามารถบอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้เลย และเบสบอลมักจจะให้คำตอบแบบสุ่ม โดยพยายามเลือกคำหรือข้อความที่พบในปัญหา หรือคำถามจากการสัมภาษณ์มาตอบ ซึ่งพฤติกรรมเหล่านี้อาจจะชี้ได้ว่าเบสบอลไม่ได้เข้าใจความหมายของคำศัพท์เหล่านั้นจริง ๆ แต่เป็นเพียงการจดจำความหมายบางส่วน ดังนั้นการให้ความหมายที่ไม่ตรงตามหนังสือเรียนไม่ได้หมายความว่านักเรียนคนนั้นจะไม่มีความเข้าใจในคำศัพท์เหล่านั้น แต่เป็นการอธิบายความหมายของคำตามความเข้าใจในภาษาของตนเอง นั่นคือ การให้เลือกตอบว่าความหมายตรงกับข้อใดอาจไม่เพียงพอ แบบประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ควรพิจารณาการอธิบายความหมาย หรืออธิบายสมบัติของคำศัพท์ ข้อความ หรือสัญลักษณ์เพิ่มเติมด้วย

ในขณะที่นักเรียนอ่านบทพิสูจน์ มีการกำหนดสัญลักษณ์ลงรูปที่ประกอบการพิสูจน์ให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์ เพื่อทำความเข้าใจสัญลักษณ์ที่อ่านพบและข้อความพิสูจน์ ติดตามกระบวนการพิสูจน์ ตระหนักถึงความสัมพันธ์ของรูปประกอบกับกระบวนการพิสูจน์ สร้างความเชื่อมโยงระหว่างข้อความพิสูจน์ที่อ่านกับรูปประกอบการพิสูจน์ และสร้างความหมายของข้อความพิสูจน์ที่กำลังอ่าน แสดงถึงนักเรียนมีความเข้าใจในข้อความพิสูจน์นั้น ซึ่งสอดคล้องกับการใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่นักเรียนกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์ และพยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรูปประกอบและกระบวนการพิสูจน์ อีกทั้งยังช่วยให้นักเรียนใช้เวลาในการย้อนกลับมาอ่านน้อยลง

1.2 ด้านสถานะเชิงตรรกะ

ในขณะที่นักเรียนอ่านบทพิสูจน์นั้น นักเรียนใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ ระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ และจากด้านความรู้พื้นฐานนักเรียนมีความเข้าใจความหมายคำศัพท์ สามารถให้นิยามของคำศัพท์ที่เกี่ยวข้องกับบทพิสูจน์ที่อ่านได้นั้น ทำให้นักเรียนตระหนักถึงสมบัติของคำศัพท์ที่อ่านพบ และเชื่อมโยงสมบัติของคำศัพท์กับสมบัติที่นำมาใช้ในบทพิสูจน์ จนสามารถระบุสมบัติที่นำมาใช้ในบทพิสูจน์ได้เป็นส่วนใหญ่ และระบุสถานะเชิงตรรกะของความพิสูจน์ได้ถูกต้อง

นอกจากนี้ เมื่อให้นักเรียนพิจารณาข้อความ “ถ้ากระบวนการพิสูจน์เรียงบรรทัดใหม่เป็น 1, 2, 3, <u>5, 4</u>, 6, 7, 8 นั้นถูกต้องนักเรียนมีความเห็นอย่างไร” นักเรียนทุกคนให้เหตุผลว่า “สามารถสลับบรรทัดในการเขียนพิสูจน์ได้ เนื่องจากบรรทัดที่ 4 และบรรทัดที่ 5 เป็นการอ้างในทำนองเดียวกัน” อาจกล่าวได้ว่านักเรียนสามารถพิจารณาการเชื่อมโยงเชิงตรรกะระหว่างข้อความกับบรรทัดก่อนหน้าได้ นักเรียนสามารถมองการเชื่อมโยงเชิงตรรกะในภาพรวมได้ และเมื่อให้นักเรียนพิจารณาข้อความ “ถ้าสลับกระบวนการพิสูจน์เรียงบรรทัดใหม่เป็น 1, 2, <u>4, 3</u>, 5, 6, 7, 8 นั้นถูกต้องนักเรียนมีความเห็นอย่างไร” ปรากฏว่า นักเรียนทุกคนให้ความเห็นไปในทิศทางเดียวกันว่า “ไม่สามารถสลับบรรทัดในการเขียนพิสูจน์ได้ เนื่องจากบรรทัดที่ 4 เป็นผลมาจากสิ่งที่กำหนดให้ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$” ในการพิจารณาข้อความนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถพิจารณาการเชื่อมโยงเชิงตรรกะของข้อความระหว่างบรรทัดได้แล้ว นักเรียนยังสามารถระบุสถานเชิงตรรกะของข้อความ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ในบรรทัดที่ 3 ว่าเป็นข้อตั้ง และข้อความ $A\widehat{B}C = A\widehat{X}Y$ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ในบรรทัดที่ 4 เป็นข้อสรุปย่อยของการพิสูจน์

