



การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์
และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA II STUDENTS' PROOF ABILITIES
ON PARALLEL VIA CONJECTURING AND PROVING METHOD

ปัญญาพร เชื้อมั่ง

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2562

การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์
และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ปีการศึกษา 2562
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA II STUDENTS' PROOF ABILITIES
ON PARALLEL VIA CONJECTURING AND PROVING METHOD
WITH GEOGEBRA PROGRAM



PANYAPORN CHUEAMANG

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of MASTER OF EDUCATION
(Mathematics)

Faculty of Science, Srinakharinwirot University

2019

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง
การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์
และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
ของ
ปัญญาพร เชื้อมั่ง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

..... ที่ปรึกษาหลัก	 ประธาน
(อาจารย์ ดร.ขวัญ เพียซ้าย)	(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด)
..... ที่ปรึกษาร่วม	 กรรมการ
(อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสถาและ)	(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศุทธิวรรณ ศรี ภิรมย์ สิรินิลกุล)

ชื่อเรื่อง	การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
ผู้วิจัย	ปัญญาพร เชื้อมั่ง
ปริญญา	การศึกษามหาบัณฑิต
ปีการศึกษา	2562
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. ขวัญ เพียชัย
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อาจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสและ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ 1) ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra 2) เปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย 1) แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน 2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน และ 3) แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ใช้สำหรับวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง จำนวน 9 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และ 2) เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

คำสำคัญ : วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์, ความสามารถในการพิสูจน์, เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์, โปรแกรม GeoGebra

Title	A STUDY OF MATHAYOMSUKSA II STUDENTS' PROOF ABILITIES ON PARALLEL VIA CONJECTURING AND PROVING METHOD WITH GEOGEBRA PROGRAM
Author	PANYAPORN CHUEAMANG
Degree	MASTER OF EDUCATION
Academic Year	2019
Thesis Advisor	Dr. Khawn Piasai
Co Advisor	Dr. Sukanya Hajisalah

The purposes of this study are as follows: (1) to study the proof abilities of Mathayomsuksa II students in parallel, after being taught through the conjecturing and proving method with the GeoGebra program, and (2) to compare their mathematical attitudes before and after being taught through the conjecturing and proving method with the GeoGebra program. The participants were 40 Mathayomsuksa II students from Samutsakhonburana school in Samutsakhon province. The research instruments in this study included: (1) lesson plans that allowed students to learn the topic via the conjecturing and proving method with the GeoGebra program; (2) the proof abilities test on the topic of parallel, and (3) a questionnaire to measure mathematical attitudes. The duration of the experiment was nine periods of 50 minutes per period, in the second term of the 2019 academic year. The research findings revealed the following: (1) after being taught by the conjecturing and proving method with the GeoGebra program, over 60% of the participants had proof abilities on the parallel score that satisfied the criteria at a statistically significant level of .01, and (2) the mathematical attitudes of the students were significantly higher than before at a level of .01.

Keyword : Conjecturing and Proving Method, Proof Abilities, Mathematical Attitudes, GeoGebra

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดีเป็นเพราะผู้วิจัยได้รับความกรุณาอย่างยิ่งจาก อาจารย์ ดร. ขวัญ เพียซ้าย อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์หลัก อาจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีส และ อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ร่วม และอาจารย์เอนก จันทรวงูญ ที่ให้คำแนะนำอย่างดียิ่งและเป็น ประโยชน์ต่อการดำเนินการวิจัย ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทรงชัย อักษรคิด ที่ให้ความกรุณาเป็น ประธานคณะกรรมการสอบปากเปล่า และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล ที่ ให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบปากเปล่า

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร. ธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์ อาจารย์เอนก จันทรวงูญ อาจารย์ ภมรเมษย์ เลหาวิรุฬห์กุล อาจารย์นันท์ชพร ทาเกตุ และนายวีรศ กิตติวรากุล ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญ ในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย อีกทั้งให้ข้อเสนอแนะอันเป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้ ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการและคณะอาจารย์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ ที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวก ในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ ในการวิจัย และขอบคุณนักเรียนทุกคนที่ให้ความร่วมมือในการเก็บ รวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย ครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้กำลังใจและทำให้ผู้วิจัยมีความมุ่งมั่นต่อการศึกษามาโดยตลอด และขอบคุณพี่น้องในสาขาวิชาทุกคน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง นายวีรศ กิตติวรากุล และ นางสาวนันท์ชพร ทาเกตุ ที่เป็นพี่น้องที่คอยให้ความช่วยเหลือ รวมถึงนางสาวณัฐนันท์ ท่าข้าม นายช วิศ เชื้อทวัช นายธนากร ศรีเคลือบ และนายนิรัช ลีวศิริวงศ์ เพื่อนและพี่น้องของผู้วิจัยที่ให้กำลังใจ ตลอดระยะเวลาการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จไปได้ด้วยดี

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่จัด โครงการการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ที่ สนับสนุนทุนการศึกษาสำหรับการวิจัยในครั้งนี้

ปัญญาพร เชื้อมั่ง

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญรูปภาพ	ฐ
บทที่ 1 บทนำ.....	14
ภูมิหลัง	14
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	16
ความสำคัญของการวิจัย	17
ขอบเขตของการวิจัย	17
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย.....	17
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย.....	17
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	17
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	17
ตัวแปรที่ศึกษา	17
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	18
กรอบแนวคิดในการวิจัย	21
สมมติฐานในการวิจัย.....	21
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	22
1. วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์.....	22

1.1 ความหมายของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์.....	22
1.2 รูปแบบของการสร้างข้อความคาดการณ์.....	23
1.3 หลักการของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์.....	24
1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์	29
2. โปรแกรม GeoGebra.....	30
2.1 ประวัติความเป็นมาของโปรแกรม GeoGebra.....	30
2.2 คุณลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra	31
2.3 โปรแกรม GeoGebra กับการจัดการเรียนรู้	32
2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra	33
3. ความสามารถในการพิสูจน์.....	35
3.1 ความหมายของการพิสูจน์	35
3.2 ความสำคัญของการพิสูจน์	36
3.3 บทบาทของการพิสูจน์	37
3.4 วิธีการพิสูจน์.....	38
3.5 การประเมินความสามารถในการพิสูจน์.....	40
3.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์.....	42
4. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์	44
4.1 ความหมายของเจตคติ	44
4.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวกับเจตคติ.....	45
4.3 วิธีการวัดเจตคติ	47
4.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเจตคติ	49
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	52
1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง	52

ประชากร	52
กลุ่มตัวอย่าง	52
2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และ พิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	52
3. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	54
3.1 แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความ คาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน	54
3.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน	56
3.3 แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์	57
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล	59
แบบแผนการวิจัย	59
การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล	60
5. การวิเคราะห์ข้อมูล	60
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	61
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	62
ตอนที่ 1 ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับ การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	62
ตอนที่ 2 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการ จัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	65
บทที่ 5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	68
ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป	68
สรุปผลการวิจัย	71

อภิปรายผลการวิจัย	71
ข้อเสนอแนะ	75
บรรณานุกรม	78
ภาคผนวก.....	86
ประวัติผู้เขียน.....	195



สารบัญตาราง

หน้า

ตาราง 1 องค์ประกอบที่สำคัญสำหรับใช้ประเมินความสามารถในการพิสูจน์ของ วีรศ กิตติวรากุล	40
ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของ Hart	41
ตาราง 3 แบบแผนในการวิจัย (One-Group Posttest-Only Design).....	59
ตาราง 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน	63
ตาราง 5 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด.....	64
ตาราง 6 ผลการวิเคราะห์เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra.....	65
ตาราง 7 ผลการประเมินของคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้.....	66
ตาราง 8 ผลการประเมินแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	88
ตาราง 9 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน	93
ตาราง 10 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	95
ตาราง 11 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์.....	98

ตาราง 12 ค่าอำนาจจำแนกโดยวิธีแจกแจง t-distribution และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติ
ต่อวิชาคณิตศาสตร์.....99

ตาราง 13 คะแนนจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลัง
ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อาคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง
เส้นขนาน 104



สารบัญรูปภาพ

หน้า

ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย	21
ภาพประกอบ 2 กรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	53
ภาพประกอบ 3 คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัด ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน.....	62



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการขับเคลื่อนสังคม นวัตกรรม เทคโนโลยี และ วิทยาศาสตร์ ก่อให้เกิดการทดลองต่าง ๆ ที่เป็นรูปธรรม หรือกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์ช่วยให้ วิทยาศาสตร์ทำงานได้ง่ายขึ้น และคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาสติปัญญาของ มนุษย์ เพราะว่าเป็นวิชาฝึกให้มนุษย์รู้จักคิดอย่างมีเหตุผล สร้างสรรค์ เป็นระบบมีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี, 2560, p. 1; อัจฉรา ปาจีนบุรวรรณ์, 2557, p. คำนำ) นอกจากนี้คณิตศาสตร์ถูกมองว่า เป็นศิลปะอย่างหนึ่งโดยความงามของคณิตศาสตร์อยู่ที่ความเป็นระเบียบ ความกลมกลืนกันของ ความคิดตลอดจนความละเอียดรอบคอบ และยังเป็นวิชาที่มีโครงสร้างประกอบไปด้วย คำนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท โดยทั่วไปแล้วคณิตศาสตร์นั้นเป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยหลักของการ คิดอย่างมีเหตุและผล สามารถพิสูจน์ได้ และมีที่มาที่ไปในตนเองเสมอ ซึ่งหลักการนี้มนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงได้ (มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย, 2559, pp. 8-9; มารศรี แนวจำปา, 2552, pp. 38-40)

เรขาคณิตเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาสมบัติเกี่ยวข้องกับ จุด เส้น ระนาบ และ ปริภูมิ (โกลม ไพศาล, 2540, p. 2) การศึกษาเรขาคณิตจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกการสังเกต การสำรวจ และคิดอย่างมีวิจารณญาณ (ปานทอง กุลนาถศิริ, 2541, p. 3) ยิ่งไปกว่านั้นเรขาคณิต ยังเป็นพื้นฐานของศาสตร์อื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ ศิลปกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ หรือ วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น สมเดช บุญประจักษ์ (2546, p. 2) กล่าวว่า เรขาคณิตเป็นวิชาที่มีส่วน ช่วยในการออกแบบ และสร้างสิ่งก่อสร้าง เช่น การสร้างผังเมือง การออกแบบการจราจร เป็นต้น และเรขาคณิตยังช่วยส่งเสริม ทักษะด้านมิติสัมพันธ์ ความรู้สึกเชิงปริภูมิ รวมทั้งช่วยพัฒนาการคิด อย่างมีเหตุผลให้นักเรียน ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนเนื้อหาอื่น ๆ ของวิชาคณิตศาสตร์ นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นวิชาที่เป็นรากฐานของการพิสูจน์ มีบทบาทสำคัญต่อการให้เหตุผล แทนการคาดเดาจากความรู้สึก (สมทรง สุวพานิช, 2553, p. 33)

ปัญหาหนึ่งพบในการเรียนการสอนเรขาคณิต คือ ปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ นักเรียนไม่ สามารถวิเคราะห์และอ้างสมบัติทางเรขาคณิตมาใช้ในการพิสูจน์ได้ และนักเรียนบางคนไม่รู้ว่า

ควรเริ่มต้นการเขียนบทพิสูจน์อย่างไรและต้องทำอย่างไรในแต่ละขั้นของการพิสูจน์ (ไตรรงค์ กล่ำบุตร, 2557, p. 2) โดยเฉพาะปัญหาการพิสูจน์เกี่ยวกับ เรื่อง เส้นขนาน ซึ่งเป็นเนื้อหาหนึ่งในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ธรรมรัตน์ กริธาธร (2558, p. 1) กล่าวว่า นักเรียนส่วนใหญ่เกิดความสับสนเกี่ยวกับการใช้ทฤษฎีบท เนื่องจากมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานหลายทฤษฎี อีกทั้งไม่สามารถวางแผนเกี่ยวกับลำดับการให้เหตุผลได้ ทำนองเดียวกับ สถาปนา บุญมาก (2558, p. 2) ที่พบว่า นักเรียนไม่สามารถให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานได้ และไม่สามารถแยกแยะได้ว่าข้อความใดเป็นเหตุและข้อความใดเป็นผล รวมทั้งไม่สามารถให้เหตุผลเกี่ยวกับขนาดของมุมในเรื่องเส้นขนานได้ นอกจากนี้ผลการศึกษาของ ณัฐไฉไล พริ้งมาดี (2544, p. 5) พบว่า นักเรียนส่วนหนึ่งมีมโนทัศน์เรื่องเส้นขนานอยู่ในระดับต่ำ โดยเฉพาะอย่างยิ่งมโนทัศน์เกี่ยวกับบทนิยามของเส้นขนาน เส้นขนานและมุมแย้ง เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในอยู่ในระดับต่ำ (ระดับ 3) และเพื่อให้ทราบถึงปัญหาในบริบทจริงเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้เรื่องเส้นขนาน ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์ครูจำนวนหนึ่งที่มีประสบการณ์การสอน เรื่อง เส้นขนาน ซึ่งพอสรุปประเด็นสำคัญเกี่ยวกับปัญหาการพิสูจน์ได้ดังนี้ นักเรียนไม่สามารถอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ได้ถูกต้อง หรือบางคนถึงแม้ว่าอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ได้ถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน และนักเรียนส่วนใหญ่ชอบการคำนวณหาค่ามุมมากกว่าการพิสูจน์ เนื่องจากการพิสูจน์มีขั้นตอนกระบวนการเขียนที่ค่อนข้างยาก ซึ่งนักเรียนต้องใช้ความเข้าใจและความพยายามเป็นอย่างมาก ปัญหาเหล่านี้ส่งผลให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่าย ไม่สนใจ ไม่เห็นคุณค่าและความจำเป็นของการพิสูจน์ ประกอบกับครูยังใช้วิธีการสอนแบบเดิมคือการสอนแบบเน้นให้นักเรียนท่องจำบทนิยาม สมบัติ หรือทฤษฎีบท การเขียนบนกระดานให้นักเรียนจดตาม ขาดสื่อการสอนที่ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ อีกหนึ่งสิ่งที่เป็นปัญหาของการพิสูจน์คือนักเรียนไม่เคยผ่านกระบวนการฝึกการให้เหตุผลเลย จึงทำให้ไม่สามารถเขียนบทพิสูจน์ได้ หรือเรียนรู้ในการเขียนบทพิสูจน์ได้ค่อนข้างช้า

จากปัญหาข้างต้น ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาวิธีการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน วิธีการหนึ่งคือ การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ซึ่งวิธีการนี้เน้นส่งเสริมและพัฒนาผู้เรียนด้านกระบวนการคิดที่อยู่บนหลักของเหตุและผล และด้านการวิเคราะห์ปัญหาแบบสมเหตุสมผลเพื่อให้ได้มาซึ่งความสัมพันธ์ รวมทั้งเสริมสร้างความสามารถการพิสูจน์เพื่อให้ได้มาซึ่งข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง (Morselli, 2006, p. 185) Aricha-Metzer Inbar and Zaslavsky Orit (2017, p. 304) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์จะช่วยส่งเสริมการให้เหตุผลและการพิสูจน์ของนักเรียนสอดคล้องกับงานวิจัยของ Nguyen (2012, p. 1742) ที่พบว่า การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้าง

ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน ส่วน Lin, Yang, Lee, Tabach, and Stylianides (2011, pp. 305-325) ได้เสนอหลักการสร้างงาน (Task) ซึ่งเป็นหลักการสำคัญของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ โดยการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำหลักการดังกล่าวมาใช้พัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เรื่องเส้นขนานของนักเรียน

GeoGebra เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตโปรแกรมหนึ่งที่ได้รับคามนิยมซึ่งครูหลายท่านใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนการสอนเรขาคณิต โดยโปรแกรมห้ช่วยนักเรียนได้สำรวจรูปเรขาคณิต สังเกตการเคลื่อนไหวรูปเรขาคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดจนนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ โปรแกรมมีเครื่องมือทางเรขาคณิตมากมายที่ให้นักเรียนได้ทำการสร้าง ออกแบบ ปรับแต่งรูปเรขาคณิตได้อย่างอิสระ รวมทั้งสามารถทำการคำนวณและวัดขนาดของมุม พื้นที่ ความยาวส่วนของเส้นตรงได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง นอกจากนี้โปรแกรมดังกล่าวนี้ยังช่วยให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่ถูกต้อง และทำให้มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ด้วย (ชัยญา อุทิศ, 2557, pp. 26-28; พงศักดิ์ วุฒิสันต์, 2556, pp. 13-16; มัญชนกนิชา แกมแก้ว, 2560, p. 33)

จากที่กล่าวมาข้างต้น ประกอบกับการวิจัยของ วีริศ กิตติวรากล (2561, p. 72) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม ซึ่งผลการวิจัย พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลมผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิธีการจัดการเรียนรู้ดังกล่าวจะเป็นแนวทางหนึ่งให้สำหรับครูหรือผู้ที่สนใจได้ศึกษาเพื่อใช้ในการพัฒนาหรือส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในหัวข้ออื่น ๆ ต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
2. เพื่อเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ความสำคัญของการวิจัย

1. เป็นข้อมูลสำหรับครูในการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
2. เป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์เนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ ตำบลมหาชัย อำเภอเมืองสมุทรสาคร จังหวัดสมุทรสาคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ ตำบลมหาชัย อำเภอเมืองสมุทรสาคร จังหวัดสมุทรสาคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 40 คน นักเรียนกลุ่มนี้ได้จากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารถ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 9 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง เส้นขนาน ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จำนวน 9 คาบ ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อ ดังนี้

- | | | |
|------------------------------------|---|-----|
| 1. เส้นขนานและมุมภายใน | 2 | คาบ |
| 2. เส้นขนานและมุมแย้ง | 2 | คาบ |
| 3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน | 2 | คาบ |
| 4. เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม | 3 | คาบ |

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ คือ การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
2. ตัวแปรตาม ประกอบด้วย

2.1 ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เส้นขนาน

2.2 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน หมายถึง การจัดการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือในการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ และดำเนินการจัดการเรียนรู้ตามหลักการสร้างงานที่พัฒนาขึ้นตามแนวคิดของ Lin et al. (2011, pp. 305-325) ดังต่อไปนี้

1.1 หลักการสร้างงานเกี่ยวกับการส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์ ประกอบด้วยหลักการย่อย 4 ข้อ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1) หลักการส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการมีส่วนร่วมในการสังเกต เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการสังเกตเกี่ยวกับความเหมือนหรือความต่างของรูปเรขาคณิตที่อยู่ในแฟ้มงานที่กำหนดให้ในโปรแกรม GeoGebra รวมทั้งให้สังเกตรูปแบบของความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างโดยใช้เครื่องมือในโปรแกรม GeoGebra เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์

2) หลักการส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการมีส่วนร่วมในการสร้างความรู้ เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมสร้างความรู้ใหม่โดยอาศัยความรู้พื้นฐานที่มีอยู่เดิมที่นำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

3) หลักการส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการปรับเปลี่ยนความรู้ที่มีมาก่อน เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปรับเปลี่ยนความรู้ที่ได้จากการสำรวจรูปเรขาคณิตที่อยู่ในแฟ้มงานที่กำหนดให้ในโปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นกรณีทั่วไป มาเป็นกรณีที่กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม แล้วใช้เครื่องมือในโปรแกรม GeoGebra สำรวจรูปเรขาคณิตเพิ่มเติม เพื่อพิจารณาว่าข้อความหรือความสัมพันธ์ใหม่ที่ได้จากการปรับเปลี่ยนข้อมูลเป็นจริงตามนั้นหรือไม่

4) หลักการส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการสะท้อนผล เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สะท้อนผล พุดคุย แลกเปลี่ยน

ความคิดเห็น ระดมความคิด ช่วยกันค้นหาสิ่งที่ขาดหาย หรือเงื่อนไขที่จำเป็น เพื่อให้ได้ข้อความคาดการณ์ที่สมบูรณ์

1.2 **หลักการสร้างงานที่ส่งเสริมการพิสูจน์** ประกอบด้วยหลักการย่อย 4 ข้อ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1) **หลักการแสดงข้อโต้แย้งผ่านตัวแทนทางความคิดที่หลากหลาย** เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการให้นักเรียนได้แสดงออกถึงแนวคิดหรือข้อโต้แย้งเกี่ยวกับการพิสูจน์ก่อนเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างเป็นทางการผ่านตัวแทนความคิดที่หลากหลาย เช่น การใช้การพูดอย่างไม่เป็นทางการ หรือการใช้ภาษาที่ไม่ใช่ภาษาทางคณิตศาสตร์ จากการสำรวจและค้นหาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่าง ๆ ในแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra เป็นต้น เพื่อให้ นักเรียนได้เข้าใจและเห็นแนวทางในการพิสูจน์ จนกระทั่งนำไปสู่การพิสูจน์ในรูปแบบที่เป็นทางการ

2) **หลักการเปลี่ยนบทบาทในขณะการทำงาน** เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการให้นักเรียนเปลี่ยนบทบาทจากผู้เรียนรู้มาเป็นผู้ประเมิน หรือผู้ตรวจสอบการพิสูจน์ โดยนักเรียนจะต้องตระหนักถึงความชัดเจน ความสมบูรณ์ และความถูกต้องของการพิสูจน์

3) **หลักการตั้งประเด็นเกี่ยวกับเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอในการพิสูจน์** เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการให้นักเรียนได้พิจารณาและตระหนักถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอในการพิสูจน์

4) **หลักการให้ผู้เรียนสร้างการพิสูจน์ด้วยตนเอง และแลกเปลี่ยนการพิสูจน์** เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับการให้นักเรียนลงมือพิสูจน์ด้วยตนเอง และนำเสนอการพิสูจน์หน้าชั้นเรียน ซึ่งขณะมีการนำเสนอการพิสูจน์หน้าชั้นเรียน เพื่อนร่วมชั้นเรียนคนอื่น ๆ มีโอกาสในการพิจารณาความถูกต้องและแสดงความคิดเห็น เพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนมุมมองเกี่ยวกับการพิสูจน์

1.3 **หลักการสร้างงานสำหรับการเปลี่ยนผ่านระหว่างการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์** ประกอบด้วยหลักการย่อย 2 ข้อ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1) **หลักการของงานในการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน** เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับงานที่ช่วยส่งเสริมในการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนเกี่ยวกับการสร้างข้อความคาดการณ์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra และการพิสูจน์ โดยงานที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้นี้จะต้องส่งเสริมให้นักเรียนมีการอภิปรายในประเด็นที่น่าสนใจ ภายใต้การอำนวยความสะดวกของ

ครูผู้สอน โดยต้องคำนึงถึงหลักของเหตุผลเชิงตรรกะทางคณิตศาสตร์มากกว่าการให้นักเรียนเชื่อตามคำพูดของครูผู้สอน

2) **หลักการของงานในการให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการพิสูจน์** เป็นหลักการที่เกี่ยวข้องกับงานที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการพิสูจน์ มีการใช้โปรแกรม GeoGebra สร้างสภาพแวดล้อมในการเรียนแบบไม่หยุดนิ่ง เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือสำรวจข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ด้วยตนเอง

2. **ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน** หมายถึง ความสามารถในการให้เหตุผล เพื่อแสดงว่าข้อความคาดการณ์ หรือข้อความทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องเส้นขนานเป็นจริงซึ่งประเมินผลจาก

2.1 **ด้านการทำความเข้าใจปัญหา** พิจารณาจากการระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

2.2 **ด้านการเขียนพิสูจน์** พิจารณาจากการเขียนแสดงการพิสูจน์ได้อย่างมีลำดับขั้นและถูกต้อง

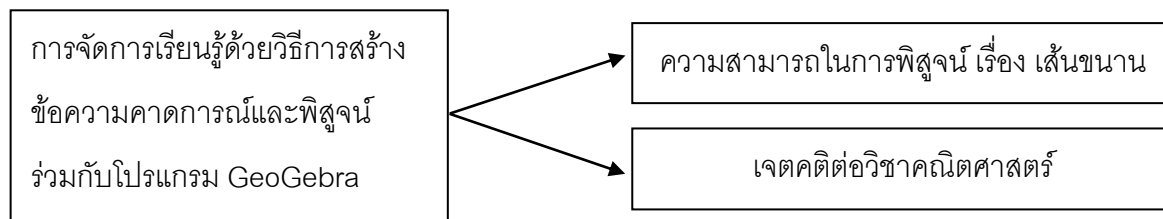
2.3 **ด้านการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์** พิจารณาจากการอ้างอิงเหตุผล บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความ

2.4 **ด้านการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์** พิจารณาจากความถูกต้องของการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์

3. **เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์** หมายถึง ความคิดเห็น ความรู้สึก หรือท่าทีการปฏิบัติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ทั้งทางบวกและทางลบ ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับการเรียนของตนเอง การสอนของครู และตัวบทเรียน

4. **เกณฑ์** หมายถึง คะแนนจุดตัดที่กำหนดการผ่านระดับที่ยอมรับได้ โดยการวิจัยครั้งนี้ กำหนดเกณฑ์ที่ร้อยละ 60 กล่าวคือ ถ้ารวมคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ แล้วคะแนนมีค่าตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม ถือว่าผู้นั้นผ่านเกณฑ์

กรอบแนวคิดในการวิจัย



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

สมมติฐานในการวิจัย

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

2. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัย เรื่อง การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

1. วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์
2. โปรแกรม GeoGebra
3. ความสามารถในการพิสูจน์
4. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

1. วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

1.1 ความหมายของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

มีผู้ให้ความหมายหลายท่านเกี่ยวกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์พิสูจน์ดังนี้

วีรศ กิตติวรากุล (2561, p. 15) กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นการใช้ความรู้เดิม หรือสิ่งที่โจทย์ปัญหากำหนดให้ค้นหาความสัมพันธ์ หรือข้อความทางคณิตศาสตร์ที่คิดว่าจะน่าจะเป็นจริง และพิสูจน์ว่าเป็นจริงอย่างมีเหตุผล

Boero, Garuti, and Lemut (2007, p. 248) กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ประกอบไปด้วย การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ขั้นตอนการสร้างข้อความคาดการณ์ ซึ่งมาจากการสำรวจสถานการณ์ปัญหา และวิเคราะห์ เพื่อค้นหาข้อความคาดการณ์ที่สมเหตุสมผล และขั้นตอนการพิสูจน์จะต้องค้นหาความสัมพันธ์ที่เชื่อมต่อกันกับกระบวนการอย่างสมเหตุสมผล

Martinez and Li (2010, p. 269) กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นกระบวนการที่ประกอบไปด้วยการสร้างข้อความคาดการณ์ ซึ่งเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน เกี่ยวข้องกับการสร้างข้อความกล่าวอ้างทางคณิตศาสตร์ และเกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ผ่านการวิเคราะห์ ความมีเหตุผลของนักเรียน

Astawa, Budayasa, and Juniati (2018, p. 16) กล่าวเกี่ยวกับ การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ โดยสรุปว่า เป็นวิธีที่สร้างข้อความคาดการณ์โดยใช้ความรู้เดิมของนักเรียน โดยอาศัยพื้นฐานของข้อมูล หรือปัญหาที่นำมา และพิสูจน์ว่าเป็นจริง โดยใช้กระบวนการให้เหตุผลที่อาศัยกฎทางตรรกะ หรือตัวอย่างค้าน

สำหรับการวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ความหมายวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ว่าเป็นวิธีการที่ให้นักเรียนได้สำรวจข้อมูล จนนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ที่ผ่านการคิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผล

1.2 รูปแบบของการสร้างข้อความคาดการณ์

มีนักการศึกษาหลายท่านที่กล่าวถึงรูปแบบการสร้างข้อความคาดการณ์ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, and Yevdokimov (2007, pp. 58-61) กล่าวว่า การสร้างข้อความคาดการณ์ มี 5 รูปแบบ คือ

1. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการอุปนัยเชิงประจักษ์ซึ่งพิจารณาจากกรณีจำนวนที่จำกัดซึ่งไม่ต่อเนื่อง (Empirical Induction from a Finite Number of Discrete Cases) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจากการสังเกตจากหลาย ๆ กรณี จนได้แบบรูป การสร้างข้อความคาดการณ์ แบบรูปนี้มักพบในปัญหาเกี่ยวกับจำนวน

2. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการอุปนัยเชิงประจักษ์ซึ่งพิจารณาจากกรณีแบบพลวัต (Empirical Induction from Dynamic Cases) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์ที่ได้จากการสังเกตกรณีหลายกรณีที่เกี่ยวเนื่องกัน จากการเคลื่อนไหวหรือเปลี่ยนแปลง ซึ่งทำให้สามารถสรุปเป็นจริงบางกรณี แต่ในกรณีทั่วไปต้องแสดงการพิสูจน์เพิ่มเติม

3. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการอุปมาน (Analogy) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปรียบเทียบกับสิ่งที่ เป็นจริงอยู่แล้ว เพื่อสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ใหม่

4. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการขยายผล (Abduction) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการสังเกตสิ่งอื่นเพิ่มเติม โดยอาศัยพื้นฐานมาจากสิ่งที่ทราบมาแล้ว เพื่อสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ใหม่

5. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการคาดคะเนบนฐานการรับรู้ (Perceptually Based Conjecturing) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการสร้างตัวแทน หรือรูปภาพ เพื่อให้ได้แบบรูป แล้วสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ใหม่

Martinez and Li (2010, p. 269) กล่าวว่า ข้อความคาดการณ์มี 3 รูปแบบ คือ

1. ข้อความคาดการณ์แบบแข่งขัน (Competing Conjectures) คือ ข้อความคาดการณ์ทั้งหมดที่ได้มาจากระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์

2. ข้อความคาดการณ์แบบตัดออก (Dismissed Conjectures) คือ ข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจากการตัดออก

3. ข้อความคาดการณ์ที่ต้องพิสูจน์ (Conjecture to Prove) คือ ข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจากระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์ที่มีเหตุผล และแสดงการพิสูจน์ได้

สำหรับการวิจัยนี้ ผู้วิจัยใช้การสร้างข้อความคาดการณ์จากการอุปนัยเชิงประจักษ์ซึ่งพิจารณาจากกรณีแบบพลวัต (Empirical Induction from Dynamic Cases) ซึ่งเป็นการสร้างข้อความคาดการณ์ที่ได้จากการสังเกตกรณีหลายกรณีที่เกี่ยวข้องกัน จากการเคลื่อนไหวหรือเปลี่ยนแปลง ซึ่งทำให้สามารถสรุปเป็นจริงบางกรณี แต่ในกรณีทั่วไปต้องแสดงการพิสูจน์เพิ่มเติม

1.3 หลักการของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

มีนักการศึกษาหลายท่านได้ระบุเกี่ยวกับกำหนดขั้นตอนหรือหลักการของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ขึ้น ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira, and Varandas (1998, p. 4) ได้กล่าวถึงขั้นตอนเกี่ยวกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ดังนี้

1. ตั้งคำถามและสร้างข้อความคาดการณ์
2. ทดสอบและปรับแก้ข้อความคาดการณ์
3. ให้เหตุผลและพิสูจน์ข้อความคาดการณ์

Morselli (2006, p. 185) ได้กล่าวเกี่ยวกับขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ดังนี้

1. สำรวจปัญหาเพื่อค้นหาสมบัติ
2. กำหนดและเชื่อมโยงข้อความคาดการณ์
3. สำรวจข้อความคาดการณ์ และค้นหาข้อโต้แย้งเชิงทฤษฎีที่ตรวจสอบได้
4. สร้างบทพิสูจน์ โดยบทพิสูจน์นั้นจะต้องได้รับการยอมรับจากสังคมนักคณิตศาสตร์

Lin et al. (2011, pp. 305-325) ได้เสนอหลักการสร้างงานสำหรับการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ (Principles of Task Design for Conjecturing and Proving) ดังต่อไปนี้

1. การพัฒนาหลักการสำหรับการสร้างงานที่เกี่ยวกับการสร้างข้อความคาดการณ์ (Developing Principles for Conjecturing Task Design) มี 4 ข้อดังรายละเอียดต่อไปนี้

1.1 ส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการมีส่วนร่วมในการสังเกต (Promote conjecturing by providing an opportunity to engage in observation) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสให้นักเรียนสังเกตความเหมือนหรือสังเกตรูปแบบของความสัมพันธ์ของตัวอย่างเฉพาะหลาย ๆ ตัวอย่าง ซึ่งการนำเทคโนโลยี เช่น การใช้ฟังก์ชัน “การเลื่อน” ของโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต สามารถช่วยให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ได้ดีขึ้น

1.2 ส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการมีส่วนร่วมในกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์ (Promote conjecturing by providing an opportunity to engage in construction) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างความรู้ใหม่โดยใช้พื้นฐานอยู่บนความรู้เดิมที่นำไปสู่ข้อความคาดการณ์ เช่น การเปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์โดยใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนใช้พื้นฐานความรู้เดิมมาสร้างความรู้ใหม่ที่อาจนำไปสู่ข้อความคาดการณ์ที่ต้องการ

1.3 ส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการปรับเปลี่ยนความรู้ที่มีมาก่อน (Promote conjecturing by providing an opportunity to transform prior knowledge) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปรับเปลี่ยนความรู้ที่ทราบมาก่อนแล้ว สิ่งที่กำหนดให้ สูตร หรือข้อสรุปที่ได้ แล้วสำรวจต่อว่าข้อความหรือความสัมพันธ์ใหม่จากการปรับเปลี่ยนข้อมูล เป็นจริงตามนั้นหรือไม่

1.4 ส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปิดโอกาสในการสะท้อนผล (Promote conjecturing by providing an opportunity for reflection) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์ไม่ว่าจะเป็นการสังเกตตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง การสังเกตตัวอย่างเฉพาะเพียงตัวอย่างเดียว หรือการสร้างข้อความคาดการณ์จากการปรับเปลี่ยนข้อมูล อาจจะยังไม่สมบูรณ์หรือคลาดเคลื่อนได้ จึงต้องมีการพูดคุย ปรัชญาโต้แย้งกัน เพื่อค้นหาสิ่งที่ขาดหาย หรือเงื่อนไขที่จำเป็น เพื่อให้ได้ข้อความคาดการณ์ที่สมบูรณ์

2. การพัฒนาหลักการสำหรับการสร้างงานเกี่ยวกับการพิสูจน์ (Developing Principles for Designing Proving Tasks) มี 5 ข้อดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 ส่งเสริมการจำแนกชนิดของข้อความ (Promote classifying mathematical statements) นักเรียนควรทราบว่า การใช้เหตุผลในการพิสูจน์นั้นมีหลายแบบ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะข้อความทางคณิตศาสตร์ที่จะพิสูจน์ เช่น การใช้ตัวบ่งปริมาณ ซึ่งส่งผลให้บาง

ลักษณะของข้อความทางคณิตศาสตร์ต้องใช้การพิสูจน์แบบทั่วไป หรือบางลักษณะของข้อความทางคณิตศาสตร์ควรใช้ตัวอย่างค้ำยันในการพิสูจน์

2.2 การแสดงข้อโต้แย้งผ่านตัวแทนทางความคิดที่หลากหลาย (Expressing arguments in several modes of argument representation) การเริ่มต้นการพิสูจน์ควรเริ่มต้นการพิสูจน์ในลักษณะที่ไม่เป็นทางการก่อน เพื่อวางแผนว่าจะพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ไปในทิศทางใด อย่างไร จากนั้นเมื่อเห็นแนวทางในการพิสูจน์ที่อาจนำไปสู่การสรุปข้อความคาดการณ์ที่ต้องการ จึงใช้ภาษาทางการและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการเขียนพิสูจน์

2.3 ส่งเสริมการเปลี่ยนบทบาทในขณะการทำงาน (Promote changing roles whilst engaging with a task) จากเดิมหรือการสอนปกติ ครูมีบทบาทเป็นผู้ประเมินหรือตรวจสอบความถูกต้องของการพิสูจน์ แต่หลักการนี้ส่งเสริมให้นักเรียนเปลี่ยนบทบาทมาเป็นผู้ประเมิน ตรวจสอบการพิสูจน์ โดยนักเรียนจะต้องคำนึงถึงความชัดเจน ความสมบูรณ์ และความถูกต้องของการพิสูจน์ และเมื่อพบข้อบกพร่องของการพิสูจน์ ก็ดำเนินการแก้ไขการพิสูจน์ให้ถูกต้อง

2.4 ตั้งข้อสังเกตเกี่ยวกับความเพียงพอและความจำเป็นของการพิสูจน์ (Raise the issue of sufficient and necessary proof) งานควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ตระหนักถึงการใช้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเหตุผลที่นำมาใช้ในการพิสูจน์จะจำเป็นและเพียงพอหรือไม่ ก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อความทางคณิตศาสตร์นั้น ๆ

2.5 ผู้เรียนแสดงการพิสูจน์ด้วยตนเอง และแลกเปลี่ยนการเขียนพิสูจน์ (Learners create and share their own proofs) หลักการนี้ส่งเสริมให้นักเรียนได้เขียนบทพิสูจน์ด้วยตนเอง และนำเสนอการพิสูจน์ของตนเองต่อเพื่อนร่วมชั้นเรียน ซึ่งระหว่างการทำกิจกรรมนี้ เพื่อนร่วมชั้นเรียนคนอื่น ๆ พิจารณาความถูกต้อง และเปิดโอกาสในการแลกเปลี่ยนมุมมองในการพิสูจน์

3. การพัฒนาหลักการสำหรับการสร้างงานที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนผ่านระหว่างการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ (Developing Principles for Designing Transiting Tasks Between Conjecturing and Proving)

3.1 งานควรมีรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีการอภิปรายภายใต้การอำนวยความสะดวกของครูผู้สอน โดยคำนึงถึงเหตุผลเชิงตรรกะของคณิตศาสตร์มากกว่าการให้นักเรียนเชื่อตามคำพูดของครูผู้สอน (The task requires that norms be

established in the classroom that allow discussions, under the facilitation of the instructor, about accepting/ rejecting mathematical ideas, including conjectures, based on the logical structure of the mathematical system rather than by appeal to the authority of the instructor) งานควรถูกกำหนดรูปแบบให้นักเรียนได้มีการอภิปราย ภายใต้การอำนวยความสะดวกของครูผู้สอน ที่จะคอยให้คำแนะนำและคำปรึกษาแก่นักเรียน

3.2 งานต้องสร้างความต้องการให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการพิสูจน์ (The task generates a need for the students to engage in proof.) การใช้เทคโนโลยีทางการศึกษา เช่น การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการเรียน ช่วยสร้างสภาพแวดล้อมในการเรียนแบบไม่หยุดนิ่ง กล่าวคือ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์จะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือสำรวจข้อความคาดการณ์ และสำรวจแนวทางในการพิสูจน์ ส่งผลให้นักเรียนมีส่วนร่วมในบทเรียนมากขึ้น

Astawa et al. (2018, p. 19) ได้กล่าวถึงขั้นตอนเกี่ยวกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา

- อ่านปัญหาเพื่อค้นหาสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการทราบ
- ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด
- ระบุสิ่งที่ต้องการทราบ

2. สำรวจปัญหา

- เปลี่ยนปัญหาให้เป็นรูปภาพหรือกราฟ
- จัดการปัญหาโดยใช้รูปภาพหรือกราฟหลาย ๆ แบบ
- ค้นหาสมบัติหรือรูปแบบจากการสังเกตการเปลี่ยนแปลงของรูปภาพหรือ

กราฟ

- เชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์จากการสังเกตสมบัติที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงรูปภาพหรือกราฟ

- กำหนดเงื่อนไขหรือแบบรูปเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์

3. สร้างข้อความคาดการณ์

- เขียนข้อความคาดการณ์ จากการสำรวจสมบัติ โดยใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการอ้างอิงให้ถูกต้อง และเขียนให้ผู้อื่นเข้าใจได้

4. ตัดสินข้อความคาดการณ์

- อธิบายเหตุผลของข้อความคาดการณ์โดยการวัด หรือการนับ จากรูปภาพ หรือกราฟ และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

- สรุปข้อความเป็นรูปทั่วไป โดยใช้การทดสอบด้วยกรณีอื่น ๆ แล้วข้อความ คาดการณ์ยังเป็นจริง

- ตรวจสอบและแก้ไขข้อความคาดการณ์

5. พิสูจน์ข้อความคาดการณ์

- ข้อความคาดการณ์จะเป็นจริง เมื่อได้พิสูจน์ข้อความคาดการณ์เป็นขั้นตอน

- เลือกรูปแบบการพิสูจน์ที่เหมาะสมกับข้อความคาดการณ์ที่สร้าง

- ดำเนินการพิสูจน์ โดยการแสดงรูปภาพหรือกราฟ ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ การนับ การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงเหตุผล และสรุปข้อความคาดการณ์ว่าเป็นจริง หรือพิสูจน์แล้ว

วีริศ กิตติวรากุล (2561, p. 19) ได้กล่าวถึงขั้นตอนเกี่ยวกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ดังนี้

1. ส่วนที่เกี่ยวข้องกับบทนิยาม

1.1 การสำรวจปัญหา เป็นขั้นที่การสำรวจปัญหา หาจุดสัมพันธ์ สิ่งที่เหมือน หรือสิ่งที่ต่างกันผ่านหลาย ๆ ตัวอย่าง

1.2 การเขียนข้อความเชิงบทนิยาม เป็นขั้นการวิเคราะห์สิ่งที่ได้จากขั้นสำรวจ ปัญหา เพื่อนำมาเขียนข้อความเชิงบทนิยาม

1.3 การตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม เป็นขั้นการตรวจสอบความถูกต้องของข้อความเชิงบทนิยามว่าถูกต้องหรือไม่ เมื่อถูกต้องแล้วจึงเขียนเป็นบทนิยาม

2. ส่วนที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบท

2.1 การสำรวจปัญหา เป็นขั้นที่การสำรวจปัญหา หาจุดสัมพันธ์ สิ่งที่เหมือน หรือสิ่งที่ต่างกันผ่านหลาย ๆ ตัวอย่าง

2.2 การเขียนข้อความคาดการณ์ เป็นขั้นที่ต้องตรวจสอบความเชื่อมโยงกันที่เกิดขึ้นในขั้นการสำรวจปัญหา และนำความเชื่อมโยงที่ได้ไปเขียนเป็นข้อความคาดการณ์

2.3 การสำรวจข้อความคาดการณ์ เป็นขั้นที่ต้องค้นหาว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง

2.4 การเขียนพิสูจน์ เป็นการนำผลจากการวิเคราะห์ข้อความคาดการณ์มาแสดงการพิสูจน์

จากที่กล่าวมาข้างต้น ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำหลักการสร้างงานซึ่งเป็นหลักการของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ที่พัฒนาขึ้นโดย Lin et al. (2011) มาปรับใช้ในการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน เพื่อส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียน

1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

จากการศึกษาการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในประเทศไทยพบว่า มีงานวิจัยของวีริศ กิตติวรากุล เท่านั้นที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีดังกล่าว ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

งานวิจัยในประเทศ

วีริศ กิตติวรากุล (2561, p. บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเกี่ยวกับความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม และเพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์เรื่องวงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งแบ่งตามลักษณะของเนื้อหา กล่าวคือ เนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับบทนิยาม ได้ดำเนินการสอนตามขั้นตอน 1) ขั้นสำรวจปัญหา 2) ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม และ 3) ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม ส่วนเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบท ได้ดำเนินการสอนตามขั้นตอน 1) ขั้นสำรวจปัญหา 2) ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์ 3) ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์ และ 4) ขั้นการพิสูจน์ ในการวิจัยครั้งนี้ กลุ่มทดลองคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 40 คน โดยผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

งานวิจัยต่างประเทศ

Burtch (2005, p. Abstract) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ในการจัดการเรียนการสอน เรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับนักศึกษาปริญญาตรี ผลการวิจัยพบว่า การใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ ในการจัดการเรียนการสอน ช่วยทำให้

นักเรียนเห็นวิธีหรือแนวทางในการแก้ปัญหาได้ดีขึ้น สามารถสร้างแนวคิดจากตัวอย่างได้ด้วยตนเอง

Gillis (2005, pp. 69-71) ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลของการจัดการเรียนรู้โดยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โดยการสร้างบรรยากาศการเรียนรู้แบบไม่หยุดนิ่งโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต กับแบบไม่ใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต การวิจัยครั้งนี้ประกอบไปด้วยนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ในระดับชั้นมัธยมศึกษา รวม 41 คน ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต สามารถสร้างข้อความข้อความที่ถูกต้องสมบูรณ์ได้ดีกว่า หรือมีข้อผิดพลาดน้อยกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบไม่ได้ใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

Chen (2015, pp. 720-721) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เพื่อส่งเสริมทักษะการคิด และการอภิปรายของนักเรียน ในเรื่องการจัดหมู่ ผลการวิจัยพบว่า 1) วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ช่วยเพิ่มโอกาสให้กับนักเรียนในการอภิปราย สื่อสาร และร่วมมือกันในกิจกรรมการสร้างข้อความคาดการณ์ 2) วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ช่วยส่งเสริมทักษะการคิดเรื่องการจัดหมู่ของนักเรียน

จากการศึกษาการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ช้างตัน สรุปได้ว่า การใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน มีผลดีต่อความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน ทำให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์ได้ดี ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาเรื่องการจัดการเรียนรู้โดยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน โดยกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้โดยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ สำหรับการวิจัยครั้งนี้จะแตกต่างกับงานวิจัยของวีรศ กิตติวรากุล (2561) ในประเด็นที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการจัดการเรียนรู้ ซึ่งงานวิจัยของวีรศ กิตติวรากุล ได้ดำเนินการจัดการเรียนรู้โดยแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน ดังที่กล่าวข้างต้น แต่การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดการเรียนรู้ตามหลักการสร้างงานสำหรับการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ ซึ่งปรับมาจากแนวคิดของ Lin et al. (2011)

2. โปรแกรม GeoGebra

2.1 ประวัติความเป็นมาของโปรแกรม GeoGebra

Markus Hohenwarter นักพัฒนาโปรแกรมชาวออสเตรียได้เริ่มสร้างโปรแกรม GeoGebra ตั้งแต่ปี 2001 ในวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาโท มหาวิทยาลัย Salzburg ประเทศออสเตรีย เขามีความตั้งใจที่จะผนวกเรขาคณิตเชิงพลวัตและพีชคณิตคอมพิวเตอร์ไว้ด้วยกัน โดย

เป้าหมายหลักคือการสร้างซอฟต์แวร์เพื่อการศึกษาที่รวมความสะดวกในการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเข้ากับความสามารถและคุณสมบัติของระบบพีชคณิตคอมพิวเตอร์ ครูในออสเตรเลียและเยอรมันเริ่มใช้ GeoGebra ในการสอนคณิตศาสตร์ ต่อมาในปี 2007 Michael Borcherds ได้พัฒนา GeoGebra ต่อจนเป็นที่นิยมอย่างกว้างขวางไปทั่วโลก ได้รับรางวัลซอฟต์แวร์เพื่อการศึกษาในระดับนานาชาติหลายรางวัล เช่น European Academic Software Award 2002 ประเทศสโลวีเนีย Comenius 2004 ประเทศเยอรมัน ปัจจุบัน GeoGebra ได้พัฒนาจนเป็น Version ที่ 4 แล้ว และยังมีแผนพัฒนา GeoGebra แบบ 3D อีกด้วย (Hohenwarter & Fuchs, 2004, p. 1; Preiner, 2008, pp. 36-37; พงศ์ศักดิ์ วุฒิสันต์, 2556, p. 14)

2.2 คุณลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมที่มีลักษณะเด่นในเรื่องของการสร้าง ขยาย ยืดหด รูปเรขาคณิตได้ ซึ่งเป็นตัวช่วยสำคัญของครูและนักเรียน การศึกษาวิชาเรขาคณิต นักเรียนสามารถที่จะปรับรูปเรขาคณิตได้ตามใจชอบ และทำความเข้าใจกับรูปเรขาคณิตนั้น ๆ ควบคู่ไปด้วย เนื่องจากโปรแกรม GeoGebra จะแสดงข้อมูลต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตนั้น ๆ ด้วย จากลักษณะเด่นข้างต้นมีผู้ศึกษาโปรแกรม GeoGebra หลายคนได้กล่าวถึงคุณลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra ไว้ดังนี้

ชญญา อุทิศ (2557, pp. 26-28) กล่าวว่า GeoGebra เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์พลวัต ที่ไม่เสียค่าใช้จ่าย มีเครื่องมือทางเรขาคณิตมากมาย ผู้ใช้สามารถออกแบบปรับแต่ง รูปเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม GeoGebra การนำ GeoGebra มาใช้ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จะช่วยส่งเสริมการสังเกต การสำรวจ ส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจในคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์

พิสุทธิ ยงทางเรือ (2559, p. 17) กล่าวว่า GeoGebra เป็นโปรแกรมที่มีจุดเด่น คือ สามารถ ยืด หด ขยาย และเคลื่อนไหวได้ โปรแกรมดังกล่าว จึงช่วยให้นักเรียนมองเห็นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมชัดขึ้น และทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนมากยิ่งขึ้น

มัณฑณิชา แกมแก้ว (2560, p. 33) กล่าวว่า GeoGebra เป็นโปรแกรมที่ช่วยในหลาย ๆ หัวข้อของวิชาคณิตศาสตร์ เป็นโปรแกรมที่สามารถแสดงภาพเคลื่อนไหว สร้างรูปเรขาคณิตสองมิติ และสามมิติ และช่วยให้นักเรียนสามารถตั้งข้อสังเกต และได้มีโน้ตค้นทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง

Kovács, Recio, and Vélez (2018, p. 44) กล่าวว่า GeoGebra เป็นโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ที่มีอุปกรณ์ในโปรแกรม ที่ช่วยกระตุ้นให้นักเรียน ได้สืบเสาะ ค้นพบ และพิจารณาความสัมพันธ์ สร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ได้ดียิ่งขึ้น

จากการศึกษาคุณลักษณะเด่นของโปรแกรม GeoGebra พบว่า GeoGebra เป็นโปรแกรมที่มีจุดเด่นหลายอย่างซึ่งทั้งครู และนักเรียน รวมถึงผู้ที่สนใจสามารถเข้าถึงได้โดยไม่มีค่าใช้จ่าย และโปรแกรม GeoGebra ยังทำให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจทางเรขาคณิตมากขึ้น จุดเด่นของโปรแกรม GeoGebra คือ สามารถสร้าง ออกแบบ ปรับแต่ง และเคลื่อนไหวรูปเรขาคณิตได้ ทำให้ผู้ใช้โปรแกรมรู้สึกสนุก ตื่นเต้นไปกับความสามารถของโปรแกรม

2.3 โปรแกรม GeoGebra กับการจัดการเรียนรู้

โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อการสอนที่ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อส่งเสริมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน ช่วยให้การเรียนรู้ของนักเรียนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น โดยนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงโปรแกรม GeoGebra กับการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

ดาวเรือง บุตรทรัพย์ (2559, p. 33) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อการสอนที่ช่วยให้นักเรียนสนใจบทเรียน เข้าใจบทเรียน สามารถแก้ปัญหาที่เผชิญได้ดีขึ้น ทั้งยังเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาพื้นฐานความรู้ของ นักเรียนได้ดีขึ้น

Hohenwarter and Fuchs (2004, p. 3) กล่าวถึง การนำ GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ด้วยลักษณะอเนกประสงค์ของโปรแกรม โปรแกรม GeoGebra สามารถนำไปใช้ประกอบการสาธิต และการอธิบายข้อมูล หรือใช้โปรแกรม GeoGebra ในการวาดภาพสร้างรูปทางเรขาคณิตได้อีกด้วย GeoGebra ยังช่วยให้นักเรียนได้ฝึกสังเกต และตั้งคำถาม ทำให้นักเรียนสามารถจัดการความรู้และค้นพบข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง GeoGebra ยังสามารถเป็นสื่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

Dikovic (2009, pp. 191-192) กล่าวว่า GeoGebra ถูกออกแบบมาเพื่อการศึกษา โดยเฉพาะ GeoGebra สามารถรองรับการสร้างรูปที่มีจุด เส้นตรง และภาคตัดกรวยเป็นส่วนประกอบ นักเรียนสามารถโต้ตอบกับระบบพีชคณิตของคอมพิวเตอร์และระบบเรขาคณิตในโปรแกรม GeoGebra ได้ทันที GeoGebra จึงช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียน และช่วยพัฒนาความรู้ของนักเรียนได้ดีขึ้น

จากข้างต้นจะเห็นได้ว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อการสอนที่สำคัญช่วยให้นักเรียนสนใจและเข้าใจบทเรียนมากขึ้น และในโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการวาด

ภาพ ช่วยสร้างรูปเรขาคณิต และอธิบายข้อมูล รวมทั้งให้นักเรียนสามารถโต้ตอบได้ นอกจากนี้ยังช่วยส่งเสริมให้นักเรียนสร้างความรู้และค้นพบข้อความคาดการณ์ด้วยตนเอง อีกทั้งยังช่วยให้นักเรียนพัฒนาความรู้ทางเรขาคณิตได้อย่างเป็นขั้นตอน

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra

งานวิจัยในประเทศ

ชญญา อุทิศ (2557, p. บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง “กำหนดการเชิงเส้น” ที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2556 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 48 คน คัดเลือกนักเรียนจากการสุ่มแบบกลุ่มในจำนวนนักเรียนทั้งหมด 10 ห้องเรียน โดยผลการวิจัย พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่าเกณฑ์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และมีความสามารถในการแก้ปัญหา ให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ และการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และนักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยกับการใช้โปรแกรม GeoGebra ในกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

พิสุทธิ ยงทางเรือ (2559, p. บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่อง ภาคตัดกรวย ในนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โปรแกรม วิทยา - คณิต ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 อิสลามวิทยาลัยแห่งประเทศไทย จำนวน 40 คน จากกลุ่มนักเรียน 60 คน ซึ่งนักเรียนกลุ่มทดลองได้มาโดยการสุ่มแบบแบ่งชั้นภูมิ โดยการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ก่อนและหลังเรียนเรื่องภาคตัดกรวยพบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญระดับ .01 หลังจากที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่องภาคตัดกรวย 2) จากผลการเปรียบเทียบก่อนเรียนและหลังเรียน พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการเขียนความสัมพันธ์ของสมการและกราฟในภาคตัดกรวย หลังจากได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่องภาคตัดกรวย สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .01

ภานุมาศ วรสันต์ (2561, p. 60) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบของ

พหุนาม โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ระหว่างการเรียนรู้ด้วยกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ กลุ่มทดลองคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนชัยภูมิภักดีชุมพล อำเภอเมือง จังหวัดชัยภูมิ จำนวน 91 คน โดยการสุ่มแบบกลุ่ม สำหรับผลการวิจัยพบว่า 1) กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีประสิทธิภาพเท่ากับ 80.83/78.14 2) ดัชนีการวัดประสิทธิผลของกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เท่ากับ 0.6623 3) ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สูงกว่า ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .05

งานวิจัยต่างประเทศ

Saha, Ayub, and Tarmizi (2010, pp. 691-692) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลของการจัดการเรียนรู้เรื่อง Coordinate Geometry โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เทียบกับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนที่มีอายุระหว่าง 16 - 17 ปี จำนวน 53 คน โดยแบ่งนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นระดับต่ำและสูง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระดับต่ำ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องคู่ขนานและเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GeoGebra หลังเรียนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ส่วนนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระดับสูง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนเรื่องคู่ขนานและเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ไม่แตกต่างกับกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

Zengin, Furkan, and Kutluca (2012, p. 187) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของการจัดการเรียนรู้เรื่องตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เทียบกับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนจำนวน 51 คน มีกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม โดยกลุ่มทดลองใช้โปรแกรม GeoGebra ในการจัดการเรียนรู้ และกลุ่มควบคุมได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ซึ่งใช้เวลาเก็บข้อมูล 5 สัปดาห์ โดยผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญ

Arbain and Shukor (2015, p. 208) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ซึ่งได้ทำการสำรวจผลที่เกิดจากการใช้โปรแกรม GeoGebra กับนักเรียนในประเทศมาเลเซีย 62 คน โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยกลุ่มทดลองแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสถิติโดยใช้โปรแกรม GeoGebra แต่กลุ่มควบคุมแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสถิติโดยไม่ใช้โปรแกรม ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ใช้โปรแกรมสูงกว่ากลุ่มที่ไม่ได้ใช้โปรแกรม

จากการศึกษาการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra ข้างต้น พบว่า การวิจัยส่วนใหญ่เมื่อนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้ในการจัดการเรียนรู้ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหรือความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้น นอกจากนี้ผลจากการวิจัยยังชี้ให้เห็นว่า การนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้ในการจัดการเรียนรู้อย่างช่วยพัฒนาทักษะและกระบวนการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ให้สูงขึ้นได้ ดังนั้นการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาโปรแกรม GeoGebra เพื่อนำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้ร่วมกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ดังที่กล่าวข้างต้น เพื่อช่วยพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่องเส้นขนาน ของนักเรียน

3. ความสามารถในการพิสูจน์

3.1 ความหมายของการพิสูจน์

การพิสูจน์เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น ๆ ว่าเป็นข้อความที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลหรือไม่ ผู้สอน นักเรียน นักศึกษา ที่ศึกษาเรื่องการพิสูจน์ต่าง ๆ นั้นต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน (ประเสริฐ เสียงดี, 2527, p. 1) ดังนั้นการพิสูจน์จึงเป็นกระบวนการในการต่อยอดการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ให้ดียิ่งขึ้น และเป็นประโยชน์ในการศึกษาในเรื่องนั้น ๆ ให้กว้างขวางยิ่งขึ้น จากการศึกษาความหมายของการพิสูจน์พบว่าผู้กล่าวถึงความหมายของการพิสูจน์ไว้ดังนี้

ขวัญ เพี้ยซ้าย (2547, p. 11) กล่าวว่า การพิสูจน์ หมายถึง การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท และข้อความที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ในการพิสูจน์ และแสดงให้เห็นถึงลำดับขั้นตอนในการหาความจริงเพื่อนำไปสู่การหาข้อสรุป

วัชร น้อยมี (2551, p. 85) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การแสดงเหตุผลแบบนิรนัย โดยนำทฤษฎีบท บทนิยาม สัจพจน์ หรือข้อความที่กำหนดให้ เพื่อแสดงให้เห็นถึงลำดับขั้นพิสูจน์ที่เป็นจริงที่ได้มาจากการวิเคราะห์หรือข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช (2559, p. 5) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การแสดง เพื่อให้ได้มาซึ่งข้อสรุปจากสมมติฐาน โดยใช้การอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลอย่างเป็นขั้น ๆ

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ (2560, p. 23) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การแสดงให้เห็นว่า ประโยคบอกเล่า (ที่เป็นจริง หรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง) เป็นจริง โดยต้องอาศัยเหตุผลที่รัดกุม และชัดเจน

Hanna (1990, p. 6) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ ลำดับข้อความที่จำกัด โดยอาศัย เหตุผลเชิงตรรกะและข้อความก่อนหน้า ในการอ้างเหตุผลในแต่ละขั้นของข้อความ โดยข้อความ สุดท้ายคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

Wilson (1993, p. 49) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่ใช้นิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์มาแล้วว่าเป็นจริงและการให้เหตุผลแบบนิรนัย ที่จะแสดงว่า ข้อความนั้นสมเหตุสมผล

Solow (2002, p. 3) การพิสูจน์คือ การแสดงความคิดออกมาเป็นคำพูดในภาษา คณิตศาสตร์โดยปราศจากข้อขัดแย้ง

Lesseig (2011, p. 19) กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นการแสดงให้เห็นถึงความจริงของ คำสั่งทางคณิตศาสตร์หรือเชิงตรรกะโดยอาศัยสัจพจน์และทฤษฎีบทที่ได้มาจากสัจพจน์เหล่านั้น

Muca (2015, p. 20) กล่าวว่า การพิสูจน์ คล้ายกับการแก้ปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหายังไม่ ทราบถึงวิธีการแก้ปัญหามาก่อน

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยให้ความหมายของการพิสูจน์ไว้ดังนี้ การพิสูจน์ คือ การให้เหตุผล เพื่อแสดงว่า ข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริง โดยพิจารณาจากความสามารถในการทำ ความเข้าใจปัญหา การเขียนพิสูจน์ การอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ และการใช้ภาษา และสัญลักษณ์ในการพิสูจน์

3.2 ความสำคัญของการพิสูจน์

การพิสูจน์มีความสำคัญและจำเป็นในการเรียนคณิตศาสตร์ เนื่องจากการพิสูจน์ สามารถทำให้นักเรียนมีกระบวนการในการทำความเข้าใจอย่างเป็นระบบ และช่วยให้นักเรียน เข้าใจคณิตศาสตร์ได้อย่างแท้จริง ซึ่งมีผู้กล่าวถึงความสำคัญของการพิสูจน์ ดังนี้

กรรณิกา กวักเพฑูรย์ (2542, p. 51) กล่าวโดยสรุปว่า การพิสูจน์เป็นหัวใจของการ คิดค้น นักคณิตศาสตร์จะต้องอ้างเหตุผล เพื่อแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีบทนั้น ๆ ถูกต้อง

พรพิศ ยิ้มประยูร (2556, p. คำนำ) กล่าวว่าโดยสรุปว่า การพิสูจน์เป็นพื้นฐานสำคัญ ของทุกสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ช่วยให้นักเรียนเข้าใจโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ สัญลักษณ์ บท นิยามต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ (2560, p. คำนำ) กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นเรื่องจำเป็นและ สำคัญยิ่งสำหรับคณิตศาสตร์ เพราะเป็นสิ่งที่ทำให้เรายืนยันความเป็นจริงต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ได้ ข้อความที่เราสงสัยว่าเป็นจริงหรือไม่ เมื่อได้รับการพิสูจน์แล้ว เราจะสามารถยอมรับในความเป็น จริงของข้อความนั้นได้ตลอดไป เพราะเราใช้กระบวนการคิดที่อาศัยหลักตรรกศาสตร์ซึ่งมีความ แน่นอนชัดเจน ไม่แปรผันไปตามกาลเวลาหรือสภาพแวดล้อม

Hemmi and Löfwall (2010, p. 205) กล่าวว่า นักคณิตศาสตร์หลายท่านเห็นว่า การ พิสูจน์ควรรวมอยู่ในหลักสูตรพื้นฐานเพราะการพิสูจน์คือวิญญาณและกระดูกสันหลังของ คณิตศาสตร์ การพิสูจน์ช่วยทำให้นักเรียนเห็นความแตกต่างระหว่างการเรียนคณิตศาสตร์ใน โรงเรียนและการเรียนคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัย และช่วยให้นักเรียนสามารถเข้าใจคณิตศาสตร์ อย่างแท้จริงได้

Ellis, Bieda, and Knuth (2012, p. 7) กล่าวว่า การพิสูจน์ เป็นหลักปฏิบัติที่สำคัญ ของนักคณิตศาสตร์ และทำให้นักเรียนเข้าใจความจริงเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ครูควรส่งเสริมให้ นักเรียนได้ฝึกฝนหรือมีประสบการณ์เกี่ยวกับการพิสูจน์ ในช่วงที่กำลังศึกษาอยู่ใน เกรด 9 ถึง 12

Pantaleon, Juniati, Lukito, and Mandur (2018, p. 1) กล่าวว่า การพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์จะต้องสื่อสาร อย่างแม่นยำ สม่ำเสมอและชัดเจน ผ่านการใช้เหตุผลเชิงตรรกะ เพื่อให้ เป็นที่ยอมรับได้

จากที่กล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่าการพิสูจน์มีความสำคัญมาก เพราะการพิสูจน์เป็น หัวใจสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ รวมทั้งเป็นหลักปฏิบัติที่สำคัญของนักคณิตศาสตร์ ช่วยให้ เข้าถึงความจริงและช่วยคลายข้อสงสัยต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้การพิสูจน์ยังช่วยฝึกการ สื่อสาร ฝึกการให้เหตุผล และช่วยเสริมสร้างความเข้าใจที่ถูกต้องของนักเรียนเกี่ยวกับระบบและ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์

3.3 บทบาทของการพิสูจน์

มีผู้กล่าวถึงบทบาทของการพิสูจน์ที่น่าสนใจไว้ ดังนี้

Bell (1976, p. 24) ได้กล่าวถึง บทบาทของการพิสูจน์ไว้ดังนี้

1. การตรวจสอบ (verification or justification): ยืนยันความจริงของข้อเสนอ
และตรวจสอบ

2. การทำให้กระจ่าง (illumination): แสดงให้เห็นและนำเสนอว่าทำไมข้อเสนอ
เป็นความจริงในเชิงลึก

3. การทำให้เป็นระบบ (systematization): การจัดระบบของผลลัพธ์ที่ได้จากการ
ตรวจสอบ (verification or justification) รวมถึงแนวคิด หรือทฤษฎีที่ได้รับ

De Villiers (1990, pp. 17-18) ได้ขยายแนวคิดของ Bell โดยกล่าวถึง บทบาทของ
การพิสูจน์ไว้ดังนี้

1. การตรวจสอบ (verification): ตรวจสอบความเป็นจริงของข้อความ
2. การอธิบาย (explanation): ให้ข้อมูลในเชิงลึกกว่าทำไมถึงเป็นจริง
3. การทำให้เป็นระบบ (systematization): การจัดระเบียบผลลัพธ์ต่าง ๆ สัจพจน์
แนวคิดหลักและทฤษฎีบท ให้เป็นระบบ

4. การค้นพบ (discovery): การค้นพบผลลัพธ์หรือสิ่งใหม่

5. การสื่อสาร (communication): การถ่ายทอดความรู้ทางคณิตศาสตร์

จากบทบาทของการพิสูจน์ที่กล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่าการพิสูจน์มีบทบาทสำคัญ
หลายอย่างได้แก่ บทบาทช่วยในการตรวจสอบ การอธิบาย การทำให้เป็นระบบ การค้นพบ
หรือการสื่อสาร ซึ่งบทบาทเหล่านี้มีความสำคัญในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

3.4 วิธีการพิสูจน์

สำหรับวิธีการพิสูจน์ ได้มีผู้ที่กล่าวถึงวิธีการพิสูจน์หลายท่าน ดังนี้

สมเดช บุญประจักษ์ (2551, pp. 67-69) กล่าวว่า การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป
 $p \rightarrow q$ มี 2 วิธี คือ

1. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปแบบ $p \rightarrow q$ ทางตรง เริ่มต้นด้วยสมมติ p
เป็นจริง แล้วพิสูจน์ว่า q จริง

2. การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปแบบ $p \rightarrow q$ ทางอ้อม ซึ่งพิสูจน์ข้อความ
 $\sim q \rightarrow \sim p$ แทนข้อความ $p \rightarrow q$ เพราะ $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

พัฒน์ อุดมกะวานิช (2559, pp. 41-45) กล่าวว่า การพิสูจน์ $p \rightarrow q$ มี 2 วิธี คือ การ
พิสูจน์ทางตรง และการพิสูจน์ทางอ้อม

1. การพิสูจน์ทางตรง เริ่มต้นด้วยการสมมติ p (เป็นจริง) แล้ว แสดงให้ได้ว่า q
(เป็นจริง) หรือ มี q เป็นบรรทัดสุดท้ายของบทพิสูจน์

2. การพิสูจน์ทางอ้อม มี 2 วิธี คือ

2.1 การพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่ (proof by contrapositive) คือ การพิสูจน์แบบ $\sim q \rightarrow \sim p$ แทน เนื่องจาก $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ (กฎการแย้งสลับที่)

2.2 การพิสูจน์โดยข้อความขัดแย้งกัน (proof by contradiction) เริ่มต้นด้วยการสมมติ $p \wedge \sim q$ แล้วนำไปสู่ข้อขัดแย้ง

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ (2560, pp. 23-33) กล่าวโดยสรุป สำหรับการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ มี 3 วิธี คือ

1. การพิสูจน์ตรง เพราะว่า $p \rightarrow q$ เป็นเท็จกรณีเดียว คือ กรณี p เป็นจริง แต่ q เป็นเท็จ ดังนั้น จึงสมมติ p แล้วแสดงว่า q

2. การพิสูจน์โดยอาศัยการแย้งสลับที่ เนื่องจาก $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$ ดังนั้น เราจึงพิสูจน์แบบ $\sim q \rightarrow \sim p$ แทน กล่าวคือ สมมติ $\sim q$ แล้วแสดงว่า $\sim p$

3. การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง เพราะว่า $\sim(p \rightarrow q)$ สมมูลกับ $p \wedge \sim q$ เราจึงพิสูจน์โดยการสมมติ p และ $\sim q$ แล้วแสดงให้เห็นว่า มีข้อขัดแย้งเกิดขึ้น

Wilson (1993, p. 49) กล่าวถึงเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ว่ามี 3 วิธี

1. การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างค้าน เป็นวิธีการพิสูจน์โดยการหาตัวอย่างค้านมาอย่างน้อยหนึ่งตัวอย่าง เพื่อแสดงให้เห็นว่าข้อความทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นเท็จ ซึ่งวิธีการพิสูจน์นี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า การพิสูจน์แย้ง (disproving)

2. การพิสูจน์ทางตรง เป็นการพิสูจน์ข้อความว่าเป็นจริง โดยใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย จากสิ่งที่กำหนดให้ บทนิยาม หรือทฤษฎีบท มาใช้ในการพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทางตรงมักเขียนในรูปตารางสองคอลัมน์ หรือแบบข้อความบรรยาย (paragraph)

3. การพิสูจน์ทางอ้อม เป็นการเริ่มต้นสมมติว่า ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ไม่เป็นจริง ซึ่งสุดท้ายจะนำไปสู่การขัดแย้งกันของข้อความ นั่นคือ สมมติฐานที่ตั้งไว้ว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์ไม่เป็นจริง แต่แท้จริงแล้วข้อความนั้นเป็นจริง

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ เป็นการวิจัยกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ ผู้วิจัยจึงเลือกใช้เฉพาะวิธีการพิสูจน์ทางตรงเท่านั้น กล่าวคือ พิสูจน์แบบเริ่มต้นด้วย p แล้วอ้างเหตุผลในการพิสูจน์โดยใช้บทนิยาม สมบัติ ทฤษฎีบท หรือสิ่งที่กำหนดให้ในการพิสูจน์ เพื่อให้ได้ q ในตอนสุดท้าย

3.5 การประเมินความสามารถในการพิสูจน์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง มีผู้กล่าวถึงเกี่ยวกับการประเมินความสามารถในการพิสูจน์ ดังนี้

วีรศ กิตติวรากุล (2561, p. 5) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่สำคัญสำหรับใช้ประเมินความสามารถในการพิสูจน์ไว้ดัง ตาราง 1 ดังนี้

ตาราง 1 องค์ประกอบที่สำคัญสำหรับใช้ประเมินความสามารถในการพิสูจน์ของ วีรศ กิตติวรากุล

องค์ประกอบ	ระดับคะแนน		
	2	1	0
ด้านการทำความเข้าใจในปัญหา	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของสิ่งที่ต้องระบุ แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่งหรือไม่ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์
ด้านการเขียนแสดงการพิสูจน์	เขียนข้อความประกอบการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ผลสรุปได้อย่างถูกต้องทั้งหมด	เขียนข้อความประกอบการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ผลสรุปได้อย่างถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถเขียนข้อความประกอบการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน จนนำไปสู่ผลสรุป หรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
ด้านการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความได้ถูกต้องทั้งหมด	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถอ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความได้ หรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
ด้านการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องทั้งหมด	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องหรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง

Hart (1987, p. 152) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ไว้
ดังนี้

ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของ Hart

คะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
0	ไม่ได้เขียนพิสูจน์ หรือเขียนสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้อง หรือเขียนเฉพาะสิ่งที่กำหนดให้เท่านั้น
1	เขียนพิสูจน์ได้บางส่วนเสร็จสิ้น แต่เขียนได้ไม่ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2	เขียนพิสูจน์ โดยมีรายละเอียดที่เพียงพอบอกได้ว่านักเรียนดำเนินการหาวิธี แก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล แต่เกิดข้อผิดพลาดทำให้การพิสูจน์ไม่ถูกต้องหรือไม่ ทันภายในเวลาที่กำหนด
3	เขียนพิสูจน์ได้ถูกต้อง โดยมีข้อผิดพลาดเล็กน้อย
4	เขียนพิสูจน์ได้ถูกต้องโดยสมบูรณ์ หรือมีจุดผิดพลาดไม่เกิน 1 จุด

Yang and Lin (2008, pp. 65-66) ได้กำหนดประเด็นที่ใช้ในการประเมินความเข้าใจ
ในการพิสูจน์ 5 ด้าน ได้แก่ ด้านความรู้พื้นฐาน (basic knowledge) ด้านสถานภาพที่เป็นเหตุผล
(logical status) ด้านการสรุปรวบยอด (summary) ด้านสภาพทั่วไป (generality) และด้านการ
ประยุกต์ (application) โดยแต่ละด้านมีรายละเอียดดังนี้

1. ด้านความรู้พื้นฐาน พิจารณาจากการตระหนักรู้เกี่ยวกับความหมายของ
ข้อความ คำศัพท์ รูปภาพ สัญลักษณ์ และสมบัติทางคณิตศาสตร์
2. ด้านสถานภาพที่เป็นเหตุผล พิจารณาจากการตระหนักรู้เกี่ยวกับการจำแนก
สถานะของข้อความ ว่าข้อความนั้นเป็นสมมติฐานหรือเป็นข้อสรุป และการตระหนักรู้ถึงสมบัติที่
ถูกนำมาใช้ในการประยุกต์ รวมถึงการพิจารณาเกี่ยวกับลำดับของข้อความในการพิสูจน์
3. ด้านการสรุปรวบยอด พิจารณาจากการระบุขั้นตอน การอ้างเหตุผล รวมทั้ง
การระบุแนวคิดสำคัญในการพิสูจน์
4. ด้านสภาพทั่วไป พิจารณาจากความถูกต้องของการพิสูจน์ และความ
สมเหตุสมผลในการพิสูจน์
5. ด้านการประยุกต์ พิจารณาจากความรู้ที่เกี่ยวข้องกับการประยุกต์ และการ
ระบุหลักฐานที่ใช้ในการสนับสนุน

จากข้อมูลข้างต้น ในการวิจัยนี้ผู้วิจัยได้กำหนดการประเมินความสามารถเป็น 4 ด้าน โดยปรับจากองค์ประกอบที่ใช้สำหรับการประเมินความสามารถในการพิสูจน์ของวีริศ กิตติวรากุล (2561) ดังนี้

1. ด้านการทำความเข้าใจปัญหา พิจารณาจากการระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. ด้านการเขียนพิสูจน์ พิจารณาจากการเขียนแสดงการพิสูจน์ได้อย่างมีลำดับขั้นและถูกต้อง
3. ด้านการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ พิจารณาจากการอ้างอิงเหตุผล บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความ
4. ด้านการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ พิจารณาจากความถูกต้องของการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์

3.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

งานวิจัยในประเทศ

นวลศรี ชำนาญกิจ (2550, p. บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวนฮิลล์ และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูมหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ ที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวนฮิลล์ โดยแบ่งการวิจัยเป็น 2 ระยะ ระยะที่ 1 สรรวจระดับการคิดของนักศึกษาครู โดยใช้แบบวัดระดับการคิดของยูชีสกิน และนำผลทดสอบมาใช้เป็นระดับการคิดก่อนเรียน ระยะที่ 2 ทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ก่อนเรียน จัดการเรียนการสอน และทดสอบวัดระดับความคิดและความสามารถในการพิสูจน์อีกครั้ง ผลการวิจัยพบว่า หลังการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวนฮิลล์ นักศึกษาครูมีระดับการคิดและความสามารถในการพิสูจน์สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และยังพบว่า ระดับการคิดทางเรขาคณิตมีความสัมพันธ์ทางสถิติกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอีกด้วย

วัชรระ น้อยมี (2551, p. บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเรื่องการพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนก่อนทดลองและหลังทดลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยกลุ่มทดลองคือนักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการเรียนรู้ - คณิตศาสตร์ โรงเรียนนาวังศึกษาวิทย์ จังหวัดหนองบัวลำภู ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 40 คน โดยวิธีการสุ่มแบบกลุ่ม ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังจากที่ได้รับการสอนโดยชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของนักเรียนสูงกว่าก่อนสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .01 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังจากนักเรียนได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .01

ชนม์ชนก แก้ววันดี (2559, pp. 41-43) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนที่ผ่านการเรียนรู้ตามแนวการสอนของ แวน ฮิลี ร่วมกับ โปรแกรมจีโอเมตรีส์เกิตซ์แพต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 โรงเรียนสารสาสน์วิเทศเชียงใหม่ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ ซึ่งผลการวิจัยพบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ข้างต้น ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างเป็นระบบ และมีความสามารถในการพิสูจน์สูงขึ้น อีกทั้งยังเป็นการส่งเสริมเรื่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน และทำให้นักเรียนเห็นภาพทางเรขาคณิต เป็นรูปธรรมมากยิ่งขึ้น โดยนักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 60 และนักเรียนร้อยละ 40 มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4

งานวิจัยต่างประเทศ

Atwood (2001, p. บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนรู้ในการสร้างวิธีการพิสูจน์สำหรับการเรียนการพิสูจน์ในระยะแรก การศึกษานี้ต้องการทดสอบความคิดรวบยอดในการพิสูจน์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีว่ามีวิธีการพัฒนาทักษะอย่างไรในการวางแผนและรายงานการพิสูจน์ โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตชั้นปีที่ 2 และนักศึกษาชั้นปีที่ 3 วิชาเอกคณิตศาสตร์จำนวน 16 คน โดยผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาจำนวนครึ่งหนึ่งแสดงให้เห็นว่าพวกเขาเข้าใจข้อความที่ต้องพิสูจน์และยอมรับในบทนิยามที่ใช้ในการพิสูจน์

Yoo (2008, p. 7) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้การจัดการเรียนรู้โดยมีปัญหาคือเป็นฐานกับนักศึกษาปริญญาตรีและมุมมองทางการพิสูจน์และการสอนของครู โดยเปรียบเทียบการสอนการใช้การจัดการเรียนรู้โดยมีปัญหาคือเป็นฐานกับการบรรยาย ผลการศึกษาพบว่า การจัดการเรียนรู้โดยมีปัญหาคือเป็นฐานช่วยพัฒนาทักษะการพิสูจน์และความรู้เชิงกระบวนการมากกว่าการสอนแบบบรรยาย

Cilli-Turner (2013, p. summary) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ การเปรียบเทียบผลของการสอนโดยใช้การสอนแบบผสมผสานและเทคนิคการแก้ไขร่วมกันสำหรับการเรียนรู้ของการพิสูจน์ของนักเรียน (กลุ่มทดลอง) เทียบกับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ (กลุ่มเปรียบเทียบ) ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนโดยใช้การสอนแบบผสมผสานและเทคนิคการแก้ไขร่วมกันสำหรับการเรียนรู้ พึงพอใจกับการพิสูจน์ที่หลากหลายมากกว่ากลุ่มเปรียบเทียบ และกลุ่มทดลอง มีความมั่นใจและเข้าใจ ในการพิสูจน์มากขึ้น

จากการศึกษาการวิจัยเกี่ยวกับเรื่องการพิสูจน์ พบว่า การวิจัยเกี่ยวกับเรื่องการพิสูจน์เป็นการศึกษากับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นทั้งนักเรียนและนักศึกษา และส่วนใหญ่เป็นลักษณะการวิจัยเชิงทดลองโดยศึกษาตัวแปรต้น เช่น ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน การเรียนรู้ตามแนวการสอนของ แวน ฮีลี ร่วมกับ โปรแกรมจีโอเมตริกส์เกตซ์แพต การสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวนฮีลี หรือการสอนแบบผสมผสานและเทคนิคการแก้ไขร่วมกัน ว่ามีผลต่อตัวแปรตามในที่นี้คือทักษะหรือความสามารถในการพิสูจน์ สำหรับในการวิจัยในครั้งนี้เป็นลักษณะการวิจัยเชิงทดลองโดยมีตัวแปรต้น คือ การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra และตัวแปรตาม คือ ความสามารถในการพิสูจน์ โดยศึกษากับกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

4. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของเจตคติ

มีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของเจตคติ ดังนี้

ประภาเพ็ญ สุวรรณ (2526, p. 16) กล่าวว่า เจตคติ หมายถึงความรู้สึก ความเชื่อของบุคคลที่มีต่อสิ่งต่าง ๆ รวมถึงท่าที ความคิดที่มีต่อสิ่งเหล่านั้นด้วย เช่น สถานที่ การศึกษา สถานการณ์ บุคคล เป็นต้น

พยอม วงศ์สารศรี (2526, p. 188) กล่าวว่า เจตคติ หมายถึง ท่าทีของบุคคลต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง หรือความรู้สึกจะแสดงออกมาในลักษณะของการยอมรับ ที่เกิดขึ้นได้ทั้งการยอมรับ และการปฏิเสธ

งามตา วณิชานนท์ (2535, p. 15) กล่าวว่า เจตคติ หมายถึง ความรู้สึกของบุคคลที่ตอบสนองต่อสิ่งเร้า โดยมีอารมณ์เป็นส่วนประกอบ หรือเรียกอีกอย่างว่าจิตลักษณะประเภทหนึ่งของบุคคลซึ่งเกิดจากสิ่งเร้าที่มากระทบต่อความรู้สึก มีแนวโน้มในการประเมินค่าเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ทำให้เกิดความความรู้สึกไปลักษณะการตัดสินใจว่าชอบหรือไม่ชอบ

คงขวัญ ทิพย์อักษร (2559, p. 49) กล่าวว่า เจตคติ เป็นความรู้สึกภายในของบุคคล ที่มีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง อันเป็นผลมาจากประสบการณ์เรียนรู้เกี่ยวกับสิ่งนั้น และความรู้สึกดังกล่าวจะเป็นตัวกำหนดให้ บุคคลนั้นแสดงพฤติกรรมหรือแนวโน้มของพฤติกรรมตอบสนองต่อสิ่งนั้น ซึ่งความรู้สึกนี้เป็นได้ทั้งทางบวกหรือทางลบ

Good (1959, p. 49) กล่าวว่า เจตคติ หมายถึง ความพร้อมที่จะแสดงออกถึงสิ่งที่รู้สึกในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง ทั้งการต้อนรับและการต่อต้าน หรือ หลีกหนี ต่อบุคคล สถานที่ หรือสถานการณ์ใดสถานการณ์หนึ่ง

Fishbein (1967, p. 8) กล่าวว่า เจตคติ คือ ความพร้อมของสภาพจิตใจและร่างกาย รวมไปถึงประสบการณ์ในการตอบสนองต่อสถานการณ์ที่เกิดขึ้น สิ่งที่ได้รับรู้ สัมผัส ไม่ว่าจะเป็นในบุคคล หรือสิ่งต่าง ๆ รอบตัวของบุคคลนั้น

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยให้ความหมายของเจตคติ คือ ความคิดเห็น ความรู้สึก หรือ ทำที่การปฏิบัติของบุคคลทั้งทางบวกและทางลบ ที่เกี่ยวข้องกับสิ่งเร้าหรือประสบการณ์ที่บุคคล ได้รับ

4.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวกับเจตคติ

ทฤษฎีเจตคติมีหลายทฤษฎี โดยมีนักการศึกษาได้กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวกับเจตคติดังนี้