1.3 ด้านการให้ข้อสรุป

นักเรียนที่ระบุข้อตั้งที่สำคัญได้บางเงื่อนไข อาจจะเข้าใจเพียงองค์ประกอบย่อยของบทพิสูจน์ที่อ่าน ไม่ได้เข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์ นอกจากนี้นักเรียนที่สามารถระบุข้อสรุปที่สำคัญ แต่ไม่สามารถระบุเงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของการพิสูจน์ได้นั้น อาจจะไม่ได้เข้าใจภาพรวมเช่นเดียวกัน และนักเรียนที่สามารถให้แนวคิดหลักของบทพิสูจน์ที่อ่านได้นั้น แสดงถึงนักเรียนเข้าใจโครงสร้างของการพิสูจน์ซึ่งสอดคล้องกับด้านการให้ข้อสรุปของรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และรูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ของ Mejia-Ramos et al. (2012) ในขณะที่ Davies and Jones (2021) กล่าวว่าข้อสรุปของการพิสูจน์สามารถแสดงถึงความเข้าใจการพิสูจน์ ดังนั้นนักเรียนที่ไม่สามารถให้ข้อสรุปของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ได้อาจจะไม่เข้าใจการพิสูจน์ที่กำลังอ่าน

1.4 ด้านความทั่วไป

เมื่อให้นักเรียนพิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์ที่อ่าน นักเรียนที่พิจารณาความสมเหตุสมผลของรายละเอียดในบทพิสูจน์ โดยพิจารณาตั้งแต่สิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ข้อตั้งและข้อสรุปที่สำคัญ เพื่อทำความเข้าใจส่วนประกอบย่อยของการพิสูจน์ ติดตามกระบวนการพิสูจน์ เพื่อเข้าใจความหมายของการพิสูจน์นั้น ส่งผลให้นักเรียนสามารถตัดสินความถูกต้องของการพิสูจน์ได้ ซึ่งกระบวนการที่นักเรียนใช้ในการพิจารณาความถูกต้องนั้น สอดคล้องกับกลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่นักเรียนใช้ ได้แก่ ระบุสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ พยายามคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของรูปประกอบกับกระบวนการพิสูจน์เพื่อเพิ่มความเข้าใจ และพิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์หลังอ่านจบ