คักดี สุนทรเสถณี (2531, pp. 8-15) กล่าวถึงทฤษฎีเจตคติดังนี้

1. ทฤษฎีการวางเงื่อนไขและการให้แรงเสริม คือ ทฤษฎีเจตคติที่ใช้หลักการเรียนรู้แบบมีเงื่อนไข และแรงเสริมกำลัง กล่าวคือ เมื่อต้องการให้บุคคลใดบุคคลหนึ่งมีเจตคติที่ดีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ต้องนำสิ่งนั้น ๆ เข้ามาเป็นเงื่อนไขหรือนำสิ่งนั้น ๆ นำเข้าไปเชื่อมโยงกับอีกสิ่งหนึ่งที่ชอบ หรือสิ่งที่มีเจตคติที่ดีอยู่ก่อนแล้ว มนุษย์จะเชื่อมโยงของสองสิ่งดังกล่าวและจะพอใจในสิ่งที่เป็นเงื่อนไขนั้นด้วย การก่อให้เกิดเจตคติจากทฤษฎีการวางเงื่อนไขและการให้แรงเสริมมี 3 วิธี ดังนี้

1.1 วิธีสร้างเจตคติแบบ Association คือการเชื่อมโยงสิ่งเร้าตั้งแต่สองสิ่งขึ้นไป เช่น การโฆษณา การค้าขาย เป็นต้น

1.2 วิธีเสริมแรง วิธีนี้เป็นหลักการของ Skinner ซึ่งได้กล่าวว่า บุคคลจะเกิดเจตคติอย่างใดอย่างหนึ่งก็ต่อเมื่อบุคคลนั้นได้รับสิ่งที่เป็นทั้งด้านลบและด้านบวก ด้านลบหมายถึง สิ่งที่ทำให้ได้รับผลกระทบต่อความรู้สึกด้านลบ เช่น การตำหนิ การทักท้วง เป็นต้น ด้านบวกหมายถึงสิ่งที่เป็นคุณต่อความรู้สึก เช่น คำชมเชย รางวัล เป็นต้น

1.3 เจตคติเกิดจากการเลียนแบบ หมายถึง การลอกเลียนแบบหรือการตามเจตคติของผู้อื่น เช่น เพื่อนมีเจตคติด้านลบต่อวิชาคณิตศาสตร์ บุคคลนั้นจะมีเจตคติด้านลบต่อวิชาคณิตศาสตร์เช่นกัน ดังนั้น บุคคลใกล้ชิดจะเป็นตัวแบบสำคัญต่อการเลียนแบบหรือการตามเจตคตินั้น ๆ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสำคัญของตัวแบบ (บุคคล) กับกรรมของเจตคตินั้น ๆ

2. ทฤษฎีเครื่องหล่อใจ กล่าวคือ สิ่งที่จูงใจต่าง ๆ จะทำให้มนุษย์มีเจตคติต่อสิ่งนั้น ๆ ในทางใดทางหนึ่ง เมื่อมนุษย์มีเจตคติที่ดีต่อสิ่งใดหรือพอใจต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง นั้นหมายความว่ามนุษย์เชื่อว่าสิ่งนั้นเป็นคุณกับตัวเอง เจตคติส่วนใหญ่เกิดจากแรงจูงใจพื้นฐาน หน้าที่ของเจตคติแบ่งออกเป็น 4 ประเภท ดังนี้

2.1 เจตคติเป็นเครื่องมือช่วยทำให้เราไปถึงจุดหมายหมาย และปรับปรุงตัว กล่าวคือ เมื่อมนุษย์มีเจตคติต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง อาจมีเหตุผลมาจากสิ่งนั้นจะนำไปสู่จุดหมายบางอย่างได้ และเมื่อบรรลุจุดหมายแล้วมนุษย์จะมีเจตคติที่ดีต่อสิ่งนั้น แต่ถ้าเป็นสิ่งที่ขัดขวางต่อจุดหมาย มนุษย์จะมีเจตคติด้านลบต่อสิ่งนั้น

2.2 เจตคติช่วยป้องกันตัวมนุษย์ได้ คือ เจตคติในบางเรื่องจะช่วยป้องกันตัวมนุษย์ได้ มนุษย์มักจะหลีกเลี่ยงในความผิดพลาดหรือปกปิดความจริงบางอย่าง ซึ่งจะนำความไม่พอใจมาสู่ตัวมนุษย์เอง เช่น มนุษย์บางคนอาจเชื่อบางอย่างแบบบิดเบือนเพื่อความสบายใจของตัวเอง

2.3 เจตคติช่วยให้มนุษย์ได้แสดงออกทางด้านพฤติกรรมต่าง ๆ กล่าวคือ มนุษย์จะพยายามจะมีเจตคติต่อสิ่งต่าง ๆ ให้สอดคล้องกับความคิดหรือค่านิยมนั้น ๆ ด้วย เพื่อให้เชื่อได้ว่าตัวเองมีลักษณะเป็นเช่นนั้น

2.4 เจตคติช่วยทำหน้าที่ให้เกิดความรู้ มนุษย์จำเป็นต้องมีความรอบรู้พอสมควรเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อมต่าง ๆ เพื่อการดำรงชีวิตอยู่อย่างปลอดภัย มนุษย์สามารถคิดแก้ปัญหา และสามารถทำนายสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนจนเกินไป

3. ทฤษฎีสอดคล้องของการเรียนรู้ เกี่ยวข้องเกี่ยวกับการคิด หรือการเรียนรู้ในเรื่องใดเรื่องหนึ่งจนทำให้เกิดการเรียนรู้ในหลาย ๆ ด้าน หรือมีส่วนประกอบของความรู้ เมื่อมนุษย์มีการเรียนรู้หรือความคิดในสิ่งใดสิ่งหนึ่งในทางบวกมากกว่าทางลบ จะทำให้เกิดความสอดคล้องของสิ่งที่เรียนรู้ ทำให้มนุษย์เกิดเจตคติที่ดีในสิ่งนั้น ทฤษฎีสอดคล้องของการเรียนรู้แบ่งเป็นทฤษฎีย่อย ๆ ได้ 3 ทฤษฎี ดังนี้

3.1 ทฤษฎีความสมดุลของไฮเดอร์ (Heider's balance Theory) ไฮเดอร์ได้คิดค้นทฤษฎีขึ้นเป็นทฤษฎีแรก และเรียกได้ว่าเป็นทฤษฎีความสอดคล้องที่เก่าแก่ที่สุด บางที่

เรียกทฤษฎีนี้ว่า Heider's P – O – X formulation และ Heider's three – elements system โดยทฤษฎีความสมดุลของไฮเดอร์ได้กล่าวถึง 3 สิ่ง ดังนี้

P หมายถึง บุคคลหนึ่ง

O หมายถึง บุคคลอีกคนหนึ่ง

X หมายถึง วัตถุหรือสิ่งของ

ความสัมพันธ์ระหว่าง P – O – X จะสมดุลหรือไม่ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์กันระหว่างส่วนประกอบต่าง ๆ ว่าเป็นไปในทิศทางใด ทั้งนี้สามารถเป็นไปทางด้นบวกหรือลบก็ได้

3.2 ทฤษฎีความสอดคล้องของอัสสการ์ด อัสสการ์ดเชื่อว่าแหล่งข่าวสารสามารถมีอิทธิพลต่อการเปลี่ยนแปลงทางเจตคติของบุคคลได้ ผู้รับข่าวสารจะประเมินสิ่งที่ได้รับต่าง ๆ จากแหล่งข่าวสารและจะเกิดการยอมรับข่าวสารนั้น ๆ ที่แตกต่างกัน

3.3 ทฤษฎีความขัดแย้งทางปัญญาหรือการรับรู้ไม่ลงรอย ของเฟสติงเกอร์ (Cognitive Dissonance) เฟสติงเกอร์กล่าวว่า มนุษย์ไม่สามารถทนต่อความขัดแย้งหรือความไม่สอดคล้องกันได้ มนุษย์จึงจำเป็นต้องแก้ไขหรือลดความขัดแย้งนั้นด้วยการเปลี่ยนแปลงเจตคติเมื่อเจตคติไม่สอดคล้องกับการกระทำ เจตคติต่อสิ่งนั้นจะเปลี่ยนไป

จากการศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเจตคติพบว่า ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเจตคติมี 3 ทฤษฎีหลัก คือ 1) ทฤษฎีการวางเงื่อนไขและการให้แรงเสริม มนุษย์จะมีเจตคติทางบวกหรือทางลบต่อสิ่งใดนั้น เกี่ยวกับการที่มนุษย์นำสิ่งนั้นเข้ามาเป็นเงื่อนไข หรือการคล้อยตามเจตคติของผู้อื่น 2) ทฤษฎีเครื่องล่อใจ ทฤษฎีนี้สรุปได้ว่า เจตคติที่เกิดขึ้นนั้นส่วนมากเกิดขึ้นจากแรงจูงใจพื้นฐานของมนุษย์เอง และ 3) ทฤษฎีสอดคล้องของการเรียนรู้ ทฤษฎีนี้สรุปได้ว่า สาเหตุของการเปลี่ยนแปลงเจตคติขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของมนุษย์กับสิ่งต่าง ๆ ข่าวสารที่ได้รับ หรือการกระทำที่เปลี่ยนไป

4.3 วิธีการวัดเจตคติ

มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงวิธีการวัดเจตคติ ดังนี้

วิวัฒน์ชัย อยู่เย็นง (2521, p. 21) กล่าวว่า วิธีการวัดเจตคติอาจทำได้หลายวิธี ดังนี้

1. การสัมภาษณ์ (Survey Interview) เป็นการสอบถามโดยตรง โดยเปิดโอกาสให้ผู้ถูกถามได้ตอบคำถามอย่างอิสระ

2. การแบ่งช่วงสเกล (Scaling Technique) เป็นการวัดแบบแบ่งตามระดับความคิดเห็น โดยผู้สอบถามจะมีข้อคำถามมาให้แล้วแบ่งช่วงระดับความคิดเห็นเป็น 5 ระดับ เช่น เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็นด้วย และไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง เป็นต้น

3. วิธีพิเศษ (Special Technique) ปัญหาของการวัดเจตคติส่วนใหญ่คือการตอบไม่ตรงกับความเป็นจริง อาจเนื่องมาจากค่านิยมหรือวัฒนธรรมของผู้ถูกสอบถามเอง ด้วยปัญหานี้ผู้ทดสอบจึงต้องมีวิธีพิเศษที่ใช้วัดเพื่อไม่ให้ผู้ถูกทดสอบทราบที่กำลังถูกทดสอบอยู่ โดยอาจใช้วิธีการให้ผู้ถูกทดสอบพูดถึงประสบการณ์ที่มาจากรูปภาพ หรือการให้บรรยายความรู้ของผู้ถูกทดสอบเอง

ลัวัน สายยศ and อังคณา สายยศ (2538, pp. 60-62) ได้เสนอวิธีการวัดเจตคติ ดังนี้

1. การสัมภาษณ์ เป็นการพูดคุยอย่างมีจุดมุ่งหมาย การสัมภาษณ์ต้องมีการเตรียมข้อคำถามไว้อย่างดี ครอบคลุมทุกจุดประสงค์ มีการบันทึกข้อความการสัมภาษณ์ไว้ครบถ้วน สมบูรณ์ ข้อดีของวิธีนี้คือใช้เวลาในระยะสั้น ข้อจำกัดของวิธีนี้อาจเป็นการตอบคำถามแบบเกรงใจผู้สัมภาษณ์ ไม่กล้าแสดงเจตคติอย่างตรงไปตรงมา

2. การสังเกต เป็นการเก็บข้อมูลแบบแฝงดู สังเกตพฤติกรรม ความเป็นธรรมชาติของบุคคล โดยผู้สังเกตต้องสังเกตแบบมีจุดประสงค์และมีแบบแผน วิธีการสังเกตนี้ต้องไม่ให้ผู้ถูกสังเกตรู้ตัว ไม่ขอความร่วมมือ และไม่เปลี่ยนแปลงจุดประสงค์ที่ต้องการวัด ข้อดีของวิธีการสังเกตคือสามารถใช้ได้ง่าย ข้อจำกัดของวิธีการสังเกตคือ สามารถใช้วิธีการสังเกตได้แค่เฉพาะในช่วงเวลาปัจจุบันและพฤติกรรมของผู้ถูกสังเกตอาจถูกจำกัดด้วยปัจจัยต่าง ๆ

3. การรายงานตนเอง เป็นวิธีการทดสอบเจตคติที่ให้ผู้ถูกทดสอบได้แสดงความรู้สึกออกมาอย่างตรงไปตรงมา ตามสิ่งเร้าที่ได้สัมผัส คือ ข้อความ หรือข้อคำถาม โดยมาตราวัดที่นิยมใช้ มีแนวของ เทอร์สโตน (Thurstone) ลิเคิร์ต (Likert) ออสกู๊ด (Osgood) และกัทท์แมน (Guttman) ข้อดีของวิธีการรายงานตนเองคือ ประหยัดค่าใช้จ่าย สามารถใช้กับคนจำนวนมากได้ ในช่วงเวลาเดียวกัน ข้อจำกัดคือ เครื่องมือที่ใช้ไม่สามารถนำไปใช้กับการวัดเจตคติเรื่องอื่นได้

4. เทคนิคการจินตนาการ เป็นการวัดเจตคติที่แสดงความต้องการของผู้ทดสอบอย่างตรงไปตรงมาว่าต้องการรู้เรื่องใดของผู้ถูกทดสอบ โดยอาจได้คำตอบที่ไม่ตรงกับความเป็นจริง ผู้ทดสอบจึงต้องอาศัยวิธีการเก็บข้อมูลทางอ้อม เช่น การใช้ประโยคที่ไม่สมบูรณ์ การโยนความสัมพันธ์ของคำ การเล่าเรื่องจากภาพ เพื่อให้ผู้ถูกทดสอบได้แสดงเจตคติออกมา ข้อดีของเทคนิคการจินตนาการคือ สามารถใช้ได้ครั้งละหลาย ๆ คน ข้อจำกัดคือ ข้อมูลที่ได้ อาจมีการบิดเบือน

5. การวัดทางสรีระภาพ เป็นวิธีการวัดโดยการใช้เครื่องมือไฟฟ้า เป็นเครื่องมือที่คล้ายกับเครื่องมือทางการแพทย์ วิธีการวัดทางสรีระภาพ มีดังนี้ การวัดประมาณของฮอริโมน การขยายลูกนัยน์ตา การวัดความต้านทางกระแสไฟฟ้าของผิวหนัง วิธีการนี้มีข้อจำกัดในเรื่องของค่าใช้จ่ายที่ค่อนข้างสูง และผู้ใช้ต้องมีความรู้ทางสรีรศาสตร์เป็นอย่างดี

Edwards (1957 อ้างถึงใน สุภาวดี คำนาคี, 2551, pp. 42-43) ได้กล่าวถึงวิธีการวัดเจตคติ โดยสรุปดังนี้

1. การสัมภาษณ์หรือการถามโดยตรง เป็นการสอบถามแบบตรงไปตรงมา วิธีนี้ในทางปฏิบัติจะเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดสำหรับผู้ถามและผู้ถูกถาม เนื่องจากผู้ถามจะสามารถเห็นถึงพฤติกรรมต่าง ๆ ของผู้ถูกถามและสามารถถามได้เลยโดยตรงโดยไม่ต้องผ่านสื่อสิ่งใด แต่วิธีนี้มีข้อด้อยที่เมื่อเกิดการสอบถามกันโดยตรงผู้ถูกถามอาจเกิดความเกรงใจ อาจทำให้คำตอบที่ได้นั้นบางครั้งอาจจะไม่ตรงกับความเป็นจริงมากนัก

2. การสังเกตพฤติกรรม วิธีการนี้ได้มาจากความคิดที่ว่า มนุษย์จะมีเจตคติต่อสิ่งใดและเป็นไปในทิศทางใดให้สังเกตจากพฤติกรรม ทักษะคติ และการแสดงความคิดเห็นของคน ๆ นั้น วิธีนี้มีข้อจำกัดคือ เราจะไม่สามารถใช้วิธีการนี้ได้เมื่อต้องทำการวิจัยในคนจำนวนมาก เนื่องจากจะไม่สามารถสังเกตพฤติกรรมได้หมดทุกคนเป็นเหตุให้ผลการวิจัยอาจคลาดเคลื่อนได้

3. การสร้างข้อความที่เป็นข้อคิดเห็นต่อสิ่งเร้าที่ต้องการจะวัดเจตคติ เป็นวิธีการวัดเจตคติที่ตรงไปตรงมาในด้านของคำถาม แต่จะไม่มี การพบเจอกันของผู้ถามและผู้ถูกถาม ลักษณะการตอบคำถามจะเป็นในเชิงเห็นด้วยหรือไม่เห็นด้วยกับคำถามนั้น ๆ มีการวัดเจตคติโดยใช้วิธีนี้ในการทำวิจัยต่าง ๆ เพราะสามารถนำมาคำนวณหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างได้

จากการศึกษาวิธีการวัดเจตคติข้างต้น จะพบว่าวิธีการวัดเจตคติหลายวิธี สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยใช้วิธีการวัดเจตคติโดยการสร้างข้อความที่เป็นข้อคิดเห็นต่อสิ่งเร้า และแบ่งช่วงสเกลตามมาตราวัดของ Likert โดยแบ่งระดับความคิดเห็นเป็น 5 ระดับ ได้แก่ เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็นด้วย และไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง

4.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเจตคติ

งานวิจัยในประเทศ

ฐิติพจน์ โพธิ์ชื่น (2551, p. บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการเรียนแบบร่วมมือ แบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล และเพื่อศึกษาจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือแบบ

กลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล ที่มีคะแนนผ่านเกณฑ์ ร้อยละ 70 ของคะแนนเต็ม โดยกลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 32 คน โดยผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการสอนโดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือแบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคล มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

เยาวภา ผูกสมัค (2554, p. บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลการใช้ชุดการสอนโดยใช้โปรแกรม GSP ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เมื่อปรับอิทธิพลของสมรรถภาพทางสมองด้านมิติสัมพันธ์ ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 2 ห้องเรียน เป็นห้องเรียนสอนแบบปกติ 1 ห้องเรียน และห้องเรียนกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน ซึ่งสอนด้วยชุดการสอนโดยใช้โปรแกรม GSP ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่สอนด้วยชุดการสอนโดยใช้โปรแกรม GSP มีเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

คงขวัญ ทิพย์อักษร (2559, pp. 79-80) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามลีลาของผู้เรียน โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 1 ห้องเรียน ผลการวิจัยพบว่า เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามลีลาของผู้เรียนสูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

Francies (1972, p. 1333) ได้ศึกษาเกี่ยวกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนเกรด 4 และ เกรด 6 จำนวน 150 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนเกรด 4 และ เกรด 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำและพบว่า นักเรียนเกรด 4 และ เกรด 6 มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนเกรด 4 มีเจตคติเรื่องความรู้สึกส่วนตัวต่อวิชาคณิตศาสตร์ดีว่านักเรียนเกรด 6 และนักเรียนเกรด 6 มีเจตคติเรื่องความสำคัญต่อวิชาคณิตศาสตร์ดีว่านักเรียนเกรด 4

Cabral-Pini (1994, p. 3772) ได้ศึกษาผลการเรียนแบบร่วมมือที่มีต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ในวิชาพีชคณิต 2 โดยใช้กลุ่มตัวอย่างจำนวน 48 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกเป็น

กลุ่มควบคุมที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบปกติโดยการบรรยายและทดสอบ กลุ่มที่ 2 ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการเรียนแบบร่วมมือมีความคิดยืดหยุ่นมากเท่า ๆ กับความคิดสร้างสรรค์ โดยผลการวิจัยพบว่า กลุ่มที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการเรียนแบบร่วมมือมีความคิดยืดหยุ่นมากเท่า ๆ กับความคิดสร้างสรรค์ มีเจตคติทางบวกต่อวิชาคณิตศาสตร์มากกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบบรรยาย

Soeharto (1999, p. 3741) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบคอนสตรัคติวิสต์ (Constructivist) ที่มีผลต่อเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 6 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลอง ที่ใช้วิธีการจัดการเรียนรู้แบบคอนสตรัคติวิสต์ (Constructivist) กับกลุ่มควบคุมที่ใช้การสอนแบบปกติ โดยผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และการจัดการเรียนรู้แบบคอนสตรัคติวิสต์ทำให้เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้น

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่า การจัดการเรียนรู้ที่แปลกใหม่น่าสนใจ การสร้างบรรยากาศห้องเรียนที่เป็นกันเอง การเรียนรู้ที่ส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ ร่วมพูดคุย ปกษากันระหว่างนักเรียนในชั้นเรียน รวมไปถึงการใช้เทคโนโลยีสื่อการสอนหรือกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้มีส่วนร่วม และลงมือปฏิบัติ หรือสร้างองค์ความรู้ใหม่ด้วยตนเอง ส่งผลทำให้นักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ที่ออกแบบให้นักเรียนมีส่วนร่วมกับบทเรียน มีการร่วมพูดคุย ปกษา และมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนในชั้นเรียน รวมทั้งเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้สื่อซึ่งเป็นเทคโนโลยีที่ทันสมัยในที่นี้ คือ โปรแกรม GeoGebra เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
3. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

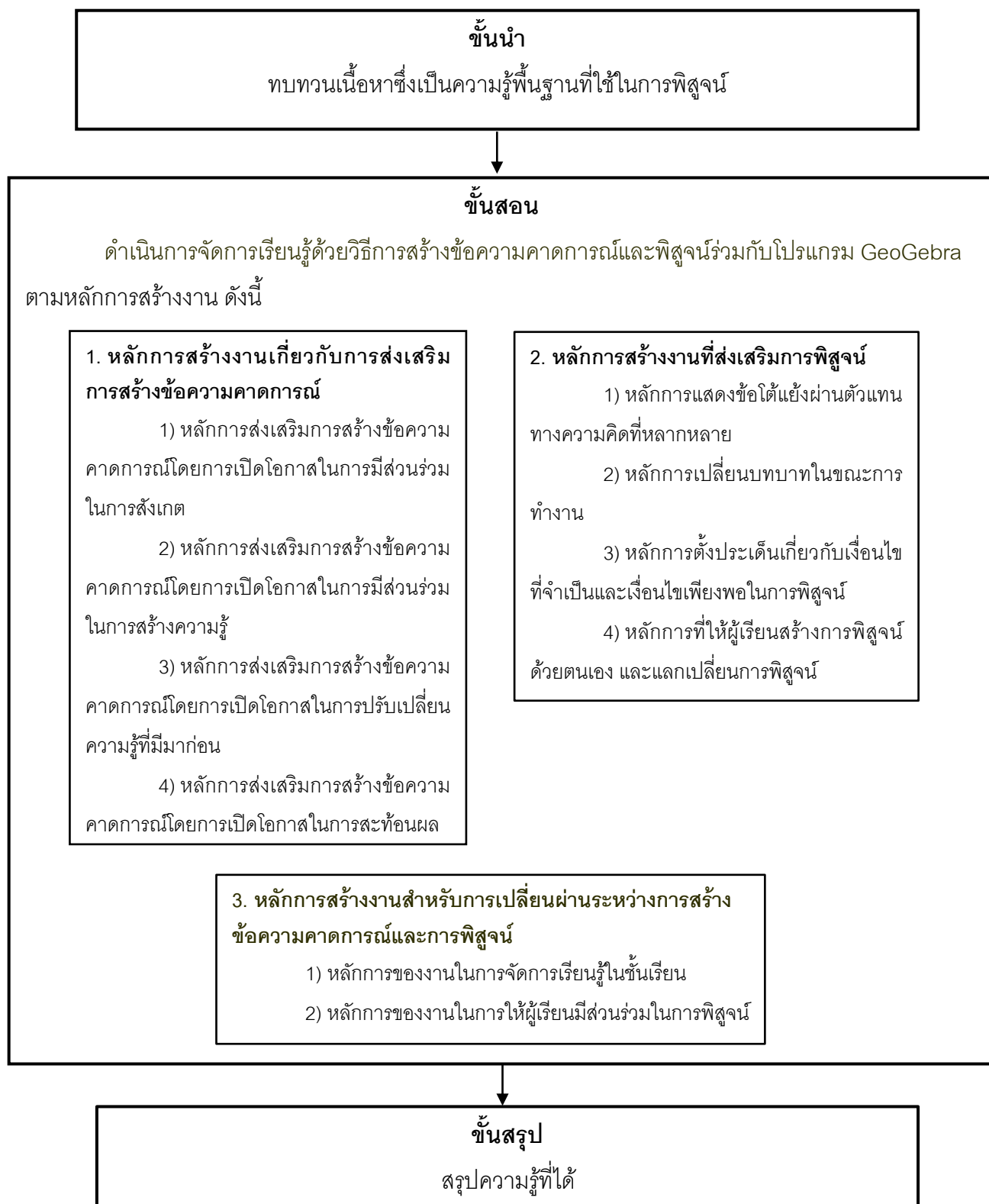
ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ ตำบลมหาชัย อำเภอเมืองสมุทรสาคร จังหวัดสมุทรสาคร

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ ตำบลมหาชัย อำเภอเมืองสมุทรสาคร จังหวัดสมุทรสาคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 40 คน นักเรียนกลุ่มนี้ได้จากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบคละความสามารถ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

การดำเนินการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยกำหนดกรอบแนวคิดในการจัดการเรียนรู้โดยใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียน ดังนี้



ภาพประกอบ 2 กรอบแนวคิดของการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

3. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน และแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งมีรายละเอียดในการดำเนินการ ดังนี้

3.1 แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้าง

ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน โดยอิงเนื้อหาจาก มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จำนวน 5 แผน 9 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ โดยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

3.1.1 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ และการใช้โปรแกรม GeoGebra ในการจัดการเรียนรู้ เพื่อเป็นแนวทางในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน

3.1.2 ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วย มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง การวัดและประเมินผล เป็นต้น

3.1.3 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน รวมถึงศึกษาคู่มือครู บทเรียนหรือตำราต่าง ๆ ในการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

3.1.4 ศึกษาเอกสารในการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ซึ่งประกอบด้วย

- 1) จุดประสงค์การเรียนรู้
- 2) สาระการเรียนรู้
- 3) สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้
- 4) กิจกรรมการเรียนรู้
- 5) การวัดและประเมินผลการเรียนรู้
- 6) กิจกรรมในแฟ้มงาน

3.1.5 กำหนดจุดประสงค์และขอบเขตของการจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน เรื่อง เส้นขนาน ที่สอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

3.1.6 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน โดยอิงเนื้อหาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560) ซึ่งประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ 5 แผน 9 คาบเรียน รายละเอียดของแผนการจัดการเรียนรู้ที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในแต่ละแผนของทั้ง 5 แผน

3.1.7 สร้างแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra เพื่อใช้ประกอบในการจัดการเรียนรู้ ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

3.1.8 นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน เสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

3.1.9 นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน ที่ได้รับการตรวจสอบมาดำเนินการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของกรรมการควบคุมปริญญาโท เสนอให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 5 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความถูกต้องของภาษาที่ใช้ และการวัดประเมินผล และประเมินความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้ โดยกำหนดเกณฑ์ระดับการให้คะแนนแบบประเมินแผนการจัดการเรียนรู้โดยผู้เชี่ยวชาญ ดังนี้

- 5 หมายถึง ระดับดีมาก
- 4 หมายถึง ระดับดี
- 3 หมายถึง ระดับพอใช้
- 2 หมายถึง ระดับปรับปรุงเล็กน้อย
- 1 หมายถึง ระดับแก้ไข

โดยการพิจารณาระดับผลการประเมินแผนการจัดการเรียนรู้ จะพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของคะแนนรวมที่ผู้เชี่ยวชาญได้ประเมิน โดยมีเกณฑ์การพิจารณาดังนี้

- 4.50 – 5.00 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้อยู่ในระดับดีมาก
- 3.50 – 4.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้อยู่ในระดับดี
- 2.50 – 3.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้อยู่ในระดับพอใช้

1.50 – 2.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้ที่อยู่ในระดับปรับปรุงเล็กน้อย

1.00 – 1.49 หมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้ในระดับแก้ไข

ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน ที่ผู้เชี่ยวชาญได้ประเมินในการวิจัยครั้งนี้พบว่า ค่าเฉลี่ยของแบบประเมินแผนการจัดการเรียนรู้ เท่ากับ 4.60 ซึ่งหมายถึง แผนการจัดการเรียนรู้ในระดับดีมาก

3.1.10 ปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ

3.1.11 นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วเสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อตรวจสอบอีกครั้งก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน เพื่อใช้ทดสอบภายหลังจากการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน โดยมีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

3.2.1 ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่อง เส้นขนาน ประกอบด้วย ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง การวัดและประเมินผล เป็นต้น