นักเรียนที่เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่ได้รับมอบหมายให้อ่านนั้นถูกต้องเสมอ โดยตัดสินความถูกต้องของบทพิสูจน์ด้วยเหตุผลเพียง เพราะรู้สึกว่ามันถูกต้อง และตลอดที่เรียนในชั้นเรียนครูไม่เคยมอบหมายบทพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องให้อ่าน และนักเรียนที่ตัดสินความถูกต้องของบทพิสูจน์ที่อ่านด้วยการพิสูจน์ข้อความพิสูจน์ที่กำหนดให้อ่านด้วยวิธีการใหม่ โดยอาศัยการพิจารณาข้อสรุปของบทพิสูจน์ที่อ่านตรงกับข้อสรุปที่ได้จากการพิสูจน์ที่สร้างขึ้นใหม่นั้น ถือว่าข้อสรุปของบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง แม้ว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง แต่นักเรียนไม่ได้พิจารณากระบวนการพิสูจน์ของบทพิสูจน์ที่อ่าน สนใจเพียงข้อสรุปที่ได้ อาจกล่าวได้ว่านักเรียนสนใจเพียงข้อสรุปบรรทัดท้ายของบทพิสูจน์ และเชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้องอยู่แล้วไม่จำเป็นต้องพิจารณากระบวนการพิสูจน์ ซึ่งลักษณะการพิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์ที่อ่านของนักเรียนทั้งสองลักษณะนี้ สอดคล้องกับแนวคิดการพิสูจน์แบบอำนาจนิยมของ Harel and Sowder (1998) ที่กล่าวว่านักเรียนมีแนวโน้มที่จะมองว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่จำเป็นต้องอาศัยเหตุผลภายในมาอธิบายประกอบ แม้จะเข้าใจว่าคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ “จริง” แต่กลับไม่ให้ความสำคัญกับกระบวนการพิสูจน์ความจริงดังกล่าว ความเชื่อของนักเรียนจึงมักตั้งอยู่บนรากฐานของข้อความที่ปรากฏในหนังสือเรียนหรือคำกล่าวของครูผู้สอน

ในขณะเดียวกัน เมื่อให้นักเรียนใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์พิจารณาความถูกต้องของข้อความ นักเรียนสามารถให้คำตอบได้ถูกต้องในกรณีที่ข้อความนั้นมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว โดยมีนักเรียนบางส่วนที่สามารถพิจารณาข้อความที่ซับซ้อนกว่าและให้คำตอบที่ถูกต้องได้นั้น นักเรียนเห็นว่าคำตอบที่ได้จากการพิจารณามีคำตอบที่ถูกต้องหลายคำตอบ ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถให้คำตอบที่ถูกต้องในการพิจารณาข้อความที่ซับซ้อนกว่า และมีคำตอบมากกว่า 1

คำตอบได้นั้น อาจกล่าวได้ว่านักเรียนมองว่าคำตอบที่ถูกต้องของการพิจารณาข้อความ 2 นั้นมีเพียงคำตอบเดียว

1.5 ด้านการประยุกต์

เมื่อให้นักเรียนพิจารณาข้อความ 3 นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถให้คำตอบได้ถูกต้อง แต่ในกรณีของการพิจารณาข้อความ “กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม มีจุด X และจุด Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ และให้นักเรียนพิจารณาว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด” มีนักเรียนบางส่วนไม่กล้าตอบว่า ไม่สามารถระบุชนิดของรูปสามเหลี่ยมได้ ทั้งที่คำตอบที่ตอบนั้นเป็นคำตอบที่ถูกต้อง ในขณะที่พิจารณาข้อความนี้นั้นนักเรียนยกมือถามผู้วิจัยว่า ตอบว่า “ไม่รู้” ได้หรือไม่ เพราะถ้าไม่มีการระบุชนิดของ $\triangle ABC$ ไม่สามารถระบุได้ว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด แต่เมื่อมีการระบุชนิดของ $\triangle ABC$ แล้ว นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถระบุชนิดของ $\triangle AXY$ ได้ถูกต้อง ดังนั้นเงื่อนไขที่จำเป็น หรือข้อมูลที่เพียงพออาจจะส่งผลต่อความลังเลในการตอบคำถามของนักเรียนที่ไม่ได้มีความเข้าใจเป็นอย่างดี

ในการพิสูจน์ข้อความ 4 นักเรียนที่สามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านไปพิสูจน์ข้อความ 4 ได้นั้นมีจำนวน 2 คน ได้แก่ เคนโด้ และรักบี้ แม้ว่าเคนโด้มีลักษณะความเข้าใจการพิสูจน์ที่เข้าใจองค์รวมของบทพิสูจน์ที่อ่าน แต่เมื่อถูกขอให้เขียนแสดงการพิสูจน์ในข้อความ 4 พบว่า มีการให้เหตุผลที่วนซ้ำ อาจจะไม่เข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์ที่กำลังเขียน แม้ว่าการพิสูจน์ที่แสดงจะมีขั้นตอนที่ซับซ้อนวนไปวนมา แต่ก็สามารถสรุปผลการพิสูจน์ได้ถูกต้อง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะขาดการทวนซ้ำเพื่อตรวจสอบกระบวนการพิสูจน์ที่กำลังเขียนสนใจเพียงต้องประยุกต์ความรู้เรื่องมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน มาใช้ในการแสดงการพิสูจน์ข้อความ 4 ในขณะเดียวกัน รักบี้สามารถระบุเงื่อนไข หรือข้อความพิสูจน์ได้ถูกต้อง โดยสามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ได้ว่าต้องพิสูจน์อะไร โจทย์กำหนดอะไรมาให้ ใช้สมบัติใดบ้าง ยกเว้นเขียนสรุปว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ ในบรรทัดสุดท้าย แม้ว่ารักบี้สามารถประยุกต์ความรู้เรื่องมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันมาใช้ในการพิสูจน์ได้ แต่ท้ายที่สุดแล้วไม่สามารถสรุปผลการพิสูจน์ได้ อาจกล่าวได้ว่าไม่เข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์เนื่องจากไม่สามารถเชื่อมโยงข้อตั้งทั้งหมดเพื่อสร้างข้อสรุปได้

กังฟูสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ถูกต้อง โดยการพิสูจน์ที่แสดงไม่ได้ประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านมาใช้ในการพิสูจน์ เลือกที่จะใช้องค์ความรู้ใหม่สร้างวิธีการพิสูจน์ที่แตกต่างด้วยการใช้ทฤษฎีบท “ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป แล้วมุมภายนอกที่เกิดขึ้น

จะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น” ร่วมกับมุมแย้ง แทนการใช้ความรู้เรื่องมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน อาจกล่าวได้ว่า นักเรียนไม่สามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านไปพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้ แม้ว่าจะมีการแจ้งนักเรียนก่อนทำแล้วว่าต้องใช้แนวคิดจากการบทพิสูจน์ที่อ่าน

ปิงปองมองว่าการสมมติค่ามุมเพื่อใช้ในการแทนค่ามุมในภาพที่กำหนดให้เป็นการพิสูจน์ โดยเริ่มจากกำหนดมุมที่ฐานของ $\triangle ABC$ ให้มีขนาดเท่ากับ 40 องศา พยายามใช้ความรู้เรื่องขนาดของมุมตรง และผลบวกของขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเท่ากับ 180 องศา จนสามารถระบุขนาดมุมทั้งหมดได้ และสรุปว่า $D\widehat{A}E = C\widehat{A}E$ เพราะมีขนาดมุมที่เท่ากัน ซึ่งมีแนวโน้มว่านักเรียนไม่สามารถพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าบทพิสูจน์ที่อ่านด้วยการพิสูจน์แบบนิรนัยได้ และมองว่าการแทนค่าเป็นการแสดงการพิสูจน์แบบทางการ

1.6 ประเด็นเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ที่น่าสนใจ

นักเรียนสามารถขยายขอบเขตความรู้ในการพิสูจน์ข้อความเดิมด้วยการสร้างวิธีการพิสูจน์ที่สร้างขึ้นใหม่ โดยนักเรียนพยายามใช้ความรู้ที่นอกเหนือที่พบจากการพิสูจน์ที่กำหนดให้นักเรียนอ่านเพื่อสร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่ ซึ่งสอดคล้องกับ (Carpenter & Lehrer, 2009; Hanna, 2000) การพิสูจน์เป็นการค้นพบวิธีการใหม่ที่แสดงถึงการขยายขอบเขตของความเข้าใจ ที่สามารถประยุกต์ความรู้ ประสบการณ์ เพื่อเชื่อมโยงสิ่งที่รู้ และสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเอง

ในขณะเดียวกันนักเรียนที่ไม่ประสบความสำเร็จในการพิสูจน์ข้อความเดิมด้วยการสร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่ พยายามใช้การแปลงทางเรขาคณิต เรื่องการเลื่อนขนาน มาสร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่ โดยพยายามเคลื่อนวัตถุและสรุปว่าผลการพิสูจน์เป็นเช่นเดียวกับข้อสรุปของการพิสูจน์ แม้ว่าในปัจจุบันจะยอมว่าการเคลื่อนวัตถุในทางคณิตศาสตร์ขนาดของวัตถุจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่เป็นเพียงการยอมรับในการแปลงทางคณิตศาสตร์เท่านั้น ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตยังคงอาศัยการสร้างทางเรขาคณิตเพื่อสร้างส่วนของเส้นตรงขึ้นใหม่ เพื่อให้การพิสูจน์ทางเรขาคณิตยังคงเป็นไปตามหลักการอ้างเหตุผล

และอีกกรณีหนึ่งนักเรียนยอมรับสิ่งที่ต้องพิสูจน์เพื่อใช้เป็นข้อตั้งในการสร้างข้อสรุป ซึ่งการยอมรับข้างต้นไม่ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุผล เนื่องจากการพิสูจน์ต้องอาศัยการเชื่อมโยงข้อตั้งเพื่อสร้างข้อสรุป และการอ้างแต่ละข้อความต้องมีความสัมพันธ์เชิงตรรกะ และข้อความที่นำมาอ้างต้องมีลำดับเชิงตรรกะ สามารถระบุความสัมพันธ์ข้องข้อความพิสูจน์กับ

ข้อความก่อนหน้าได้อย่างมีเหตุผล หากนักเรียนยอมรับสิ่งที่ต้องพิสูจน์มาเป็นเงื่อนไขที่ใช้ในการสร้างข้อความพิสูจน์จะเป็นการให้เหตุผลสิ่งเดียวกันด้วยสิ่งเดียวกัน กล่าวคือ นักเรียนยอมรับว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพื่อใช้เป็นข้อตั้งในการสร้างข้อสรุปว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งในกรณีนี้หากนักเรียนได้รับการชี้แนะจากครูเกี่ยวกับองค์รวมของการพิสูจน์ว่าสิ่งที่นักเรียนนำมาใช้ในการอ้างนั้นไม่ถูกต้อง อาจจะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจมากขึ้นในการเขียนแสดงการพิสูจน์

2. กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่นักเรียนแต่ละคนแสดงออกและสามารถสังเกตได้นั้น แม้ว่านักเรียนแต่ละคนจะใช้กลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ที่ใกล้เคียงแต่อาจจะมีความเข้าใจการพิสูจน์ที่แตกต่างกัน โดยสิ่งที่พบ คือ นักเรียนทุกคนจะอ่านข้อเสนอของการพิสูจน์ก่อนเริ่มอ่านในส่วนอื่น เมื่ออ่านข้อเสนอแล้วจะมีการระบุสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ และพยายามกำหนดสัญลักษณ์ลงบนภาพให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์ ซึ่งกลยุทธ์เหล่านี้จะส่งผลต่อความรวดเร็วในการอ่านแล้วยังส่งผลต่อความเข้าใจการพิสูจน์ด้านความรู้พื้นฐาน ทำให้นักเรียนสามารถให้ความหมายและระบุสมบัติของคำศัพท์ที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ที่กำหนดให้ สามารถเขียนหมายเลขกำกับมุมได้ถูกต้อง

ในขณะเดียวกันการใช้กลยุทธ์ระบุขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ส่งผลต่อความเข้าใจการพิสูจน์ด้านการให้ข้อสรุป เนื่องจากนักเรียนที่ใช้กลยุทธ์นี้สามารถมองภาพรวมของการพิสูจน์ และสามารถระบุข้อตั้ง ข้อสรุป และขั้นตอนที่สำคัญของการพิสูจน์ได้ถูก และนักเรียนส่วนหนึ่งกลุ่มนี้สามารถให้ข้อสรุปที่ดีของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ได้เช่นเดียวกัน และนักเรียนที่ใช้กลยุทธ์การพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ส่วนใหญ่สามารถพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ที่กำหนดให้ด้วยวิธีการที่เหมาะสมได้ โดยนักเรียนกลุ่มนี้พิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ด้วยการพิจารณาจากการให้เหตุผลแบบนิรนัย อีกทั้งยังสามารถใช้ข้อมูลจากการพิสูจน์ที่ผ่านการพิจารณาแล้วมาใช้ในการพิจารณาสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อีกด้วย