3.2.2 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์

3.2.3 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ และวิเคราะห์ขอบเขตเนื้อหา

3.2.4 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ซึ่งประกอบด้วย ข้อสอบอัตนัย จำนวน 17 ข้อ (ใช้จริง 8 ข้อ)

3.2.5 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว เสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาโท เพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

3.2.6 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ที่ได้รับการตรวจสอบมาดำเนินการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของกรรมการควบคุมปริญญาโท แล้วนำเสนอผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 5 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้องเชิงเนื้อหา โดยคัดเลือก

เฉพาะข้อสอบที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มากกว่า 0.5 และนำคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไข โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน สำหรับข้อสอบแต่ละข้อ ดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง ข้อสอบมีความสอดคล้อง

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอบมีความสอดคล้องหรือไม่

คะแนน -1 หมายถึง ข้อสอบไม่มีความสอดคล้อง

3.2.7 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้ว และคัดเลือกข้อที่มีค่าดัชนีความสอดคล้องตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป จำนวน 13 ข้อ มาทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง แล้วตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่สร้าง

3.2.8 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ที่ตรวจให้คะแนนแล้วมาวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบ ประกอบด้วย ค่าความยากง่าย (p) และค่าจำแนก (r) เป็นรายข้อ ซึ่งมีเกณฑ์ค่าความยากง่าย (p) ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่าตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป แล้วคัดเลือกแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.39 – 0.61 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.30-0.48 โดยเป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 8 ข้อ

3.2.9 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ที่ถูกคัดเลือกมาวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบโดยใช้การหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ซึ่งผลการพิจารณาพบว่าค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ มีค่าเท่ากับ 0.82

3.2.10 จัดทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง เส้นขนาน ฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3.3 แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อใช้ทดสอบกับกลุ่มตัวอย่าง ทั้งก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน เป็นแบบมาตราส่วนประเมินค่า แบ่งเป็น 5 ระดับ ตามแบบของลิเคิร์ต (Likert) ได้แก่ เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็นด้วย ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง จำนวน 20 ข้อ โดยมีขั้นตอนการสร้างแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ดังนี้

3.3.1 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อกำหนดขอบเขต โครงสร้างของเครื่องมือ

3.3.2 สร้างแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยปรับปรุงจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544) และสุรสาธ ผาสุข (2546) จำนวน 25 ข้อ เป็นแบบมาตราส่วน 5 ระดับ ของ Likert โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

ข้อความทางบวก มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

เห็นด้วยอย่างยิ่ง	5	คะแนน
เห็นด้วย	4	คะแนน
ไม่แน่ใจ	3	คะแนน
ไม่เห็นด้วย	2	คะแนน
ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง	1	คะแนน

ข้อความทางลบ มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

เห็นด้วยอย่างยิ่ง	1	คะแนน
เห็นด้วย	2	คะแนน
ไม่แน่ใจ	3	คะแนน
ไม่เห็นด้วย	4	คะแนน
ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง	5	คะแนน

เกณฑ์การพิจารณาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์จะพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของคะแนนการตอบจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนี้

- 4.50 – 5.00 หมายถึง เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับมากที่สุด
- 3.50 – 4.49 หมายถึง เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับมาก
- 2.50 – 3.49 หมายถึง เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง
- 1.50 – 2.49 หมายถึง เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับน้อย
- 1.00 – 1.49 หมายถึง เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับน้อยที่สุด

3.3.3 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญา นิพนธ์ เพื่อตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไข

3.3.4 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไข เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 5 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยคัดเลือกเฉพาะข้อสอบที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มากกว่า 0.5 แล้วนำคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไข โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน สำหรับข้อสอบแต่ละข้อ ดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง ข้อความนั้นมีความสอดคล้อง

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อความนั้นมีความสอดคล้องหรือไม่

คะแนน -1 หมายถึง ข้อความนั้นไม่มีความสอดคล้อง

3.3.5 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้ว และคัดเลือกข้อที่มีค่าดัชนีความสอดคล้องตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป มาทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง แล้วนำมาตรวจให้คะแนนเพื่อหาค่าอำนาจจำแนกโดยวิธีแจกแจงค่า t โดยเลือกเฉพาะข้อที่มีอำนาจจำแนกตั้งแต่ 3.59 - 7.90 จำนวน 20 ข้อ

3.3.6 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ถูกคัดเลือกมาวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบสอบถามโดยใช้การหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ซึ่งผลการพิจารณาพบว่าค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์มีค่าเท่ากับ 0.94

3.3.7 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วเสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อตรวจสอบอีกครั้งก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้แบบแผนการวิจัยแบบ One-Group Posttest-Only Design ซึ่งมีแบบแผนการวิจัยดังนี้

ตาราง 3 แบบแผนในการวิจัย (One-Group Posttest-Only Design)

กลุ่มตัวอย่าง	ตัวแปรอิสระ	ทดสอบหลังเรียน
ER	X	T

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการวิจัย

ER หมายถึง กลุ่มทดลองที่ได้มาโดยกระบวนการสุ่ม

X หมายถึง การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

T หมายถึง การทดสอบหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra (Posttest)

การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยประสงค์ดำเนินการทดลองตามแบบแผนการวิจัย โดยทดลองแบบกลุ่มเดียวมีการทดสอบหลังเรียนเท่านั้น (One-Group Posttest-Only Design) มีรายละเอียดดังนี้

1. ผู้วิจัยนำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์จำนวน 20 ข้อ ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำก่อนดำเนินการจัดการเรียนรู้ และนำคะแนนที่ได้มาบันทึกผลเป็นคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียน
2. จัดการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 5 แผน จำนวน 9 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนรู้ด้วยตนเอง
3. เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ตามข้อ 2 ครบทั้งจำนวน 5 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ด้วย แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 8 ข้อ โดยใช้เวลาในการทดสอบ 90 นาที
4. หลังจากนั้นนำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์จำนวน 20 ข้อ ซึ่งเป็นแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ชุดเดียวกับข้อ 1 ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำหลังดำเนินการจัดการเรียนรู้และนำคะแนนที่ได้มาบันทึกผลเป็นคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียน
5. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน แล้วนำคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบและคะแนนจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ทั้งก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ มาทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ เพื่อทำการทดสอบสมมติฐานทางสถิติต่อไป

5. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีขั้นตอนในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. นำคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. หาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

3. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบ Z (Z-Test for Population Proportion)

4. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ โดยใช้การทดสอบ t (t-test for Dependent Sample)

6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฐานนิยม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติที่ใช้ในการทดสอบคุณภาพเครื่องมือ ได้แก่ ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นโดยคำนวณจาก สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)
3. สถิติที่ใช้สำหรับการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ การทดสอบ Z (Z-Test for Population Proportion) และการทดสอบ t (t-test for Dependent Sample)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra และเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ ข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวม ผู้วิจัยนำมาวิเคราะห์เชิงปริมาณ โดยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 ตอน ได้แก่

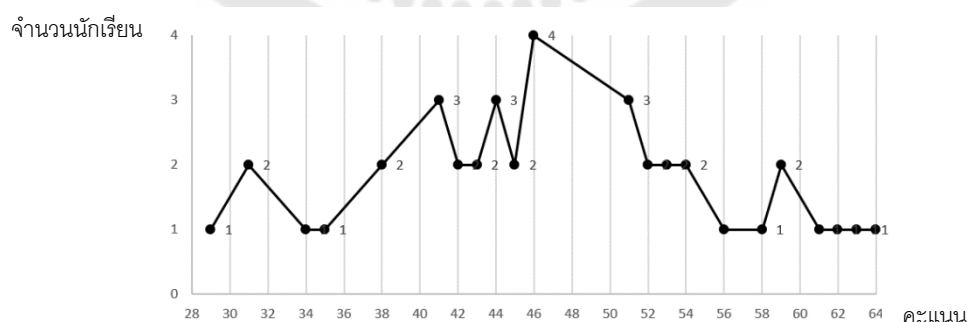
ตอนที่ 1 ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ตอนที่ 2 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ตอนที่ 1 ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน



ภาพประกอบ 3 คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัด

ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน

จากภาพประกอบ 3 พบว่า คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ซึ่งมีคะแนนเต็ม 64 คะแนน นักเรียนมีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ตั้งแต่ 29 คะแนน ถึง 64 คะแนน โดยมีฐานนิยมเท่ากับ 46 คะแนน จากนั้นนำคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูล แสดงดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
แบบทดสอบ	64	47.20	73.75	9.15

จากตาราง 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เท่ากับ 47.20 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 73.75 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 9.15

1.2 การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ผู้วิจัยได้นำคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ไปหาจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม แล้วทดสอบสมมติฐานของการวิจัยโดยใช้การทดสอบ Z (Z-test for Population Proportion) เพื่อทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย แสดงดังตาราง 5

ตาราง 5 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จำนวน นักเรียนกลุ่ม ตัวอย่าง	จำนวนนักเรียนที่มี ความสามารถใน การพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์ (คน)	ร้อยละนักเรียนที่มี ความสามารถในการ พิสูจน์ เรื่อง เส้น ขนาน ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ ทดสอบ Z	ค่าวิกฤต
40	33	82.50	2.90*	2.33

* ที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากตาราง 5 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

**ตอนที่ 2 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลัง
ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม
GeoGebra**

ในการศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการ
สร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ก่อนและหลังได้รับการจัดการ
เรียนรู้ ผู้วิจัยนำคะแนนเฉลี่ยก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้มาเปรียบเทียบโดยใช้การทดสอบ
t (t-test for Dependent Sample) ปรากฏในตาราง 6 ดังนี้

ตาราง 6 ผลการวิเคราะห์เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและ
หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม
GeoGebra

เจตคติต่อ วิชา คณิตศาสตร์	n	$\bar{x}$ (คะแนนเต็ม 100)	SD	t	P (1-tail)
ก่อนเรียน	40	65.23	0.51	10.705	0.0000
หลังเรียน	40	73.13	0.46		

จากตาราง 6 พบว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนได้รับการจัดการ
เรียนรู้เท่ากับ 65.23 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.51 ค่าเฉลี่ยของคะแนนเจตคติต่อวิชา
คณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดการเรียนรู้เท่ากับ 73.13 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.46
โดยค่าเฉลี่ยของคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดการเรียนรู้สูงกว่าก่อนได้รับ
การจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 กล่าวคือ นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้
ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีเจตคติต่อวิชา
คณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดการเรียนรู้สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ตามสมมติฐานข้อ 2 และ
เมื่อแยกพิจารณาเป็นรายข้อ รายละเอียดของการประเมินแต่ละข้อ แสดงข้อมูลดังตาราง 7

ตาราง 7 ผลการประเมินของคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้

ข้อ	ข้อความ	ก่อนการจัดการเรียนรู้			หลังการจัดการเรียนรู้		
		ค่าเฉลี่ย เลขคณิต	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	แปลผล	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	แปลผล
1	คณิตศาสตร์ฝึกให้ผู้เรียนตัดสินใจอย่างมีเหตุผล	4.03	0.62	มาก	4.08	0.47	มาก
2	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่กระตุ้นให้ค้นคว้าความรู้อยู่เสมอ	3.63	0.77	มาก	3.85	0.77	มาก
3	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญต่อการศึกษต่อ	4.53	0.60	มากที่สุด	4.58	0.59	มากที่สุด
4	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้	3.43	1.17	ปานกลาง	3.88	0.85	ปานกลาง
5	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากซับซ้อน และต้องใช้ความพยายามเป็นอย่างมาก	1.68	0.83	น้อย	3.03	0.48	ปานกลาง
6	ทุกครั้งที่ฉันสามารถทำโจทย์คณิตศาสตร์ได้ถูกต้องฉันรู้สึกภาคภูมิใจในตนเอง	4.38	0.77	มาก	4.50	0.88	มากที่สุด
7	ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์	3.00	1.13	ปานกลาง	3.43	0.87	มาก
8	ฉันอยากเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทุกวัน	2.60	1.03	ปานกลาง	3.03	0.89	ปานกลาง
9	ฉันรู้สึกสนุกในการทำโจทย์คณิตศาสตร์	3.08	1.12	ปานกลาง	3.53	0.99	มาก
10	คณิตศาสตร์ทำให้ฉันเครียด	2.53	1.13	ปานกลาง	2.85	0.86	ปานกลาง
11	ฉันรู้สึกประหม่าเมื่อครูให้ออกไปทำกิจกรรมคณิตศาสตร์หน้าห้องเรียน	2.95	1.11	ปานกลาง	3.40	0.84	ปานกลาง
12	ฉันรู้สึกไม่มั่นใจเมื่อเข้าสอบวิชาคณิตศาสตร์	2.65	1.12	ปานกลาง	3.35	1.03	ปานกลาง
13	ฉันไม่กล้าสละเวลาเรียน กลัวจะถูกถามคำถาม	3.40	0.96	ปานกลาง	3.60	1.17	มาก

ตาราง 7 (ต่อ)

ข้อ	ข้อความ	ก่อนการจัดการเรียนรู้			หลังการจัดการเรียนรู้		
		ค่าเฉลี่ย เลขคณิต	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	แปลผล	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	แปลผล
14	ฉันขยันทำแบบฝึกหัดวิชา คณิตศาสตร์	2.85	0.77	ปาน กลาง	3.30	0.94	ปาน กลาง
15	ครูคณิตศาสตร์มีความเป็นกันเอง กับนักเรียน	3.83	0.93	มาก	3.88	0.61	มาก
16	ครูคณิตศาสตร์มีความคิดเป็น ระบบและมีเหตุผล	3.98	0.73	มาก	4.05	0.68	มาก
17	วิชาคณิตศาสตร์ทำให้ฉันเสีย สุขภาพจิต	3.20	0.99	ปาน กลาง	3.53	1.13	มาก
18	ถ้าสามารถเลือกวิชาเรียนได้ฉันจะ ไม่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์	3.13	1.09	ปาน กลาง	3.63	0.95	มาก
19	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากกว่า วิชาอื่น	2.30	1.14	น้อย	3.43	0.81	ปาน กลาง
20	ฉันพยายามจะทำแบบฝึกหัดวิชา คณิตศาสตร์อย่างเต็ม ความสามารถ	4.10	0.98	มาก	4.25	0.93	มาก
รวม		3.26	0.95	ปาน กลาง	3.66	0.84	มาก

จากตาราง 7 พบว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อยู่ในระดับปานกลาง และหลังได้รับการจัดการเรียนรู้อยู่ในระดับมาก โดยข้อความเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลายข้อมีค่าเฉลี่ยใกล้เคียงกัน แต่มีข้อความเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์บางข้อที่มีค่าเฉลี่ยหลังการจัดการเรียนรู้สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้เห็นได้ชัด ยกตัวอย่างเช่น ข้อความเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์บางข้อที่เกี่ยวข้องกับการทำโจทย์หรือแบบฝึกหัดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เช่น ข้อ 9 11 และ 12 หรือ ข้อความเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์บางข้อที่เกี่ยวข้องกับความคิดเห็นต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน เช่น ข้อ 5 7 8 18 และ 19

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

2. เพื่อเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

สมมติฐานของการวิจัย

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

2. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ ตำบลมหาชัย อำเภอเมืองสมุทรสาคร จังหวัดสมุทรสาคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ ตำบลมหาชัย อำเภอเมืองสมุทรสาคร จังหวัดสมุทรสาคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 40 คน นักเรียนกลุ่มนี้ได้จากการสุ่มแบบ

กลุ่ม (Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารถ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย (1) แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน โดยแผนการจัดการเรียนรู้มีทั้งหมด 5 แผน จำนวน 9 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ (2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้ประเมินความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน และ (3) แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ

หลังจากสร้างเครื่องมือเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำเครื่องมือเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำเครื่องมือที่ผ่านการพิจารณา เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 5 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของปัญหา และความชัดเจนของข้อคำถาม แล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นปรับปรุงแก้ไขเครื่องมืออีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้แบบแผนการวิจัยแบบ One-Group Posttest-Only Design

การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองตามแบบแผนการวิจัย โดยทดลองแบบกลุ่มเดียวมีการทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ สำหรับการศึกษาศักยภาพความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง

เส้นขนาน และการทดสอบก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ สำหรับการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน มีรายละเอียดการดำเนินการดังนี้

1. ผู้วิจัยนำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์จำนวน 20 ข้อ ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำก่อนดำเนินการจัดการเรียนรู้ และนำคะแนนที่ได้มาบันทึกผลเป็นคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียน

2. จัดการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 5 แผน จำนวน 9 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนรู้ด้วยตนเอง

3. เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ตามข้อ 2 ครบทั้งจำนวน 5 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ด้วย แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 8 ข้อ โดยใช้เวลาในการทดสอบ 90 นาที

4. หลังจากนั้นนำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์จำนวน 20 ข้อ ซึ่งเป็นแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ชุดเดียวกับข้อ 1 ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำหลังดำเนินการจัดการเรียนรู้และนำคะแนนที่ได้มาบันทึกผลเป็นคะแนนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียน

5. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน แล้วนำคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบและคะแนนจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ทั้งก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ มาทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ เพื่อทำการทดสอบสมมติฐานทางสถิติต่อไป

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลดังนี้

1. ผู้วิจัยได้นำคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) จากนั้นหาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็มมาทดสอบ

สมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบ Z (Z-Test for Population Proportion)

2. ผู้วิจัยเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยใช้การทดสอบ t (t-test for Dependent Sample)

สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ปรากฏผลดังนี้

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

2. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

อภิปรายผลการวิจัย

จากผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ สอดคล้องกับงานวิจัยของ วีริศ กิตติวรากุล (2561, p. 69) ที่พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ทั้งนี้เนื่องมาจากการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามหลักการสร้างงานที่พัฒนาขึ้นตามแนวคิดของ Lin et al. (2011, pp. 305-325) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. การใช้หลักการสร้างงานเกี่ยวกับการส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์ เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจรูปเรขาคณิต สังเกตรูปแบบของความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้น จากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง ผ่านโปรแกรม GeoGebra แล้วสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ ตัวอย่างเช่น ใบกิจกรรมที่ 2 ส่วนที่ 1 นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra สร้างรูปตามเงื่อนไขที่กำหนด กล่าวคือ สร้างเส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD และสร้างเส้นตัด จากนั้นใช้เครื่องมือ “การเลื่อน” เพื่อสำรวจความสัมพันธ์ของมุมแย้งที่เกิดขึ้น แล้วบันทึกข้อมูลลงในตาราง จากกิจกรรมนี้นักเรียนส่วนใหญ่สังเกตได้ว่า มุมแย้งทั้งสองคู่ที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากัน จากนั้นผู้วิจัยใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้ นักเรียนระบุเงื่อนไขเริ่มต้นและผลที่ได้จากการสังเกต เช่น ผู้วิจัยถามว่า ปัญหาข้อนี้ เงื่อนไขเริ่มต้นคืออะไร นักเรียนตอบได้ว่า เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD และผู้วิจัยถามต่อว่า แล้วนักเรียนได้ข้อสังเกตอะไรบ้าง จากการเลื่อนจุดในแฟ้มงาน และผลที่บันทึกได้ในตาราง นักเรียนตอบว่า มุมแย้งที่เกิดขึ้นทั้งสองคู่มีขนาดเท่ากัน หลังจากนั้นผู้วิจัยเปิดโอกาสให้มืออภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกันภายในห้องเรียน เพื่อให้ได้มาซึ่งข้อความคาดการณ์ที่สมบูรณ์ ซึ่งช่วงเริ่มต้นข้อความคาดการณ์ที่ได้มายังไม่สมบูรณ์ ผู้วิจัยจึงใช้คำถามกระตุ้น เพื่อให้นักเรียนสังเกตในประเด็นต่าง ๆ เกี่ยวกับข้อความคาดการณ์ จนกระทั่งนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ที่สมบูรณ์ด้วยตัวนักเรียนเอง สอดคล้องกับ สถาปนา บุญมาก (2558, p. 28) ที่กล่าวว่า การใช้คำถามกระตุ้นของครูเพื่อให้นักเรียนเกิดการสังเกต เปรียบเทียบ และวิเคราะห์ปัญหา จะส่งผลให้ นำไปสู่การสร้างสมมติฐานที่ถูกต้องของนักเรียนได้ หรือในกรณีการทำโจทย์เรื่องเส้นขนาน นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra สำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ของรูปในแฟ้มงาน โดยนักเรียนได้สำรวจโจทย์เรื่องเส้นขนานในลักษณะทั่วไปก่อน หลังจากนั้นจึงให้สำรวจโจทย์เรื่องเส้นขนานที่กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมเข้าไป ตัวอย่างเช่น ใบกิจกรรมที่ 2 ส่วนที่ 2 โจทย์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของมุมแย้งซึ่งกำหนดให้ ส่วนของเส้นตรง BA ขนานกับส่วนของเส้นตรง DE เมื่อนักเรียนสำรวจรูปดังกล่าว ทำให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของมุมจนทราบว่า มุม BCD เท่ากับผลรวมของมุม ABC และมุม CDE และเมื่อกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมในโจทย์ เช่น ถ้ากำหนดให้มุม ABC เท่ากับ 60 องศา และมุม CDE เท่ากับ 25 องศา แล้วให้สร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของมุม BCD ผู้วิจัยสังเกตเห็นว่า นักเรียนสามารถตอบได้ทันทีว่า มุม BCD เท่ากับ 85 องศา เป็นต้น นอกจากนี้ ในขั้นตอนที่นักเรียนได้ค้นหาข้อความคาดการณ์ของโจทย์คณิตศาสตร์ในกรณีทั่วไป ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงานกรณีทั่วไปเพิ่มเติม เพื่อหาแนวทางเบื้องต้นในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์สำหรับกรณีทั่วไป เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์เบื้องต้น ก่อนที่จะพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่กำหนดเงื่อนไขเฉพาะเพิ่มเติม เช่น ในใบกิจกรรมที่ 2

ส่วนที่ 2 โจทย์ข้อที่ 1 สำหรับข้อความคาดการณ์ของโจทย์กรณีทั่วไป ครูให้นักเรียนตอบคำถามถึงสิ่งที่ควรสร้างเพิ่มเติม (พร้อมสร้างเพิ่มเติมในโปรแกรม GeoGebra) แล้วสำรวจต่อถึงความสัมพันธ์ระหว่าง มุม ABC และ มุม BCG ความสัมพันธ์ระหว่างมุม CDE และ มุม GCD และพิจารณาความสัมพันธ์ของ มุม BCD มุม BCG และ มุม GCD จนสุดท้ายได้ความสัมพันธ์เกี่ยวกับมุม BCD เท่ากับผลรวมของมุม ABC และ มุม CDE ที่เป็นจริงดังข้อความคาดการณ์ที่นักเรียนสำรวจได้

2. การใช้หลักการสร้างงานที่ส่งเสริมการพิสูจน์ หลังจากนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ที่สมบูรณ์แล้ว การใช้หลักการสร้างงานที่ส่งเสริมการพิสูจน์ ทำให้นักเรียนพบประเด็นที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ เช่น รู้ข้อความที่กำหนดให้ และข้อความที่ต้องพิสูจน์ รู้เงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอในการพิสูจน์ เป็นต้น รวมทั้งเห็นเป้าหมายและแนวทางการพิสูจน์ที่ชัดเจนขึ้นผ่านการสำรวจเกี่ยวกับความสัมพันธ์และองค์ประกอบต่าง ๆ ของรูปในแฟ้มงาน ซึ่งขณะที่นักเรียนทำการสำรวจเกี่ยวกับความสัมพันธ์และองค์ประกอบดังกล่าว นักเรียนได้พยายามคิดหาเหตุผล หรือ ทฤษฎีบท ควบคู่กันไปด้วยเพื่อเป็นเครื่องมือที่จะนำมาใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ว่าเป็นจริง เมื่อได้แนวคิดเกี่ยวกับการพิสูจน์ที่ชัดเจนแล้ว นักเรียนเริ่มลำดับขั้นตอนความคิดในการเขียนบทพิสูจน์ จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนเขียนบทพิสูจน์ลงในตารางสองคอลัมน์ โดยเน้นการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้อง ตัวอย่างเช่น ใบกิจกรรมที่ 2 มีขั้นตอนหนึ่งที่ให้นักเรียนสำรวจองค์ประกอบของรูปในแฟ้มงาน และให้ตอบคำถามใบกิจกรรมเพื่อให้เห็นแนวทางที่จะพิสูจน์ข้อความที่ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน” ในช่วงเริ่มต้น นักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่รู้แนวทางในการพิสูจน์ หรือเขียนอ้างอิงในการพิสูจน์ยังไม่ถูกต้อง หรือสมบูรณ์ ผู้วิจัยจึงใช้คำถามกระตุ้น เช่น ผู้วิจัยถามว่า เมื่อนักเรียนพิจารณาจากสิ่งที่โจทย์กำหนดประกอบกับรูปในแฟ้มงาน สิ่งที่กำหนดให้ คืออะไร นักเรียนสามารถตอบได้ว่า เส้นตรง AB ขนานกับ เส้นตรง CD และมีเส้นตัด IJ ที่ตัดเส้นตรง AB และเส้นตรง CD ที่จุด E และ F ตามลำดับ ผู้วิจัยถามต่อไปว่า แล้วสิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร นักเรียนตอบได้ทันทีว่า มุม EFD เท่ากับ มุม AEF จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทำการวัดขนาดของมุม BEF และมุม EFD ซึ่งจากการวัดขนาดของมุมทั้งสองดังกล่าว พบว่านักเรียนแต่ละคนวัดค่ามุมได้ไม่เท่ากัน ผู้วิจัยจึงใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนสังเกตเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของมุมทั้งสองนั้น จนกระทั่งนักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของมุมทั้งสอง นั่นคือ มุม BEF และ มุม EFD รวมกันเท่ากับ 180 องศา จากนั้นผู้วิจัยถามคำถามต่อไปว่าทำไมขนาดของมุม BEF กับ มุม EFD จึงรวมกันได้ 180 องศา นักเรียนจะตอบเพียงสั้น ๆ ว่า มุมภายใน ซึ่งยังไม่ถูกต้อง ผู้วิจัยจึงใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนได้ประเด็นที่เกี่ยวกับเหตุผลที่นำมาใช้อ้างอิง

จนกระทั่งนำไปสู่การให้เหตุผลที่ใช้อ้างอิงได้อย่างถูกต้องในการพิสูจน์ เมื่อนักเรียนได้แนวทางการพิสูจน์แล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนเขียนบทพิสูจน์ลงในตารางสองคอลัมน์ เมื่อนักเรียนเขียนบทพิสูจน์เสร็จ ผู้วิจัยเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคนได้อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันภายในห้องเรียน พร้อมกับเพิ่มบทบาทให้กับนักเรียนเป็นผู้ตรวจสอบการเขียนบทพิสูจน์ ในประเด็นต่าง ๆ เช่น ความถูกต้องในการใช้เหตุผลอ้างอิง ความถูกต้องการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หรือความเหมาะสมของลำดับขั้นของแนวคิดในการพิสูจน์ เป็นต้น ทั้งนี้เพื่อให้ได้มาซึ่งการเขียนบทพิสูจน์ที่ถูกต้องและสมบูรณ์ สอดคล้องกับ ยุพิน พิพิธกุล and ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537, pp. 17-19) ที่กล่าวว่า การให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการอภิปราย โดยครูใช้คำถามกระตุ้นเป็นระยะ รวมทั้งให้ผู้เรียนได้มีโอกาสทบทวนการพิสูจน์ มองย้อนกลับไปพิจารณาบทพิสูจน์ของตนเองอีกครั้ง เพื่อให้เห็นภาพรวมของการพิสูจน์ทั้งหมด ถือว่าเป็นขั้นตอนหนึ่งที่สำคัญซึ่งจะนำไปสู่ความสำเร็จในการเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์ นอกจากนี้ใบกิจกรรมที่ 2 มีกิจกรรมหนึ่งที่ผู้วิจัยแสดงการพิสูจน์สองแบบในโจทย์ข้อเดียวกัน แล้วให้นักเรียนพิจารณาถึงความน่าเชื่อถือของการพิสูจน์ทั้งสองแบบดังกล่าว นักเรียนส่วนใหญ่ให้มุมมองเกี่ยวกับความน่าเชื่อถือของการพิสูจน์ทั้งสองแบบดังกล่าวได้เป็นที่น่าพอใจ กล่าวคือ นักเรียนมีมุมมองว่าการอ้างอิงเหตุผลด้วยสมบัติที่เกี่ยวกับเส้นขนานและมุมภายในจากบทเรียนครั้งก่อนมีความน่าเชื่อถือมากกว่าอ้างเหตุผลที่เกิดจากการวัดขนาดของมุมด้วยโปรแกรม GeoGebra ซึ่งการที่นักเรียนมีมุมมองในประเด็นดังกล่าวสะท้อนให้เห็นว่านักเรียนเป็นผู้ที่ไม่เชื่ออะไรง่าย ๆ จนกว่าจะได้รับการพิสูจน์โดยการอ้างอิงด้วยหลักการหรือทฤษฎีบทซึ่งเป็นที่ยอมรับ นอกจากนี้ยังช่วยลดข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ของนักเรียนด้วย จนนำไปสู่แนวคิดที่ถูกต้องเกี่ยวกับการพิสูจน์เรื่องเส้นขนาน