สุดท้ายนี้นักเรียนที่ใช้กลยุทธ์ที่พยายามคิดวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่หลังอ่านการพิสูจน์ส่งผลให้นักเรียนสามารถสร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่ โดยมีทั้งนักเรียนที่สร้างวิธีการพิสูจน์ที่ถูกต้องตามหลักการอ้างเหตุผล และวิธีที่อาจจะไม่ถูกต้องแต่เป็นวิธีที่น่าสนใจเนื่องจากพยายามใช้ความรู้ และประสบการณ์ของนักเรียนมาใช้ในการสร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่ นักเรียนที่สร้างวิธีการพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องหากได้รับข้อเสนอแนะจากครูหรือผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับข้อบกพร่องของวิธีการ

พิสูจน์นั้น อาจจะทำให้นักเรียนได้สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่อย่างสมบูรณ์ หรืออาจจะเป็นการสร้างองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับข้อจำกัดของวิธีการที่นักเรียนใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งการใช้กลยุทธ์นี้ของนักเรียนสอดคล้องกับความเข้าใจการพิสูจน์ด้านการประยุกต์ที่นักเรียนสามารถประยุกต์ความรู้ที่ได้จากการพิสูจน์ที่กำหนดให้ไปใช้กับสถานการณ์อื่น รวมทั้งสามารถสร้างวิธีการพิสูจน์ข้อความเดิมด้วยวิธีการที่แตกต่างได้

ข้อเสนอแนะจากการวิจัย

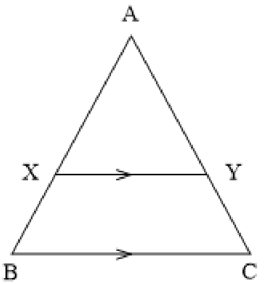
1. ในการสร้างแบบประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ควรมีรูปแบบของการตอบที่หลากหลาย โดยอาจจะเป็นรูปแบบเลือกตอบ เติมคำ หรือตอบแบบอัตนัยสำหรับคำถามปลายเปิดและต้องการให้นักเรียนให้เหตุผล การให้ข้อสรุปควรเป็นการเขียนตอบแบบอัตนัย และเขียนแสดงการพิสูจน์ในข้อที่เป็นการประยุกต์ความรู้ เนื่องจาก การศึกษาพบว่านักเรียนสามารถให้คำตอบได้ถูกต้อง แต่ในหลาย ๆ คำถามนักเรียนไม่สามารถให้เหตุผลที่ถูกต้องได้ ซึ่งอาจจะส่งผลต่อการตัดสินความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอย่างแท้จริงของนักเรียน

2. การศึกษากลยุทธ์การอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ควรศึกษาในกลุ่มตัวอย่างที่มีจำนวนมากเพื่อดูแนวโน้มของกลยุทธ์การอ่านที่ส่งผลต่อความเข้าใจการพิสูจน์ได้ชัดเจนมากขึ้น

ภาคผนวก

การพิสูจน์ที่กำหนดให้นักเรียนที่เข้าร่วมการวิจัยอ่าน

กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$

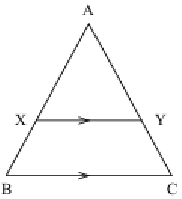


สิ่งที่กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$

พิสูจน์	จาก ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 1
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{C}B$	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 2
	เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	(กำหนดให้)	บรรทัดที่ 3
	จะได้ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$	(มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 4
	และ $A\hat{C}B = A\hat{Y}X$	(มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)	บรรทัดที่ 5
	ทำให้ $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X$	(สมบัติของการเท่ากัน)	บรรทัดที่ 6
	ดังนั้น ΔAXY เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 7
	นั่นคือ $AX = AY$	(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)	บรรทัดที่ 8

ตัวอย่างแนวคำถามการสัมภาษณ์

Task	แนวคำถามสัมภาษณ์
1. จงให้ความหมาย “รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” ตามความเข้าใจของนักเรียน	1. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คืออะไร มีลักษณะเป็นยังไง 1.1 บอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 1.1.1 ในบทพิสูจน์นี้ต้องใช้สมบัติอะไรบ้าง 2. นอกจากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ต้องรู้หรือทำความเข้าใจคำอื่นอีกหรือไม่ 2.1 ต้องรู้คำนั้น เพราะอะไร 2.1.1 บอกรายละเอียด สมบัติเพิ่มเติมได้ไหม 2.1.2 ยกตัวอย่างได้ไหม 2.2 ยังมีคำอื่นอีกไหม
2. จงเขียนหมายเลข 1 ที่มุม ABC และ หมายเลข 2 ที่มุม AXY  	1. เขียนสัญลักษณ์ที่มุมอื่นอีกไหม 2. ปกติเขียนสัญลักษณ์แทนมุมหรือไม่ 3. สัญลักษณ์มุมที่รู้จักมีแบบใดบ้าง
3. ถ้า $AX = AY$ ในบรรทัดที่ 8 เป็นจริง แล้ว $BX = CY$ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด	1. $BX = CY$ จริงไหม 1.1 ทำไมถึงเท่ากัน 1.2 มีเงื่อนไขอื่นที่ทำให้ $BX = CY$ อีกไหม 1.2.1 เงื่อนไขที่ทำให้เท่ากันมีอะไรบ้าง

บรรณานุกรม

Alcock, L., & Wilkinson, N. (2011). e-Proofs: Design of a Resource to Support Proof Comprehension in Mathematics. *Educational Designer, 1*(4). Retrieved from https://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue4/article14/index.htm

Anwar, L., & Goedhart, M. (2019). *Understanding geometric proofs: scaffolding pre-service mathematics teacher students through dynamic geometry system (dgs) and flow-chart proof.* Paper presented at the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Anwar, L., Mali, A., & Goedhart, M. J. (2021). The Effect of Proof Format on Reading Comprehension of Geometry Proof: The Case of Indonesian Prospective Mathematics Teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(4), 1-15. doi:10.29333/ejmste/10782

Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (2009). Teaching and Learning Mathematics With Understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 19-32).

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2009). Charting a Course for Secondary Geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 67-90).

Conradie, J., & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 225-235. doi:10.1023/A:1017502919000

Davies, B., Alcock, L., & Jones, I. (2020). Comparative judgement, proof summaries and proof comprehension. *Educational Studies in Mathematics, 105*(2), 181-197. doi:10.1007/s10649-020-09984-x

Davies, B., & Jones, I. (2021). Assessing Proof Reading Comprehension Using Summaries. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. doi:10.1007/s40753-021-00157-6

Davies, B., & Jones, I. (2022). Assessing Proof Reading Comprehension Using Summaries. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics*

Education, 8(3), 469-489. doi:10.1007/s40753-021-00157-6

de Villiers, M. (2009). An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 369-393).

de Villiers, M. (2020). Proof as a means of discovery. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(3), 451-455. doi:10.1080/0020739X.2019.1663952

Ellis, A. B., Bieda, K., & Knuth, E. (2016). *Developing essential understanding of proof and proving for teaching mathematics in grades 9-12* (2 nd ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fennema, E., Sowder, J., & Carpenter, T. P. (2009). Creating Classrooms That Promote Understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 185-199).

Goldenberg, E. P., Cuoco, A., & Mark, J. (2009). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 3-44).

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (Vol. 7).

Heinze, A., & Reiss, K. (2009). Developing argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K–16 Perspective* (pp. 191-203).

Hemmi, K., Julin, E., & Pörn, R. (2017). *Misconceptions and developmental proof.* Paper presented at the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Dublin, Ireland.