3. การใช้หลักการสร้างงานสำหรับการเปลี่ยนผ่านระหว่างการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยในฐานะผู้สอนได้กำหนดบทบาทของตนเองเป็นผู้คอยอำนวยความสะดวกในการจัดการเรียนรู้ให้แก่นักเรียน รวมทั้งชี้แนะแนวทางและให้คำปรึกษาในประเด็นต่าง ๆ เท่าที่จำเป็นแก่นักเรียน รวมถึงสนับสนุนให้มีการอภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น และให้โอกาสนักเรียนได้มีการแสดงออกทางความคิดด้านการพิสูจน์มากที่สุดด้วยเทคโนโลยีทางการศึกษาที่ผู้สอนได้เตรียมไว้ให้ ได้แก่ โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ช่วยให้นักเรียนได้สำรวจ สังเกตการเคลื่อนไหวของรูปเรขาคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด จนนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ที่ถูกต้องและสมบูรณ์ นอกจากนี้การที่ผู้วิจัยกำหนดให้เขียนบทพิสูจน์ลงในตารางสองคอลัมน์ นับว่าเป็นประโยชน์ต่อนักเรียน เพราะตารางดังกล่าวช่วยแยกข้อความซึ่งเป็นเหตุผลที่นำมาใช้อ้างอิงและข้อความที่พิสูจน์อย่างชัดเจน

นอกจากนี้ตารางดังกล่าวยังช่วยส่งเสริมเกี่ยวกับการลำดับขั้นตอนความคิดในการพิสูจน์ของนักเรียนเองด้วย

ส่วนจากผลการวิจัยที่พบว่า เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่องเส้นขนาน ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์เรื่อง เส้นขนาน ได้ใช้หลักการสร้างงาน (Task) 3 ข้อ ได้แก่ 1) หลักการสร้างงานเกี่ยวกับการส่งเสริมการสร้างข้อความคาดการณ์ 2) หลักการสร้างงานที่ส่งเสริมการพิสูจน์ และ 3) หลักการสร้างงานสำหรับการเปลี่ยนผ่านระหว่างการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ ซึ่งหลักการสร้างงานทั้ง 3 ข้อนี้ได้เสริมสร้างทักษะทางคณิตศาสตร์และทำให้นักเรียนเข้าใจถึงวิธีการของคณิตศาสตร์ กล่าวคือ เริ่มต้นนักเรียนได้สังเกตรูปเรขาคณิตและสำรวจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง จากนั้นสร้างข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ และเพื่อให้มั่นใจว่าข้อความคาดการณ์ที่สร้างขึ้นเป็นจริง นักเรียนจึงได้ดำเนินการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ดังกล่าวนั้น โดยอาศัยทฤษฎีบทหรือหลักการทางคณิตศาสตร์มาใช้อ้างอิงเพื่อสนับสนุนการพิสูจน์ดังกล่าว จนกระทั่งพิสูจน์ได้สำเร็จ รวมทั้งมีการตรวจสอบความถูกต้องของบทพิสูจน์โดยเพื่อนร่วมชั้นและผู้สอน พร้อมทั้งมีการอภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับบทพิสูจน์ จนกระทั่งได้บทพิสูจน์ที่ถูกต้องและสมบูรณ์ ซึ่งประเด็นที่นักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ถูกต้องด้วยตนเองโดยผ่านการตรวจสอบจากเพื่อนร่วมชั้นและผู้สอน ทำให้นักเรียนเกิดความมั่นใจในการเรียนคณิตศาสตร์ นอกจากนี้แล้วการใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อช่วยในการจัดการเรียนรู้ ทำให้นักเรียนสามารถเคลื่อนย้ายวัตถุ หรือขยายรูปได้ตามความต้องการ เพื่อสังเกตความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่างๆ ของรูปในแฟ้มงานช่วยให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนมากขึ้น สอดคล้องกับ ชัญญา อุทิศ (2557, pp. 26-28) ที่กล่าวว่า GeoGebra เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์พลวัต ที่ผู้ใช้สามารถออกแบบปรับแต่ง รูปเรขาคณิตได้ การนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จะช่วยส่งเสริมการสังเกต การสำรวจ ส่งเสริมให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น ประกอบกับผู้วิจัยสร้างบรรยากาศในการเรียนรู้โดยการเปิดโอกาสให้นักเรียนอภิปราย พูดคุย ชักถาม อย่างเป็นกันเองภายในชั้นเรียน อาจส่งผลให้เจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้

1.1 การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เหมาะสำหรับนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานในระดับดี เนื่องจากการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์เป็นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนได้สังเกต วิเคราะห์ และสร้างองค์ความรู้ใหม่จากความรู้เดิมที่มีอยู่แล้ว กรณีที่นักเรียนมีความรู้พื้นฐานไม่เพียงพอ ผู้สอนอาจต้องมีการทบทวนความรู้พื้นฐานเพื่อเตรียมความพร้อมก่อนการจัดการเรียนรู้

1.2 ในช่วงแรกของการจัดการเรียนรู้ นักเรียนอาจขาดประสบการณ์ในการเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ ดังนั้นครูอาจใช้คำถามนำบ่อย ๆ เพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการพิสูจน์ รวมทั้งควรมีคำถามที่ใช้ตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเป็นระยะ ๆ ด้วย เมื่อดำเนินการจัดการเรียนรู้ได้ระยะหนึ่ง และครูพิจารณาแล้วว่านักเรียนเริ่มสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ด้วยตนเองบ้างแล้ว ครูอาจให้นักเรียนได้ค้นหาแนวทางในการพิสูจน์และแสดงการพิสูจน์ด้วยตนเองมากขึ้น

1.3 ระหว่างที่นักเรียนได้พูดคุย ประกันกัน นักเรียนอาจมีการพูดคุยถึงเรื่องอื่นที่ไม่เกี่ยวข้องกับบทเรียน ครูควรดูแลควบคุมไม่ให้นักเรียนพูดนอกประเด็นจากบทเรียนมากเกินไป

1.4 ครูควรมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม เพื่อเป็นการฝึกทักษะเพิ่มความชำนาญในการพิสูจน์ให้มากขึ้น รวมทั้งเป็นการฝึกการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทต่าง ๆ มากขึ้น

1.5 การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เหมาะสำหรับโรงเรียนที่มีความพร้อมด้านอุปกรณ์เทคโนโลยีทางการศึกษา เช่น เครื่องคอมพิวเตอร์ สัญญาณอินเทอร์เน็ต และจอโปรเจคเตอร์ เป็นต้น และมีจำนวนอุปกรณ์เทคโนโลยีทางการศึกษาที่มากเพียงพอต่อการใช้งาน หากโรงเรียนขาดความพร้อมด้านอุปกรณ์เทคโนโลยีทางการศึกษา อาจส่งผลต่อการดำเนินการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการดังกล่าว

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra กับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ

2.2 ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับการใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในลักษณะที่เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ

2.3 ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ กับตัวแปรตามอื่น ๆ ที่น่าสนใจ เช่น ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการเชื่อมโยง ความพึงพอใจ ความรู้เชิงกระบวนการ หรือความรู้เชิงมนทัศน์ เป็นต้น



บรรณานุกรม

- Arbain, N., & Shukor, N. A. (2015). The effects of GeoGebra on students achievement. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 172, 208-214.
- Aricha-Metzer Inbar, & Zaslavsky Orit. (2017). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 304.
- Astawa, I., Budayasa, I. K., & Juniati, D. (2018). The process of student cognition in constructing mathematical conjecture. *Journal on Mathematics Education*, 9(1), 15-26.
- Atwood, P. R. (2001). *Learning to construct proofs in a first course on mathematical proof*. Western Michigan University.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in mathematics*, 7(1), 23-40.
- Boero, P., Garuti, R., & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them *Theorems in school* (pp. 249-264): Brill Sense.
- Burtch, M. C. (2005). *Conjecturing as a classroom activity in differential equations*: Arizona State University.
- Cabral-Pini, A. M. (1994). Cooperative learning: its effect on math education. *U.M.I.*
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1).
- Chen, Y.-Z. (2015). Conjecturing and proving as an approach to facilitate active thinking and peer discussion in combinatorial class. *7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education*.
- Cilli-Turner, E. S. (2013). *Proof construction and collaborative revision in undergraduate mathematics*. (Ph.D. thesis), University of Illinois at Chicago, Chicago.
- De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

- Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- Ellis, A. B., Bieda, K., & Knuth, E. J. (2012). *Developing essential understanding of proof and proving for teaching mathematics in grades 9-12*: National Council of Teachers of Mathematics, Incorporated.
- Fishbein, M. (1967). *Readings in attitude theory and measurement*: New York : Wiley.
- Francies, H. D. (1972). Arithmetic attitudes and arithmetic achievement of fourth and sixth gradestudents in urban poverty-area elementary schools. *Dissertation Abstracts International*, 32(1971).
- Gillis, J. (2005). *An investigation of student conjectures in static and dynamic geometry environments*. (PhD Thesis.), the Graduate Faculty of Auburn University
- Good, C. V. (1959). *Dictionary of education : prepared under the auspices of Phi Delta Kappa* (2nd ed.. ed.): New York : McGraw-Hill.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hart, E. W. (1987). *An Exploratory Study Of The Proof-Writing Performance Of College Students In Elementary Group Theory*. (Doctor of Philosophy degree in Education (Mathematics Education)), The University of Iowa.
- Hemmi, K., & Löfwall, C. (2010). *Why do we need proof*. Paper presented at the CERME 6, Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. Paper presented at the Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference.
- Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2018). Using automated reasoning tools in GeoGebra in the teaching and learning of proving in geometry. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 25(2), 33-50.
- Lesseig, K. (2011). Mathematical knowledge for teaching proof.

- Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2011). Principles of task design for conjecturing and proving *Proof and proving in mathematics education* (pp. 305-325): Springer.
- Martinez, M. V., & Li, W. (2010). The conjecturing process and the emergence of the conjecture to prove. *Proceedings of PME 34*, 3, 265-272.
- Morselli, F. (2006). Use of examples in conjecturing and proving: An exploratory study. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 185.
- Muca, D. (2015). *Exploring the relationship between proof construction and understanding of mathematics: A case study of high school students constructing proof in algebra*. State University of New York at Buffalo.
- Nguyen, D. N. (2012). The development of the proving process within a dynamic geometry environment. *European researcher. Series A*(10-2), 1731-1744.
- Pantaleon, K., Juniati, D., Lukito, A., & Mandur, K. (2018). *The written mathematical communication profile of prospective math teacher in mathematical proving*. Paper presented at the Journal of Physics: Conference Series.
- Ponte, J. P. d., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49*, 3-14.
- Preiner, J. (2008). *Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: the case of GeoGebra*. (Doctoral dissertation in Mathematics Education), Faculty of Natural Sciences, University of Salzburg, Austria.
- Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010). The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 686-693.
- Soeharto, S. (1999). *The effects of a constructivist learning environment on grade six student achievement and attitude toward mathematics in Indonesian primary schools*. (Unpublished doctoral thesis), University of Houston, TX.
- Solow, D. (2002). *How to read and do proofs an introduction to mathematical thought processes*. Wiley, New York.

- Wilson, P. S. (1993). *Research ideas for the classroom: High school mathematics*: ERIC.
- Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational studies in mathematics*, 67(1), 59-76.
- Yoo, S. (2008). *Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers*. The University of Texas at Austin, Austin, TX.
- Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 31, 183-187.
- เยาวภา ผูกสมัคร. (2554). ผลการใช้ชุดการสอน โดยใช้โปรแกรม GSP ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เมื่อปรับอิทธิพลของสมรรถภาพทางสมองด้านมิติสัมพันธ์. ปรินญานิพนธ์ (กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา)) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- โกลม ไผศาล. (2540). การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินญานิพนธ์ (กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา)) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ไตรรงค์ กล้าบุตร. (2557). การพัฒนาชุดกิจกรรมเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (วิทยาศาสตร์ศึกษา)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร, พิษณุโลก.
- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). หลักคณิตศาสตร์ = *Principles of mathematics* (พิมพ์ครั้งที่ 2.. ed.): กรุงเทพฯ : ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ผู้จัดจำหน่าย.
- ขวัญ เพี้ยซ้าย. (2547). การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรี. ปรินญานิพนธ์ (กศ.ม. (คณิตศาสตร์)) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- คงขวัญ ทิพย์อักษร. (2559). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามลีลาของผู้เรียน เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตรที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญานิพนธ์ (กศ.ม. (วิทยาการทางการศึกษาและการจัดการเรียนรู้)) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- งามตา วรินทร์านนท์. (2535). จิตวิทยาสังคม (พิมพ์ครั้งที่ 2.. ed.): กรุงเทพฯ : สถาบันวิจัยพฤติกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ชนม์ชนก แก้ววันดี. (2559). การส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้แนวการสอนของแวน ฮีลี ร่วมกับ โปรแกรมจีโอ มิเตอร์ สเก็ตชแพด. (วิทยานิพนธ์ ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ศึกษา)), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่.
- ชัญญา อุทิศ. (2557). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง “กำหนดการเชิงเส้น” ที่ส่งเสริมทักษะและ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- ฐิติพจน์ โพธิ์ชื่น. (2551). ผลการสอนโดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือแบบกลุ่มช่วยเรียนรายบุคคลที่มีต่อ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์.
- ณัฐไฉไล พริ้งมาดี. (2544). การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องเส้นขนาน ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาตอนต้น. (วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต (การศึกษาคณิตศาสตร์)), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ดาวเรือง บุตรทรัพย์. (2559). การใช้โปรแกรม Geogebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตาม รูปแบบ 4MAT เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการทดสอบสมมติฐาน. (การศึกษา ค้นคว้าอิสระ วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (วิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย กรุงเทพมหานคร.
- ธรรมรัตน์ กิริธรร. (2558). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการพิสูจน์ เรื่องเส้นขนาน ที่มีผลต่อ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนชุมชนวัดไทรน้อย จังหวัดนนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- นวลศรี ชำนาญกิจ. (2550). ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นตอนของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิด ทางเรขาคณิต ตามตัวแบบแวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ นักศึกษาคณะ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์.

- ประเสริฐ เสียงดี. (2527). การศึกษาปรัชญาทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์.
(วิทยานิพนธ์ วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, เชียงใหม่.
- ประภาเพ็ญ สุวรรณ. (2526). ทศนคติ : การวัดการเปลี่ยนแปลงและพฤติกรรมอนามัย (พิมพ์ครั้งที่
2.. ed.): กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร.
- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2544). กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินญานิพนธ์ (กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา))
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ปานทอง กลุณาสศิริ. (2541). การสอนเรขาคณิตในระดับประถมศึกษา ในศตวรรษที่ 21. วารสาร
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เดือนกรกฎาคม - กันยายน 2541,
26(102), 3.
- พงศ์ดี วุฒิสันต์. (2556). GeoGebra อีกทางเลือกหนึ่งที่น่าสนใจของครูคณิตศาสตร์. นิตยสาร
สสวท., 41(181), 13-16.
- พยอม วงศ์สารศรี. (2526). จิตวิทยาการศึกษา = *Educational psychology*: กรุงเทพฯ : ภาควิชา
จิตวิทยาและการแนะแนว คณะวิชาครุศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนดุสิต.
- พรพิศ ยัมประยูร. (2556). หลักคณิตศาสตร์ = *Principles of mathematics* (พิมพ์ครั้งที่ 1.. ed.):
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2559). หลักคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 3, (ฉบับปรับปรุง). ed.): กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2560). การพิสูจน์ (พิมพ์ครั้งที่ 1.. ed.): กรุงเทพฯ : มูลนิธิ สอวน.
- พิสุทธิ ยงทางเรือ. (2559). ผลการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรมจีโอจีบรา
เรื่อง ภาคตัดกรวย. (วิทยานิพนธ์ ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (วิชาการสอน
คณิตศาสตร์)), มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, กรุงเทพมหานคร.
- ภาณุมาศ วรสันต์. (2561). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบรา
เรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนาม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 *Journal of
Education*, 29(1), 60-71.
- มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย. (2559). คณิตศาสตร์เบื้องต้น = *Basic mathematics*
(พิมพ์ครั้งที่ 5, [ฉบับพิมพ์ซ้ำ].. ed.): กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. (2559). คณิตศาสตร์สำหรับเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร :

เอกสารการสอนชุดวิชา = *Mathematics for informations and communication*

technology: นนทบุรี : สำนักพิมพ์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช.

มัณฑุณี แกมแก้ว. (2560). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหน่วยการเรียนรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra. (วิทยานิพนธ์ วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ศึกษา)), มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา นครราชสีมา.

มารศรี แนวจำปา. (2552). การสอนคณิตศาสตร์ตามปกติวิสัย. วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. ฉบับงานสัปดาห์วิทยาศาสตร์ (18-20 ส.ค. 2552).

ยุพิน พิพิธกุล, & ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). "รูปแบบการเรียนการสอนพิสูจน์" ในประมวลสาระชุด วิชาสารัตถะและวิถีวิธีทางคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 8 - 11. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช.

ล้วน สายยศ, & อังคณา สายยศ. (2538). เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา (พิมพ์ครั้งที่ 5.. ed.): กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.

วัชร น้อยมี. (2551). การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องการให้เหตุผล และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินิพนธ์ (กศ.ม. (การมัธยมศึกษา)) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

วิวัฒน์ชัย อยู่เย็นง. (2521). ทศนคติที่มีต่อการศึกษาระดับปริญญาโทสาขาส่งเสริมการเกษตรของ นิสิตปริญญาโทสาขาวิชานี้ที่เข้าศึกษาในมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ปีการศึกษา 2518-2519 ถึง 2520-2521. วิทยานิพนธ์ (วท.ม. (เกษตรศาสตร์)) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วีรศ กิตติวรากุล. (2561). การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra. (ปรินิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.

ศักดิ์ สุนทรเสถียร. (2531). เจตคติ: กรุงเทพฯ : ดี.ดี. บุ๊คส์โตร.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลาง

การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

สถาปนา บุญมาก. (2558). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอนมโนทัศน์ที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เส้นขนานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. *Phetchabun Rajabhat Journal* (ราชภัฏ เพชรบูรณ์ สาร), 17(1), 21-32.

สมเดช บุญประจักษ์. (2546). เรขาคณิต (พิมพ์ครั้งที่ 2.. ed.): กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา.

สมเดช บุญประจักษ์. (2551). หลักการคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 1.. ed.): กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร.

สมทรง สุวพานิช. (2553). เรขาคณิต...ศาสตร์มหัศจรรย์. *วารสารครูศาสตร์*, 7(1), 33.

สุภาวดี คำนาคี. (2551). การวิจัยและพัฒนากระบวนการกำกับตนเองสำหรับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการรับรู้ความสามารถของตนเองเจตคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. *วิทยานิพนธ์ คุรุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิจัยการศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*.

สุรสาล ผาสุข. (2546). การศึกษาความสามารถและการคิดเกี่ยวกับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และผลในด้านเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. *ปริญญานิพนธ์ (กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา)) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ*.

อัฉรา ปาจีนบุรพวรรณ. (2557). คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 1.. ed.): กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ภาคผนวก



ภาคผนวก ก

การหาคุณภาพของแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์
และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน
และแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

**การหาคุณภาพของแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์
และพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน**

ตาราง 8 ผลการประเมินแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์
ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

รายการพิจารณา	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ					ค่าเฉลี่ย	ระดับ ความ เหมาะสม
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5		
1. จุดประสงค์การเรียนรู้							
1.1 จุดประสงค์การเรียนรู้มีความชัดเจน	5	5	3	5	5	4.60	ดีมาก
1.2 จุดประสงค์การเรียนรู้ครอบคลุมเนื้อหาสาระ	5	5	3	5	5	4.60	ดีมาก
รวมด้านนี้						4.60	ดีมาก
2. เนื้อหา							
2.1 เนื้อหามีความถูกต้อง	4	5	4	5	5	4.60	ดีมาก
2.2 เนื้อหามีความยากง่ายเหมาะสมกับระดับของนักเรียน	5	5	4	5	4	4.60	ดีมาก
2.3 เนื้อหามีความชัดเจนครบถ้วน	5	5	4	5	5	4.80	ดีมาก
รวมด้านนี้						4.67	ดีมาก
3. กิจกรรมการเรียนรู้							
3.1 กิจกรรมการเรียนรู้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	4	5	3	5	5	4.40	ดี
3.2 กิจกรรมการเรียนรู้ส่งเสริมกระบวนการคิดของนักเรียน	5	5	4	5	5	4.80	ดีมาก

ตาราง 8 (ต่อ)

รายการพิจารณา	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ					ค่าเฉลี่ย	ระดับความเหมาะสม
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5		
3.3 กิจกรรมการเรียนรู้แบ่งเป็นขั้นตอน ตามความเหมาะสม	5	4	4	4	4	4.20	ดี
3.4 กิจกรรมการเรียนรู้มีความน่าสนใจ กระตุ้นให้นักเรียนอยากเรียนรู้	5	5	4	5	5	4.80	ดีมาก
3.5 ระยะเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความเหมาะสม	5	4	4	4	4	4.20	ดี
รวมด้านนี้						4.48	ดี
4. ทฤษฎี/หลักการที่นำมาใช้สอน							
4.1 การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ มีความเหมาะสมกับเนื้อหา	4	5	4	5	5	4.60	ดีมาก
4.2 การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน	4	5	4	5	5	4.60	ดีมาก
4.3 มีการใช้หลักการสร้างงาน (Task) ในการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์	5	5	4	5	5	4.80	ดีมาก

ตาราง 8 (ต่อ)

รายการพิจารณา	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ					ค่าเฉลี่ย	ระดับความเหมาะสม
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5		
4.4 การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ สามารถนำมาปฏิบัติได้จริงในชั้นเรียน	4	5	4	5	5	4.60	ดีมาก
รวมด้านนี้						4.65	ดีมาก
5. สื่อการเรียนรู้							
5.1 การใช้โปรแกรม GeoGebra มีความสัมพันธ์กับกิจกรรมการเรียนรู้	5	5	4	5	4	4.50	ดีมาก
5.2 การใช้โปรแกรม GeoGebra สนับสนุนหลักการสร้างงาน (Task) ในการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	5	5	4	5	5	4.75	ดีมาก
5.3 การใช้โปรแกรม GeoGebra มีความเหมาะสมและใช้ได้จริง	5	4	5	4	5	4.50	ดีมาก
รวมด้านนี้						4.58	ดีมาก
6. การวัดและประเมินผล							
6.1 การวัดและประเมินผลสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	5	5	4	5	5	4.80	ดีมาก

ตาราง 8 (ต่อ)

รายการพิจารณา	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ					ค่าเฉลี่ย	ระดับ ความ เหมาะสม
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5		
6.2 มีเกณฑ์การวัดและ ประเมินผลที่ชัดเจน	5	4	4	4	5	4.40	ดี
รวมด้านนี้						4.60	ดีมาก
รวมทุกด้าน						4.60	ดีมาก

การหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

แบบทดสอบที่ใช้เป็นเครื่องมือวัดผล คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์
เรื่อง เส้นขนาน จำนวน 8 ข้อ

ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการหาคุณภาพของแบบทดสอบดังนี้

1. วิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของ
แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 5 ท่าน เพื่อ
ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง ข้อสอบมีความสอดคล้อง

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอบมีความสอดคล้องหรือไม่

คะแนน -1 หมายถึง ข้อสอบไม่มีความสอดคล้อง

1.2 คำนวณค่า IOC เป็นรายข้อ โดยใช้สูตรการคำนวณ IOC คือ

$$IOC = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$$

เมื่อ IOC แทน ค่าดัชนีความสอดคล้อง

R_i แทน คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญคนที่ i

i แทน จำนวนตั้งแต่ 1 ถึง n

n แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

ตาราง 9 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ					รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5			
1	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
3	0	+1	+1	+1	+1	4	0.80	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	0	+1	+1	4	0.80	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
14	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
17	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้

2. หาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้สูตร

$$p_i = \frac{(H_i + L_i)}{[T(N_H + N_L)]}$$

$$r_i = \frac{(H_i - L_i)}{\left[T_i \times \frac{1}{2}(N_H + N_L)\right]}$$

เมื่อ p_i	แทน	ค่าความยากง่าย ข้อที่ i
r_i	แทน	ค่าอำนาจจำแนก ข้อที่ i
H_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของแต่ละคนในกลุ่มสูง
L_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของแต่ละคนในกลุ่มต่ำ
T_i	แทน	คะแนนเต็มของข้อที่ i
N_H	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มสูง
N_L	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

หาค่าความเชื่อมั่น ของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่องเส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัยโดยใช้สูตรของ Cronbach ซึ่งมีสูตรการคำนวณสัมประสิทธิ์แอลฟา (alpha coefficient: α) ดังนี้

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum s_i^2}{S_t^2} \right\}$$

เมื่อ α	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัด
k	แทน	จำนวนข้อของเครื่องมือวัด
$\sum$	แทน	ผลรวม
s_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแต่ละข้อ
S_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนรวมทั้งฉบับ

ตาราง 10 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	.51	.30
2	.53	.28
3	.61	.31
4	.50	.35
5	.49	.28
6	.49	.25
7	.41	.14
8	.48	.31
9	.56	.48
10	.41	.22
11	.39	.33
12	.43	.18
13	.45	.24

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) มีค่าเท่ากับ 0.82

การหาคุณภาพของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

เครื่องมือที่ใช้วัดผล คือ แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ

ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการหาคุณภาพดังนี้

1. วิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 5 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1	หมายถึง	ข้อสอบมีความสอดคล้อง
คะแนน 0	หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าข้อสอบมีความสอดคล้องหรือไม่
คะแนน -1	หมายถึง	ข้อสอบไม่มีความสอดคล้อง

1.2 คำนวณค่า IOC เป็นรายข้อ โดยใช้สูตรการคำนวณ IOC คือ

$$IOC = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$$

เมื่อ	IOC	แทน	ค่าดัชนีความสอดคล้อง
	R_i	แทน	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญคนที่ i
	i	แทน	จำนวนตั้งแต่ 1 ถึง n
	n	แทน	จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2. หาค่าอำนาจจำแนกโดยวิธีแจกแจง t และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติ

ต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตร

$$t_i = \frac{(\bar{X}_H - \bar{X}_L)}{\sqrt{\frac{S_H^2}{N_H} + \frac{S_L^2}{N_L}}}$$

เมื่อ	t_i	แทน	ค่าที่จะพิจารณาใน t - distribution
	$\bar{X}_H$	แทน	ค่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มสูง
	$\bar{X}_L$	แทน	ค่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มต่ำ
	S_H^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนกลุ่มสูง
	S_L^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนกลุ่มต่ำ
	N_H	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มสูง
	N_L	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

หาค่าความเชื่อมั่น ของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้สูตรของ Cronbach ซึ่งมีสูตรการคำนวณสัมประสิทธิ์แอลฟา (alpha coefficient: α) ดังนี้

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum s_i^2}{S_t^2} \right\}$$

เมื่อ α แทน ค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัด

k แทน จำนวนข้อของเครื่องมือวัด

$\sum$ แทน ผลรวม

s_i^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนแต่ละข้อ

S_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนรวมทั้งฉบับ



ตาราง 11 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ					รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4	คนที่ 5			
1	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	+1	0	4	0.80	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	+1	+1	4	0.80	ใช้ได้
5	0	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	+1	0	4	0.80	ใช้ได้
14	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	+1	0	4	0.80	ใช้ได้
17	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
18	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
19	+1	+1	+1	+1	0	5	1.00	ใช้ได้
20	+1	+1	+1	+1	0	4	0.80	ใช้ได้
21	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
22	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
23	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
24	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้
25	+1	+1	+1	+1	+1	5	1.00	ใช้ได้

ตาราง 12 ค่าอำนาจจำแนกโดยวิธีแจกแจง t-distribution และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติ
ต่อวิชาคณิตศาสตร์

ข้อที่	ค่าอำนาจจำแนก
1	4.54
2	4.88
3	6.79
4	6.10
5	5.44
6	3.64
7	4.23
8	4.39
9	4.39
10	5.01
11	4.71
12	5.69
13	4.70
14	5.76
15	2.63
16	3.30
17	2.72
18	2.10
19	4.14
20	4.81
21	4.64
22	2.50
23	7.62
24	7.90
25	3.59

หาค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) มีค่าเท่ากับ 0.94



ภาคผนวก ข
การทดสอบสมมติฐาน



การทดสอบสมมติฐานข้อ 1

การทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้สถิติทดสอบ Z (Z-test for Population Proportion) ดังนี้

$$\text{สมมติฐานคือ } H_0 : p \leq 0.60$$

$$H_1 : p > 0.60$$

$$\text{สถิติทดสอบคือ } Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ p แทน สัดส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$\hat{p}$ แทน สัดส่วนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

p_0 แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ต้องการทดสอบ

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 40 คน

$$\text{นั่นคือ } \hat{p} = \frac{33}{40} = 0.825$$

$$p_0 = 0.60$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } Z &= \frac{0.825 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{40}}} \\ &= \frac{0.15}{\sqrt{0.006}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } Z = 2.905$$

เนื่องจาก $Z_{.01^*} = 2.33$ จะได้ $Z > Z_{.01^*}$ เพราะฉะนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01



การทดสอบสมมติฐานข้อ 2

ตาราง 13 คะแนนจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อาคาการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน

ที่	Pre (ก่อน) (เต็ม 100)	Post (หลัง) (เต็ม 100)	D (ผลต่าง)	D ² (ผลต่างกำลัง สอง)
1	53	70	17	289
2	80	82	2	4
3	76	82	6	36
4	73	83	10	100
5	61	66	5	25
6	35	43	8	64
7	80	83	3	9
8	63	67	4	16
9	89	93	4	16
10	61	72	11	121
11	56	62	6	36
12	52	64	12	144
13	55	63	8	64
14	58	71	13	169
15	63	68	5	25
16	70	85	15	225
17	58	72	14	196
18	60	76	16	256
19	61	71	10	100

ตาราง 13 (ต่อ)

ปี	Pre (ก่อน) (เต็ม 100)	Post (หลัง) (เต็ม 100)	D (ผลต่าง)	D ² (ผลต่างกำลัง สอง)
20	77	80	3	9
21	66	67	1	1
22	67	69	2	4
23	54	65	11	121
24	56	63	7	49
25	73	75	2	4
26	75	78	3	9
27	53	62	9	81
28	68	71	3	9
29	69	81	12	144
30	62	67	5	25
31	66	74	8	64
32	61	78	17	289
33	72	73	1	1
34	73	84	11	121
35	63	75	12	144
36	59	66	7	49
37	64	78	14	196
38	70	79	9	81
39	81	86	5	25
40	76	81	5	25
ผลรวม	2609	2925	316	3346

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน โดยใช้การทดสอบ t (t-test for Dependent Sample)

$$\text{สมมติฐานคือ } H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\text{สถิติทดสอบคือ } t = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{\sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n D_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n D_i \right)^2}{n-1}}} \quad ; df = n-1$$

$$\text{เนื่องจาก } \sum_{i=1}^n D_i = 316; \sum_{i=1}^n D_i^2 = 3,346; \left(\sum_{i=1}^n D_i \right)^2 = 99,856; n = 40$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad t &= \frac{316}{\sqrt{\frac{40(3,346) - 99,856}{40-1}}} \\ &= 10.705 \end{aligned}$$

เนื่องจากเมื่อ $df = 40 - 1 = 39$ เปิดตารางได้ $t_{.01^*} = 2.4258$ จะได้ $t > t_{.01^*}$ เพราะฉะนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อาคการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนาน สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra

ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ เส้นขนาน

หัวข้อเรื่อง เส้นขนานและมุมแย้ง

ปีการศึกษา 2562

ภาคเรียนที่ 2

เวลา 100 นาที

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

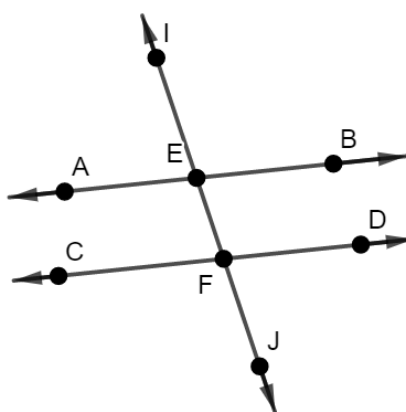
เพื่อให้นักเรียน

พิสูจน์ทฤษฎีบทและโจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งได้

2. สาระการเรียนรู้

1. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง

ทฤษฎีบท 1 ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน



สิ่งที่กำหนดให้

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F

ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

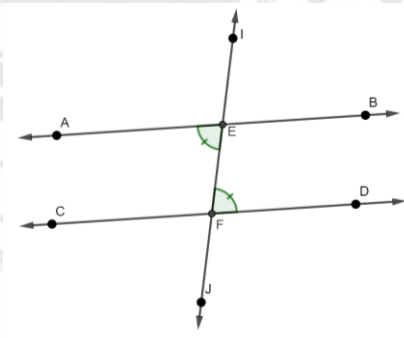
$$\angle EFD = \angle AEF$$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $BEF + EFD = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°
2. $AEF + BEF = 180^\circ$	2. ขนาดของมุมตรง
3. $BEF + EFD = AEF + BEF$	3. จากข้อ 1 และข้อ 2
4. $EFD = AEF$	4. จากข้อ 3

สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



สิ่งที่กำหนดให้ $\overrightarrow{EF}$ ตัด $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ทำให้ AEF และ EFD เป็นมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AEF + BEF = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมตรง
2. $EFD + BEF = 180^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $AEF = EFD$
3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	3. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

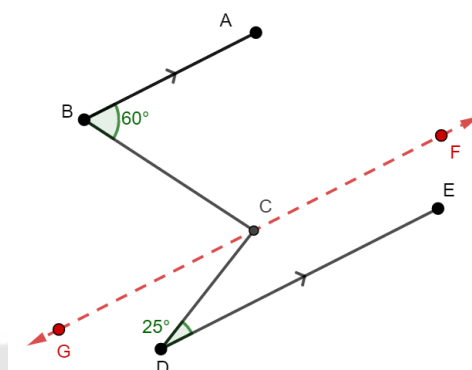
สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุป เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

2. โจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง

1. จากรูป กำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

$$BCD = 85^\circ$$



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $BCD = 85^\circ$

สิ่งที่สร้างขึ้นเพื่อพิสูจน์ $\overline{GF}$ ที่ผ่านจุด C และขนานกับ $\overline{BA}$ และ $\overline{DE}$

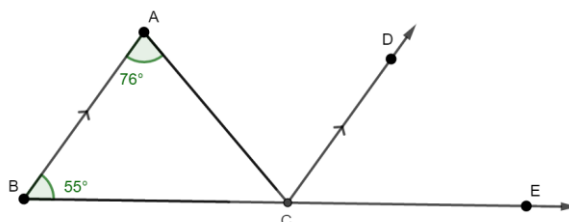
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $ABC = BCG$	1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
2. $BCG = 60^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $ABC = 60^\circ$
3. $CDE = GCD$	3. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
4. $GCD = 25^\circ$	4. จากข้อ 3 และ $CDE = 25^\circ$
5. $BCD = BCG + GCD$	5. กำหนดให้
6. $BCD = 85^\circ$	6. จากข้อ 2 ข้อ 4 และข้อ 5

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$ ดังรูป แล้ว

$$BCD = 85^\circ$$

2. จากรูป กำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\angle ACE = 131^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle ACE = 131^\circ$

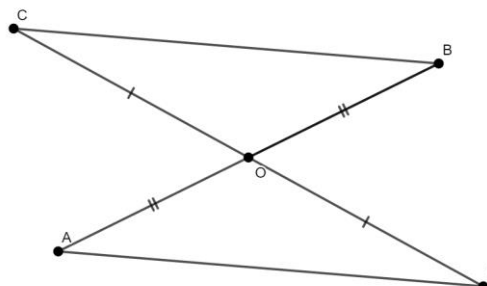
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle ABE + \angle BCD = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°
2. $\angle BCD = 125^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $\angle ABE = 55^\circ$
3. $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$	3. ขนาดของมุมตรงเท่ากับ 180°
4. $\angle DCE = 55^\circ$	4. จากข้อ 2 และข้อ 3
5. $\angle BAC = \angle ACD$	5. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
6. $\angle ACD = 76^\circ$	6. จากข้อ 5 และ $\angle BAC = 76^\circ$
7. $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE$	7. กำหนดให้
8. $\angle ACE = 131^\circ$	8. จากข้อ 4 ข้อ 6 และข้อ 7

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ ดังรูป แล้ว

$\angle ACE = 131^\circ$

3. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O จงพิสูจน์ว่า $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O
 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
 พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $CO = OD$ และ $AO = OB$	1. $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O
2. $\angle AOD = \angle COB$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. $\triangle AOD \cong \triangle BOC$	3. ด.ม.ด
4. $AD = BC$	4. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
5. $\angle ADO = \angle BCO$	5. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	6. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ดังรูป แล้ว $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

3. สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้

3.1 แฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra แสดงรูปมุมแย้ง ประกอบการทบทวน

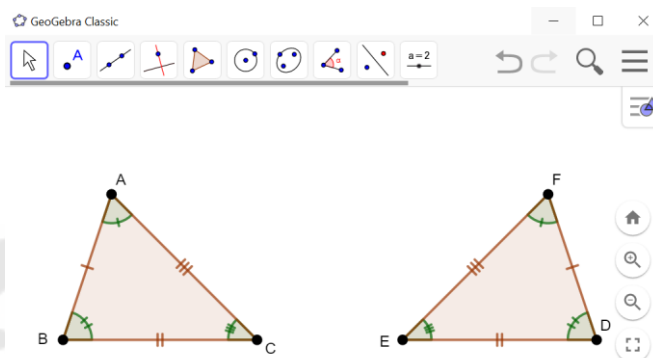
3.2 ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง เส้นขนานและมุมแย้ง

3.3 แฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนานและมุมแย้งประกอบใบกิจกรรมที่ 2

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ (10 นาที)

4.1.1 เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการ ครูแสดงรูปในโปรแกรม GeoGebra ไฟล์ 2_01.ggb พร้อมใช้คำถามกระตุ้นดังนี้



1) จากรูป รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการ เพราะด้านที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้น มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ]

2) เราสามารถเขียนสัญลักษณ์แสดงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\triangle ABC \cong \triangle FDE$]

3) รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ถ้ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบใดบ้าง

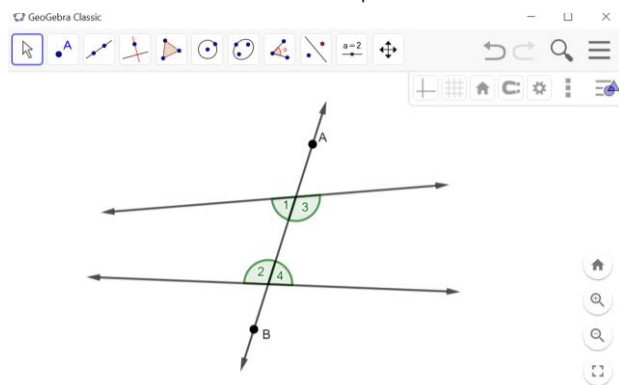
[นักเรียนควรตอบว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.) มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.) ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.) มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)]

4.1.2 เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานสมบัติที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด ครูใช้คำถามกระตุ้นดังนี้

1) สมบัติที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดคืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180°]

4.1.3 เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับคำว่า เส้นตัดและมุมแย้ง ครูแสดงรูปในโปรแกรม GeoGebra ไฟล์ 2_02.ggb พร้อมใช้คำถามกระตุ้นดังนี้



1) จากรูปเส้นตรงเส้นใด คือเส้นตัด

[นักเรียนควรตอบว่า $\overleftrightarrow{AB}$ คือเส้นตัด]

2) จากรูปมุมคู่ใดคือมุมแย้ง

[นักเรียนควรตอบว่า 1 และ 4 คือ มุมแย้งกัน และ 2 และ 3 คือ มุมแย้งกัน]

4.1.4 ครูบอกกับนักเรียนว่า ในบทเรียนที่ผ่านมา นอกจากที่เราสามารถตรวจสอบการขนานกันของเส้นตรงจากการพิจารณามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดแล้ว เรายังสามารถตรวจสอบการขนานกันของเส้นตรงจากการพิจารณาจากมุมแย้งได้อีก ซึ่งในบทเรียนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง และพิสูจน์ทฤษฎีบทและใจหทัยคณิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง

4.2 ขั้นสอน (85 นาที)

4.2.1 เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้และได้พิสูจน์เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง ครูแจกใบกิจกรรมที่ 2 และให้นักเรียนทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในใบกิจกรรมที่ 2 ส่วนที่ 1 ดังนี้

ส่วนที่ 1

1) นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ โดยมี $\overleftrightarrow{IJ}$ เป็นเส้นตัดที่ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ จากนั้นเลื่อนจุด A, B, C, D, E หรือ F สังเกตความเปลี่ยนแปลง บันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น และผลที่ได้จากการสังเกต

2) นักเรียนร่วมพูดคุยปรึกษากันว่า จากข้อ 1 สามารถสร้างข้อความคาดการณ์ของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมแย้งเป็นอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน]

3) ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมแย้ง แล้วสรุปข้อความคาดการณ์ที่ได้อีกครั้ง

4) นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overline{AB}$ และเส้นตัด $\overline{EF}$ ที่ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด E จากนั้นสร้าง $\overline{CD}$ ตัด $\overline{EF}$ ที่จุด F โดยกำหนดให้ $\angle AEF = \angle EFD$ จากนั้นเลื่อนจุด A, B, E หรือ F หลังการเลื่อนจุดให้นักเรียนสร้างเส้นตรงเส้นใหม่ที่ขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด F บันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น และผลที่ได้จากการสังเกต

5) นักเรียนร่วมพูดคุยปรึกษากันว่า จากข้อ 3 จะได้ข้อความคาดการณ์ของความสัมพัทธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมแย้งเป็นอย่างไร โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

[นักเรียนควรตอบว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่ขนานกัน]

6) ครูถามนักเรียนว่า จากข้อ 2 และข้อ 4 จะได้ข้อสรุปของข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งเป็นอย่างไร โดยครูตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

[นักเรียนควรตอบว่า เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่ขนานกันก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน]

7) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงานในข้อ 1 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ โดยมี $\overline{IJ}$ เป็นเส้นตัดที่ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\angle EFD = \angle AEF$]

จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 6 ในใบกิจกรรม

8) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าเจอจุดผิดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกจุดบกพร่องของการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

9) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

10) นักเรียนร่วมพูดคุยปรึกษากัน พิจารณาการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน” ในข้อ 8.1 และ 8.2 แตกต่างกันอย่างไร การพิสูจน์ในข้อใดที่นักเรียนคิดว่าน่าเชื่อถือกว่ากัน เพราะอะไร และนักเรียนจะแก้ไขการพิสูจน์ข้อใด อย่างไร

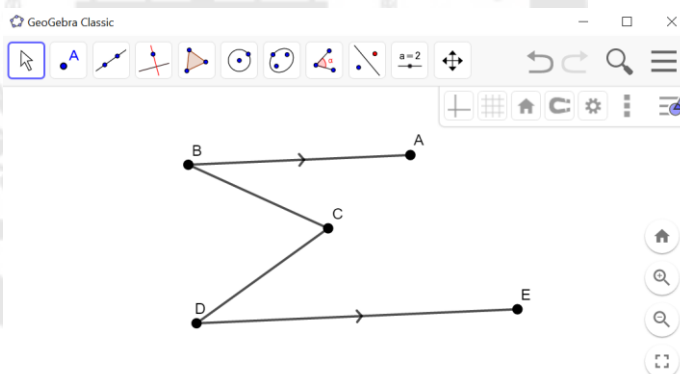
11) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

4.2.2 เพื่อสำรวจข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2 ส่วนที่ 2 ดังนี้

ส่วนที่ 2

โจทย์ข้อที่ 1

1) นักเรียนเปิดแฟ้ม 2E02.ggb เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$ จากนั้นสำรวจขนาด $\angle ABC$, $\angle BCD$ และ $\angle CDE$ ดังรูป โดยการเลื่อนจุด A , B , D หรือ E แล้วบันทึกผลในตารางเขียนเงื่อนไขเริ่มต้น ผลที่ได้จากการสังเกต ตอบคำถามเกี่ยวกับความรู้ที่ใช้ในการพิสูจน์ และสิ่งที่ควรสร้างเพิ่มในการพิสูจน์



2) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 1 ในใบกิจกรรม

3) นักเรียนเปิดแฟ้ม 2E03.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $\angle ABC = 60^\circ$ และ $\angle CDE = 25^\circ$ และถามนักเรียนว่า จากข้อมูลที่กำหนดให้ นักเรียนจะได้ข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของ $\angle BCD$ เป็นเท่าไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\angle BCD = 85^\circ$]

4) นักเรียนเลื่อนจุด A , B , D หรือ E แล้ววัดขนาดของ $\angle BCD$ อีกครั้ง และบันทึกขนาดของ $\angle BCD$ ข้อ 2 ในใบกิจกรรม

5) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ว่า “เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$ ดังรูปข้างต้น จะได้ $BCD = 85^\circ$ ”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $BCD = 85^\circ$]

(3) ควรใช้ความรู้เรื่องใดในการพิสูจน์

[นักเรียนควรตอบว่า เส้นขนานและมุมแย้ง]

(4) ควรสร้างสิ่งใดเพิ่มในการพิสูจน์

[นักเรียนควรตอบว่า ลาก $\overline{GF}$ ให้ขนานกับ $\overline{BA}$ ที่จุด C]

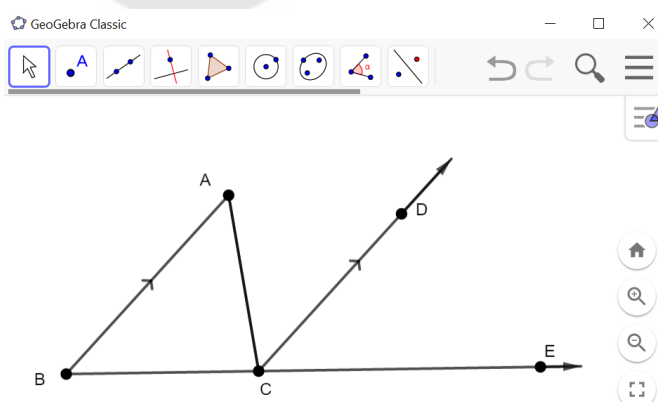
จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 3 ในใบกิจกรรม

6) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

7) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

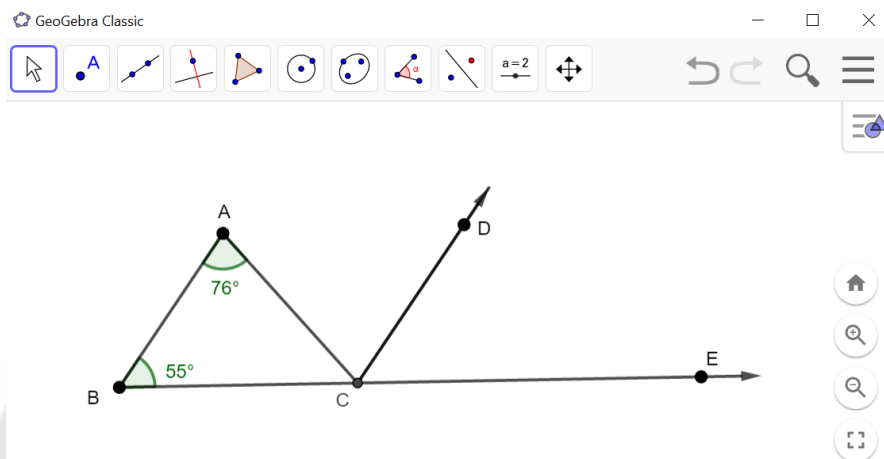
โจทย์ข้อที่ 2

8) นักเรียนเปิดแฟ้ม 2E04.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$ จากนั้นเลื่อนจุด A , B หรือ C แล้วบันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น และผลที่ได้จากการสังเกต



9) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วเติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างในข้อ 1 ใบกิจกรรม

10) นักเรียนเปิดแฟ้ม 2E05.ggb เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ และถามนักเรียนว่า จากข้อมูลที่กำหนดให้ นักเรียนจะได้ข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของ $\angle ACE$ เป็นอย่างไร



11) นักเรียนเลื่อนจุด A หรือ B แล้ววัดขนาดของ $\angle ACE$ อีกครั้ง และบันทึกขนาดของ $\angle ACE$ ข้อ 2 ในใบกิจกรรม

12) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ว่า “เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ ดังรูปข้างต้น จะได้ว่า $\angle ACE = 131^\circ$ ”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้ คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\angle ACE = 131^\circ$]

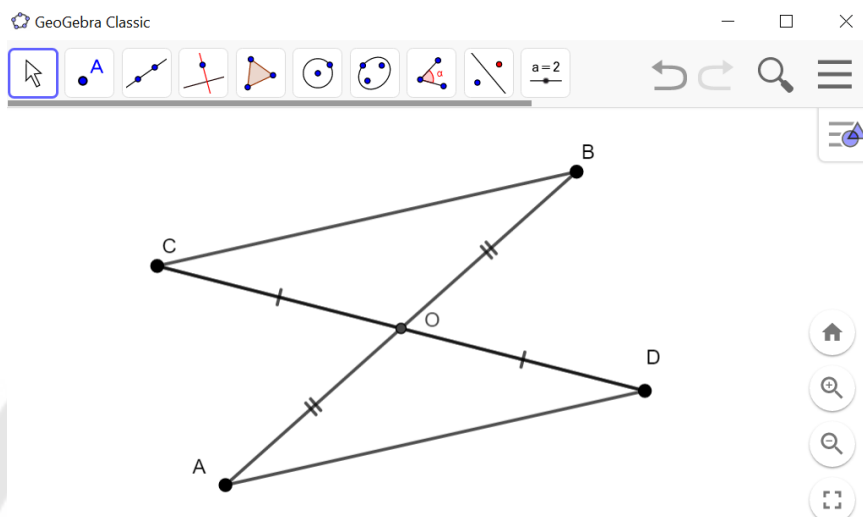
จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 3 ในใบกิจกรรม

13) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

14) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

โจทย์ข้อที่ 3

15) นักเรียนเปิดแฟ้ม 2E06.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ดังรูป จากนั้นเลื่อนจุด A, B, D หรือ O และสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{BC}$ ที่จุด A แล้วบันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น และผลที่ได้จากการสังเกต



16) ครูถามนักเรียนว่า เราสามารถสรุปข้อความคาดการณ์ เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า 1) $AD = BC$ และ 2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$]

17) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ว่า “เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ดังรูปข้างต้น จะได้ว่า $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้ คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$]

จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 2 ในใบกิจกรรม

18) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

19) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

4.3 ขั้นสรุป (5 นาที)

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ที่ได้ในคาบเรียนนี้ โดยการถามนักเรียนว่าทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งคืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน]

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
1. พิสูจน์ทฤษฎีบทและปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งได้	วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องในการเขียนพิสูจน์ในใบกิจกรรม เครื่องมือวัดผล : ใบกิจกรรมที่ 2 เส้นขนานและมุมแย้ง	เกณฑ์การให้คะแนน : พิจารณาจากเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง เส้นขนาน ดังแนบไว้ท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60% ของคะแนนรวมขึ้นไปถือว่าผ่าน

ตารางแสดงเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง เส้นขนาน

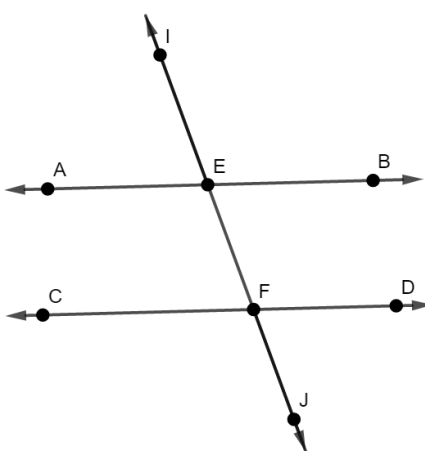
ด้าน	ระดับคะแนน		
	2	1	0
ด้านการทำความเข้าใจปัญหา	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องได้พิสูจน์ได้ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของสิ่งที่ต้องระบุแต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้น้อยกว่าครั้งหนึ่ง หรือไม่ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์
ด้านการเขียนพิสูจน์	เขียนข้อความประกอบการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ผลสรุปได้อย่างถูกต้องทั้งหมด	เขียนข้อความประกอบการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ผลสรุปได้อย่างถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถเขียนข้อความประกอบการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน จนนำไปสู่ผลสรุป หรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
ด้านการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์	อ้างบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความได้ถูกต้องทั้งหมด	อ้างบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถอ้างบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ประกอบแต่ละข้อความได้ หรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
ด้านการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องทั้งหมด	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องหรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง

กิจกรรมที่ 2 เส้นขนานและมุมแย้ง

ส่วนที่ 1

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้เพื่อสำรวจและพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง

1. เปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ โดยมี $\overleftrightarrow{IJ}$ เป็นเส้นตัดที่ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ ดังรูป จากนั้นเลื่อนจุด A, B, C, D, E หรือ F สังเกตความเปลี่ยนแปลง และบันทึกผลลงในตาราง และตอบคำถามต่อไปนี้



ครั้งที่	มุมแย้งคู่ที่ 1		มุมแย้งคู่ที่ 2	
	ขนาดของ $\angle AEF$	ขนาดของ $\angle EFD$	ขนาดของ $\angle BEF$	ขนาดของ $\angle EFC$
1				
2				
3				
4				
5				

เงื่อนไขเริ่มต้น $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ โดยมี $\overleftrightarrow{IJ}$ เป็นเส้นตัดที่ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ

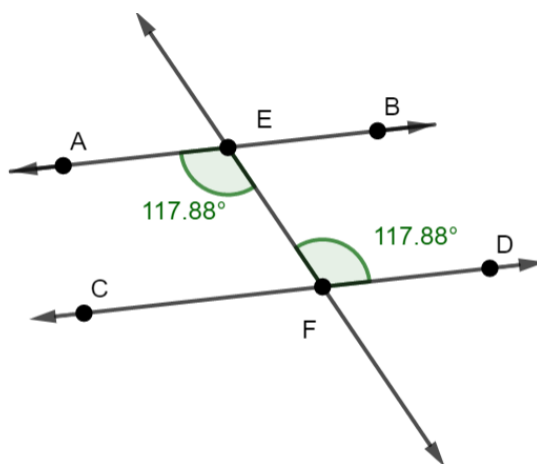
ผลที่ได้จากการสังเกต 1) $\angle AEF = \angle EFD$ และ

2) $\angle BEF = \angle EFC$

2. จากข้อ 1 ข้อความคาดการณ์ของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมแย้งเป็นอย่างไร