Inam, B., Ugurel, I., & Boz Yaman, B. (2018). High School Students' Performances on Proof Comprehension Tests. *International Journal of Assessment Tools in Education, 5*(2), 339–369. doi:10.21449/IJATE.416261

Knuth, E. J., Choppin, J. M., & Bieda, K. N. (2009). Middle School Students' Production of Mathematical Justifications. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K–16 Perspective* (pp. 153-170).

Knuth, E. J., & Elliott, R. L. (1998). Characterizing Students' Understandings of Mathematical Proof. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 714-717.

Komatsu, K. (2017). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 129-144. doi:10.1007/s10649-016-9731-6

Lin, F.-L., & Yang, K.-L. (2007). The Reading Comprehension of Geometric Proofs: The Contribution of Knowledge and Reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(4), 729-754. doi:10.1007/s10763-007-9095-6

Macbeth, D. (2012). Proof and understanding in mathematical practice. *Philosophia Scientiæ, 16*(1), 29-54. doi:10.4000/philosophiascientiae.712

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense.

Mark, H., Lara, A., & Matthew, I. (2014). Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 62-101. doi:10.5951/jresematheduc.45.1.0062

McCrone, S. M. S., & Martin, T. S. (2009). Formal Proof in High School Geometry: Student Perceptions of Structure, Validity, and Purpose. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K–16 Perspective* (pp. 204-221).

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18. doi:10.1007/s10649-011-9349-7

Mejia-Ramos, J. P., Lew, K., de la Torre, J., & Weber, K. (2017). Developing and validating proof comprehension tests in undergraduate mathematics. *Research in Mathematics Education, 19*(2), 130-146. doi:10.1080/14794802.2017.1325776

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. *ZDM, 47*(7), 1211-1224. doi:10.1007/s11858-015-0712-5

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' Understanding of the Structure of Deductive Proof. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 223-239. doi:10.1007/s10649-016-9720-9

Miyazaki, M., Fujita, T., Jones, K., & Iwanaga, Y. (2017). Designing a Web-based Learning Support System for Flow-chart Proving in School Geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education, 3*(3), 233-256. doi:10.1007/s40751-017-0034-z

Miyazaki, M., Nagata, J., Chino, K., Sasa, H., Fujita, T., Komatsu, K., & Shimizu, S. (2019). Curriculum Development for Explorative Proving in Lower Secondary School Geometry: Focusing on the Levels of Planning and Constructing a Proof. *Frontiers in Education, 4*(31), 1-12. doi:10.3389/feduc.2019.00031

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*: Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Reid, D., & Vargas, E. V. (2017). *Proof-based teaching as a basis for understanding why.* Paper presented at the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education Dublin, Ireland.

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 377*(2140), 20180045. doi:10.1098/rsta.2018.0045

Santrock, J. W. (2016). *Educational psychology : theory and application to fitness and performance* (6th ed.). NY: McGraw-Hill Education.

Selden, A., & Selden, J. (2015). *A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation.* Paper presented at the Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik Conference 2015, Universität Kassel, Germany.

Shepherd, M. D., & van de Sande, C. C. (2014). Reading mathematics for understanding—From novice to expert. *The Journal of Mathematical Behavior, 35*, 74-86. doi:10.1016/j.jmathb.2014.06.003

Smith, J. C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 73-90. doi:10.1016/j.jmathb.2005.11.005

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. New York: Oxford University Press.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (2009). Teaching and Learning Proof in Middle Grades and High School. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K–16 Perspective* (pp. 147-151).

Wong, K.-C. (2017). *Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Hong Kong.* Paper presented at the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Dublin, Ireland.

Woolfolk, A. (2016). *Educational Psychology* (13th ed.). Essex: Pearson Education.

Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 59-76. doi:10.1007/s10649-007-9080-6

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15, pp. 215-229). Dordrecht: Springer.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

สุภางค์, จ. (2556). การวิเคราะห์ข้อมูลในการวิจัยเชิงคุณภาพ (พิมพ์ครั้งที่ 11 ed.). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายจักรพงษ์ ตรียุทธ์
วุฒิการศึกษา	คบ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร
	ศศ.ม. (คณิตศาสตรศึกษา) มหาวิทยาลัยรามคำแหง