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

3. เปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overline{AB}$ และเส้นตัด $\overline{EF}$ ที่ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด E จากนั้นสร้าง $\overline{CD}$ ตัด $\overline{EF}$ ที่จุด F โดยกำหนดให้ $\angle AEF = \angle EFD$ ดังรูป (เป็นตัวอย่าง) จากนั้นเลื่อนจุด A, B, E หรือ F หลังการเลื่อนจุด ให้นักเรียนสร้างเส้นตรงเส้นใหม่ ที่ขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด F บันทึกผลลงในตาราง และตอบคำถามต่อไปนี้



ครั้งที่	มุมแย้งคู่ที่ 1		มุมแย้งคู่ที่ 2		เส้นตรงที่สร้างใหม่สัมพันธ์อย่างไรกับ $\overline{CD}$	
	ขนาดของ $\angle AEF$	ขนาดของ $\angle EFD$	ขนาดของ $\angle BEF$	ขนาดของ $\angle EFC$	ทับกัน	ไม่ทับกัน
1						
2						
3						
4						
5						

เงื่อนไขเริ่มต้น $\angle AEF = \angle EFD$ และ $\angle BEF = \angle EFC$

ผลที่ได้จากการสังเกต $\overline{CD}$ กับเส้นตรงที่สร้างใหม่เป็นเส้นตรงเดียวกัน / ทับกัน

4. จากข้อ 3 ข้อความคาดการณ์ของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมแย้งเป็นอย่างไร

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

5. จากข้อ 2 และข้อ 4 จะได้ข้อสรุปของข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งเป็นอย่างไร

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

6. สำนวจองค์ประกอบในแฟ้มงานในข้อ 1 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน”

สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle EFD = \angle AEF$

1) $\angle BEF = \underline{\hspace{2cm}}$ $\angle EFD = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $\angle BEF + \angle EFD = 180^\circ$ เพราะ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°

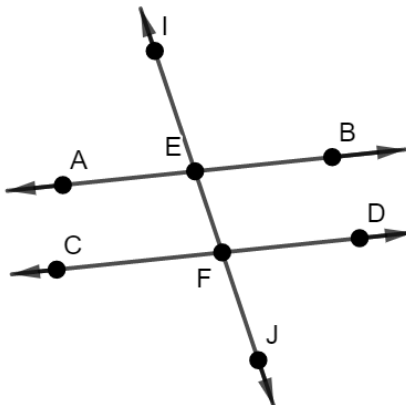
3) $\angle AEF = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $\angle AEF + \angle BEF = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมตรงเท่ากับ 180°

5) $\angle BEF + \angle EFD = \angle AEF + \angle BEF$ เพราะจากข้อ 2 และข้อ 4

6) $\angle EFD = \angle AEF$ เพราะจากข้อ 5

7. จงพิสูจน์ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน”
รูปประกอบการพิสูจน์

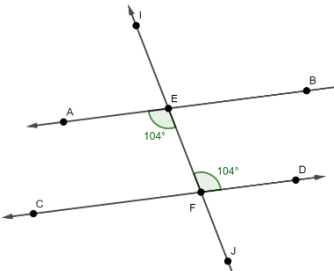
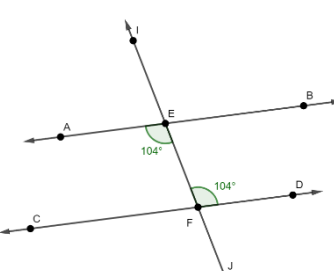


สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F
ตามลำดับ
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $EFD = AEF$
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $BEF + EFD = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°
2. $AEF + BEF = 180^\circ$	2. ขนาดของมุมตรง
3. $BEF + EFD = AEF + BEF$	3. จากข้อ 1 และข้อ 2
4. $EFD = AEF$	4. จากข้อ 3

สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

8. การพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่ขนานกัน” ในข้อ 8.1 และ 8.2 แตกต่างกันอย่างไ การพิสูจน์ในข้อใดที่นักเรียนคิดว่าน่าเชื่อถือกว่ากัน เพราะอะไร และนักเรียนจะแก้ไขการพิสูจน์ข้อใด อย่างไร

8.1	8.2																						
 สิ่งที่กำหนดให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้ $\angle AEF$ และ $\angle EFD$ เป็นมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ พิสูจน์ <table border="1"> <thead> <tr> <th>ข้อความ</th><th>เหตุผล</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1. $\angle AEF = 104^\circ$</td><td>1. จากการวัด</td></tr> <tr> <td>2. $\angle EFD = 104^\circ$</td><td>2. จากการวัด</td></tr> <tr> <td>3. $\angle AEF = \angle EFD$</td><td>3. จากข้อ 1 และ 2</td></tr> <tr> <td>4. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$</td><td>4. จากข้อ 3</td></tr> </tbody> </table> สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่ขนานกัน	ข้อความ	เหตุผล	1. $\angle AEF = 104^\circ$	1. จากการวัด	2. $\angle EFD = 104^\circ$	2. จากการวัด	3. $\angle AEF = \angle EFD$	3. จากข้อ 1 และ 2	4. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	4. จากข้อ 3	 สิ่งที่กำหนดให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้ $\angle AEF$ และ $\angle EFD$ เป็นมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ พิสูจน์ <table border="1"> <thead> <tr> <th>ข้อความ</th><th>เหตุผล</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1. $\angle AEF = 104^\circ$</td><td>1. จากการวัด</td></tr> <tr> <td>2. $\angle EFD = 104^\circ$</td><td>2. จากการวัด</td></tr> <tr> <td>3. $\angle BEF = 76^\circ$</td><td>3. จากการวัด</td></tr> <tr> <td>4. $\angle BEF + \angle EFD = 180^\circ$</td><td>4. จากข้อ 2 และ 3</td></tr> <tr> <td>5. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$</td><td>5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่ขนานกัน</td></tr> </tbody> </table> สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่ขนานกัน	ข้อความ	เหตุผล	1. $\angle AEF = 104^\circ$	1. จากการวัด	2. $\angle EFD = 104^\circ$	2. จากการวัด	3. $\angle BEF = 76^\circ$	3. จากการวัด	4. $\angle BEF + \angle EFD = 180^\circ$	4. จากข้อ 2 และ 3	5. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่ขนานกัน
ข้อความ	เหตุผล																						
1. $\angle AEF = 104^\circ$	1. จากการวัด																						
2. $\angle EFD = 104^\circ$	2. จากการวัด																						
3. $\angle AEF = \angle EFD$	3. จากข้อ 1 และ 2																						
4. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	4. จากข้อ 3																						
ข้อความ	เหตุผล																						
1. $\angle AEF = 104^\circ$	1. จากการวัด																						
2. $\angle EFD = 104^\circ$	2. จากการวัด																						
3. $\angle BEF = 76^\circ$	3. จากการวัด																						
4. $\angle BEF + \angle EFD = 180^\circ$	4. จากข้อ 2 และ 3																						
5. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่ขนานกัน																						

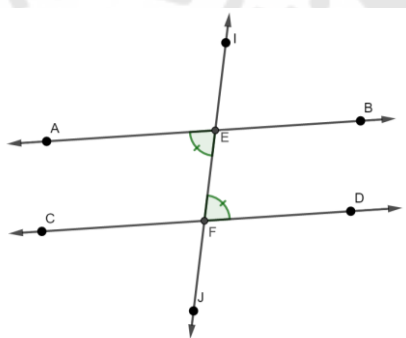
จากข้อ 8.1 และ 8.2 ให้นักเรียนเขียนสิ่งที่เหมือนกันและสิ่งที่ต่างกัน ลงในตารางด้านล่างนี้

สิ่งที่เหมือนกัน	สิ่งที่ต่างกัน
มีการวัดค่ามุมเพื่อใช้เป็นเหตุผลประกอบข้อความ	ข้อ 8.2 มีการใช้สมบัติ เพื่อนำมาใช้เป็นเหตุผลจากบทเรียนที่แล้ว มาประกอบการพิสูจน์ แต่ข้อ 8.1 ไม่มี

การพิสูจน์ในข้อ 8.2 น่าเชื่อถือกว่า เพราะใช้การอ้างสมบัติ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน” ในการแสดงเหตุผล

ดังนั้น ควรแก้ไขการพิสูจน์จากข้อ 8.2 ดังนี้

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ทำให้ $\angle AEF$ และ $\angle EFD$ เป็นมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle AEF + \angle BEF = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมตรง
2. $\angle EFD + \angle BEF = 180^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $\angle AEF = \angle EFD$
3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	3. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

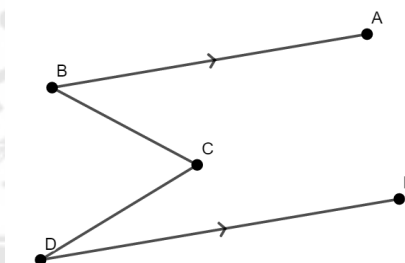
สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้ว
เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

ส่วนที่ 2

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้เพื่อสำรวจข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โจทย์
คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง

โจทย์ข้อที่ 1

1. เปิดแฟ้ม 2E02.ggb เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$ จากนั้นสำรวจขนาด ABC , BCD
และ CDE ดังรูป โดยการเลื่อนจุด A , B , D หรือ E แล้วบันทึกผลในตาราง และตอบคำถาม
ต่อไปนี้



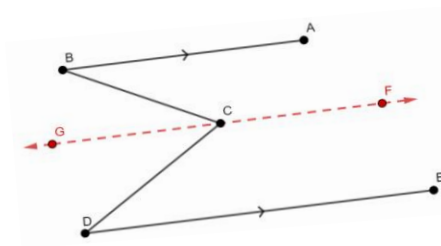
ครั้งที่	ขนาดของ BCD	ขนาดของ ABC	ขนาดของ CDE	ผลรวมของ ABC และ CDE
1				
2				
3				
4				
5				

เงื่อนไขเริ่มต้น $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$

ผลที่ได้จากการสังเกต $BCD = ABC + CDE$

ควรใช้ความรู้เรื่องใดในการพิสูจน์ผลที่ได้จากการสังเกต เส้นขนานและมุมแย้ง

ควรสร้างสิ่งใดเพิ่มในการพิสูจน์ ลาก $\overline{GF}$ ให้ขนานกับ $\overline{BA}$ ที่จุด C ดังรูป



1) $ABC = \underline{\hspace{2cm}}$ $BCG = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $ABC = BCG$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

3) $CDE = \underline{\hspace{2cm}}$ $GCD = \underline{\hspace{2cm}}$

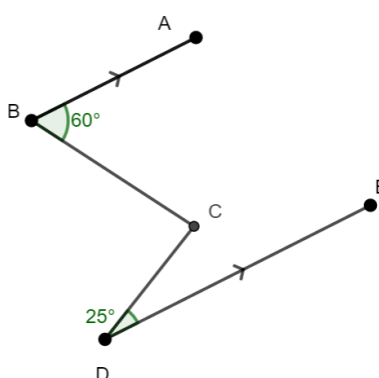
4) $CDE = GCD$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

5) $BCD = BCG + GCD$ เพราะกำหนดให้

6) $BCD = ABC + CDE$ เพราะจากข้อ 2 ข้อ 3 และข้อ 5

2. เปิดแฟ้ม 2E03.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$ ดัง

รูป



1) จากข้อมูลที่กำหนดให้ นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของ BCD เป็นเท่าไร

ตอบ $BCD = 85^\circ$

2) ให้นักเรียนเลื่อนจุด A, B, D หรือ E แล้ววัดขนาดของ BCD อีกครั้ง และบันทึกขนาดของ BCD

ตอบ $BCD = 85^\circ$



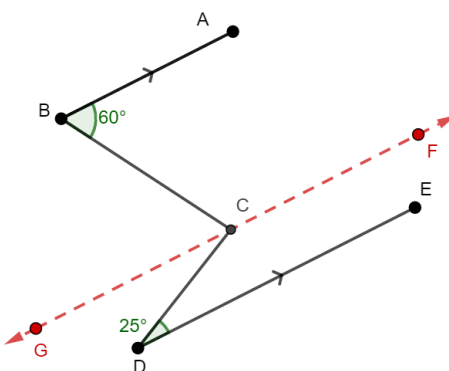
3. สำนวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์
ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$ ดังรูปข้างต้น จะได้ $BCD = 85^\circ$

สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $ABC = 60^\circ$ และ $CDE = 25^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $BCD = 85^\circ$

ควรใช้ความรู้เรื่องใดในการพิสูจน์ เส้นขนานและมุมแย้ง

ควรสร้างสิ่งใดเพิ่มในการพิสูจน์ ลาก $\overline{GF}$ ให้ขนานกับ $\overline{BA}$ ที่จุด C ดังรูป



1) $ABC = BCG$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมี
ขนาดเท่ากัน

2) $BCG = 60^\circ$ เพราะจากข้อ 1 และ $ABC = 60^\circ$

3) $CDE = GCD$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมี
ขนาดเท่ากัน

4) $GCD = 25^\circ$ เพราะจากข้อ 3 และ $CDE = 25^\circ$

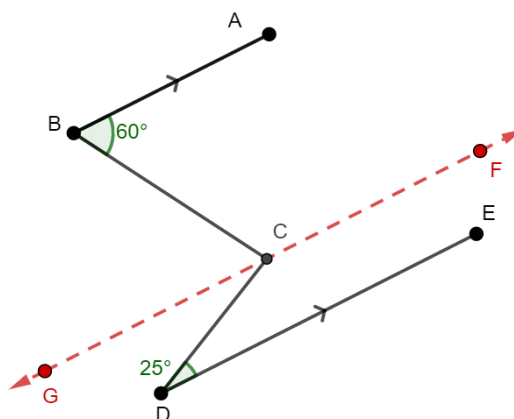
5) $BCD = BCG + GCD$ เพราะกำหนดให้

6) $BCD = 85^\circ$ เพราะจากข้อ 2 ข้อ 4 และข้อ 5

4. เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $\angle ABC = 60^\circ$ และ $\angle CDE = 25^\circ$ ดังรูปข้างต้น จงพิสูจน์

ว่า $\angle BCD = 85^\circ$

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้

$\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $\angle ABC = 60^\circ$ และ $\angle CDE = 25^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$\angle BCD = 85^\circ$

สิ่งที่สร้างขึ้นเพื่อพิสูจน์

ลาก $\overline{GF}$ ให้ขนานกับ $\overline{BA}$ ที่จุด C ดังรูป

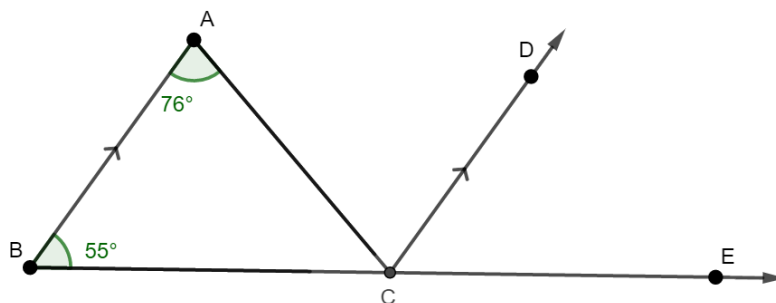
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle ABC = \angle BCG$	1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
2. $\angle BCG = 60^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $\angle ABC = 60^\circ$
3. $\angle CDE = \angle GCD$	3. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
4. $\angle GCD = 25^\circ$	4. จากข้อ 3 และ $\angle CDE = 25^\circ$
5. $\angle BCD = \angle BCG + \angle GCD$	5. กำหนดให้
6. $\angle BCD = 85^\circ$	6. จากข้อ 2 ข้อ 4 และข้อ 5

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{DE}$, $\angle ABC = 60^\circ$ และ $\angle CDE = 25^\circ$ ดังรูป แล้ว

$\angle BCD = 85^\circ$

2. เปิดแฟ้ม 2E05.ggb เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ ดังรูป



1) จากข้อมูลที่กำหนดให้ นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของ $\angle ACE$ เป็นอย่างไร

ตอบ $\angle ACE = 131^\circ$

2) ให้นักเรียนเลื่อนจุด A หรือ B แล้ววัดขนาดของ $\angle ACE$ อีกครั้ง และบันทึกขนาดของ $\angle ACE$

ตอบ $\angle ACE = 131^\circ$

3. สำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ จะได้ว่า $\angle ACE = 131^\circ$

สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle ACE = 131^\circ$

1) $\angle ABE + \angle BCD = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°

2) $\angle BCD = 125^\circ$ เพราะจากข้อ 1 และ $\angle ABE = 55^\circ$

3) $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมตรงเท่ากับ 180°

4) $\angle DCE = 55^\circ$ เพราะจากข้อ 2 และข้อ 3

5) $\angle BAC = \angle ACD$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

6) $\angle ACD = 76^\circ$ เพราะจากข้อ 5 และ $\angle BAC = 76^\circ$

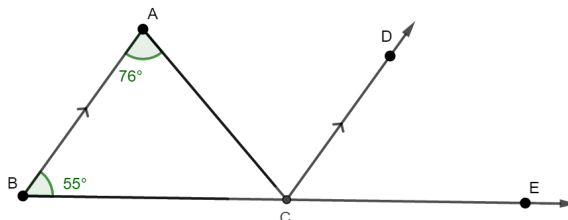
7) $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE$ เพราะกำหนดให้

8) $\angle ACE = 131^\circ$ เพราะจากข้อ 4 ข้อ 6 และข้อ 7

4. เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ ดังรูปข้างต้น จงพิสูจน์ว่า

$$\angle ACE = 131^\circ$$

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้

$$\overline{BA} \parallel \overline{CD}, \angle ABE = 55^\circ \text{ และ } \angle BAC = 76^\circ$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\angle ACE = 131^\circ$$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle ABE + \angle BCD = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°
2. $\angle BCD = 125^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $\angle ABE = 55^\circ$
3. $\angle BCD + \angle DCE = 180^\circ$	3. ขนาดของมุมตรงเท่ากับ 180°
4. $\angle DCE = 55^\circ$	4. จากข้อ 2 และข้อ 3
5. $\angle BAC = \angle ACD$	5. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
6. $\angle ACD = 76^\circ$	6. จากข้อ 5 และ $\angle BAC = 76^\circ$
7. $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE$	7. กำหนดให้
8. $\angle ACE = 131^\circ$	8. จากข้อ 4 ข้อ 6 และข้อ 7

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE = 55^\circ$ และ $\angle BAC = 76^\circ$ ดังรูป แล้ว

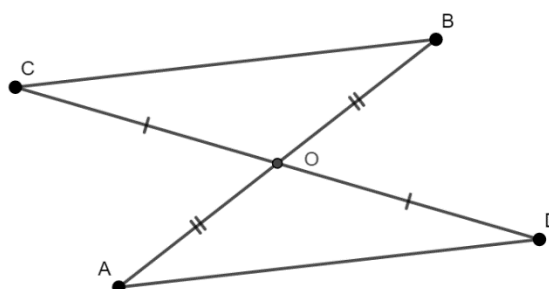
$$\angle ACE = 131^\circ$$

ข้อผิดพลาดที่พบในการพิสูจน์ของเพื่อน(ถ้ามี)



โจทย์ข้อที่ 3

1. เปิดแฟ้ม 2E04.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ดังรูป จากนั้นเลื่อนจุด A, B, D หรือ O และสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{BC}$ ที่จุด A แล้วบันทึกผลลงในตาราง และตอบคำถามต่อไปนี้



ครั้งที่	ขนาดของ AD	ขนาดของ BC	เส้นตรงที่สร้างใหม่สัมพันธ์อย่างไรกับ $\overline{AD}$	
			ทับกัน	ไม่ทับกัน
1				
2				
3				
4				
5				

เงื่อนไขเริ่มต้น $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O

ผลที่ได้จากการสังเกต 1) $AD = BC$

2) $\overline{AD}$ กับเส้นตรงที่สร้างใหม่เป็นเส้นตรงเดียวกัน / ทับกัน

สรุปข้อความคาดการณ์ เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ได้ว่า

1) $AD = BC$ และ 2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

2. ส้ารวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ว่าเมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ดังรูปข้างต้น จะได้ว่า $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

1) จากรูป มีรูปสามเหลี่ยมสองรูป คือ $\triangle AOD$ และ $\triangle BOC$ โดยมีด้านที่เท่ากันคือ $CO = OD$ และ $AO = OB$ เพราะ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O

2) $\angle AOD = \angle COB$

3) $\angle AOD = \angle COB$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

4) $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ เพราะ ด.ม.ด

5) $AD = BC$

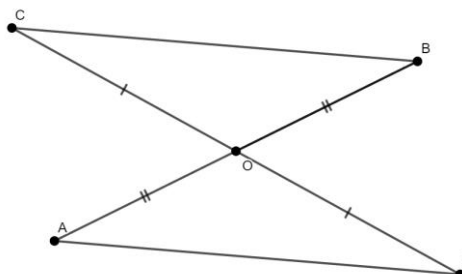
6) $AD = BC$ เพราะด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน

7) $\angle ADO = \angle BCO$ เพราะมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน

8) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ เพราะถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

3. เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ดังรูปข้างต้น จงพิสูจน์
ว่า $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O
 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
 พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $CO = OD$ และ $AO = OB$	1. $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O
2. $\angle AOD = \angle COB$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. $\triangle AOD \cong \triangle BOC$	3. ค.ม.ด
4. $AD = BC$	4. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
5. $\angle ADO = \angle BCO$	5. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	6. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O ดังรูป แล้ว
 $AD = BC$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ เส้นขนาน

หัวข้อเรื่อง เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

ปีการศึกษา 2562

ภาคเรียนที่ 2

เวลา 100 นาที

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

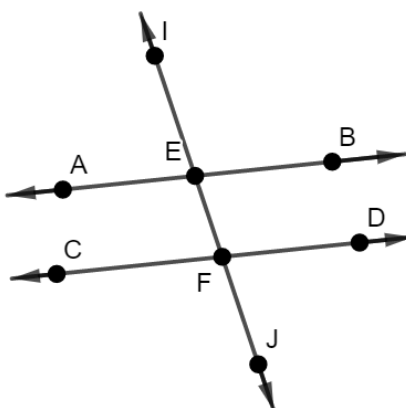
เพื่อให้นักเรียน

พิสูจน์ทฤษฎีบทและโจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในได้

2. สาระการเรียนรู้

1. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

ทฤษฎีบท 1 ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F
ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle AEI = \angle CFE$, $\angle IEB = \angle EFD$, $\angle CFJ = \angle AEF$ และ $\angle DFJ = \angle BEF$

พิสูจน์

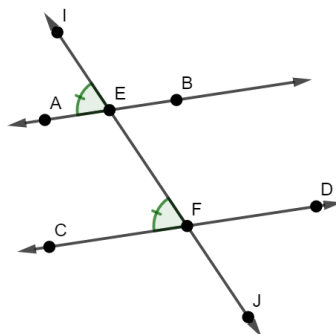
ข้อความ	เหตุผล
1. $BEF = CFE$	1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
2. $AEI = BEF$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. $AEI = CFE$	3. จากข้อ 1 และข้อ 2

ในการทำงานเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $IEB = EFD$, $CFJ = AEF$ และ

$$DFJ = BEF$$

สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



สิ่งที่กำหนดให้ $\overrightarrow{IJ}$ ตัด $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ ทำให้

$$AEI = CFE$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

พิสูจน์

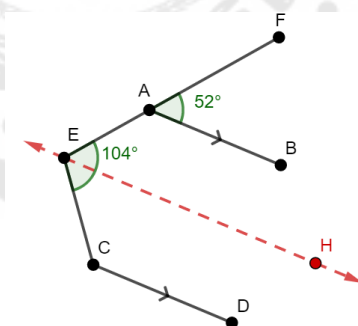
ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle AEI + \angle AEF = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมตรง
2. $\angle CFE + \angle AEF = 180^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $\angle AEI = \angle CFE$
3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	3. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุป เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

2. โจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมนอกกับมุมภายใน

1. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\angle BAF = 52^\circ$ และ $\angle AEC = 104^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\angle ECD = 128^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\angle BAF = 52^\circ$ และ $\angle AEC = 104^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle ECD = 128^\circ$

สิ่งที่สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก $\overline{EH}$ ขนานกับ $\overline{AB}$ ซึ่งจะทำให้ $\overline{EH} \parallel \overline{CD}$ ด้วย

พิสูจน์

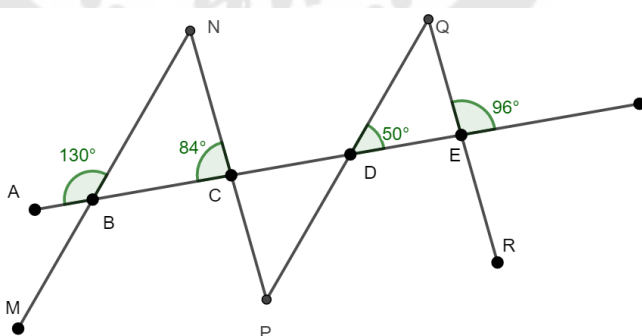
ข้อความ	เหตุผล
1. $\overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{AB}$	1. จากการสร้าง
2. $\overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{CD}$	2. จากการสร้าง
3. $\angle AEH = 52^\circ$	3. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
4. $\angle AEC = \angle AEH + \angle HEC$	4. กำหนดให้
5. $\angle HEC = 52^\circ$	5. จากข้อ 3 และ ข้อ 4 โดย $\angle AEH + \angle HEC = \angle AEC$
6. $\angle HEC + \angle ECD = 180^\circ$	6. ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°
7. $\angle ECD = 128^\circ$	7. จากข้อ 5 และข้อ 6

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\angle BAF = 52^\circ$ และ $\angle AEC = 104^\circ$ ดังรูป แล้ว

$$\angle ECD = 128^\circ$$

2. จากรูป กำหนดให้ $\angle ABN = 130^\circ$, $\angle BCN = 84^\circ$, $\angle QDE = 50^\circ$ และ $\angle QEF = 96^\circ$ จง

พิสูจน์ว่า $\overrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{NP}$ ขนานกับ $\overrightarrow{QR}$



สิ่งที่กำหนดให้

$$\angle ABN = 130^\circ, \angle BCN = 84^\circ, \angle QDE = 50^\circ \text{ และ } \angle QEF = 96^\circ$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

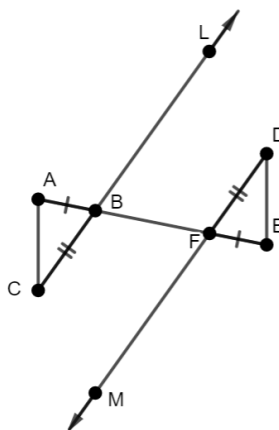
$$\overrightarrow{MN} \text{ ขนานกับ } \overrightarrow{PQ} \text{ และ } \overrightarrow{NP} \text{ ขนานกับ } \overrightarrow{QR}$$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $ABN + NBC = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมตรง
2. $NBC = 50^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $ABN = 130^\circ$
3. $QDE = NBC$	3. จากข้อ 2 และ $QDE = 50^\circ$
4. $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$	4. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน
5. $BCN + NCD = 180^\circ$	5. ขนาดของมุมตรง
6. $NCD = 96^\circ$	6. จากข้อ 5 และ $BCN = 84^\circ$
7. $QEF = NCD$	7. จากข้อ 6 และ $QEF = 96^\circ$
8. $\overline{NP} \parallel \overline{QR}$	8. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$ ดังรูป แล้ว $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$

3. จากรูป กำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$



สิ่งที่กำหนดให้ $\overrightarrow{CL} \parallel \overrightarrow{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$
 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$
 พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle B = \angle F$	1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
2. $\angle B = \angle C$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. $\angle F = \angle C$	3. จากข้อ 1 และข้อ 2
4. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$	4. ค.ม.ด
5. $\angle BAC = \angle FED$	5. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน
6. $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$	6. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overrightarrow{CL} \parallel \overrightarrow{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ดังรูป แล้ว $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

3. สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้

- 3.1 แฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra แสดงรูปมุมภายนอก มุมภายใน และมุมภายนอก และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด ประกอบการทบทวน
- 3.2 ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน
- 3.3 แฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน ประกอบใบกิจกรรมที่ 3

4. กิจกรรมการเรียนรู้

- 4.1 ชี้นำ (10 นาที)

4.1.1 เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานสมบัติที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้งเส้นขนานและมุมแย้ง ครูใช้คำถามกระตุ้นดังนี้

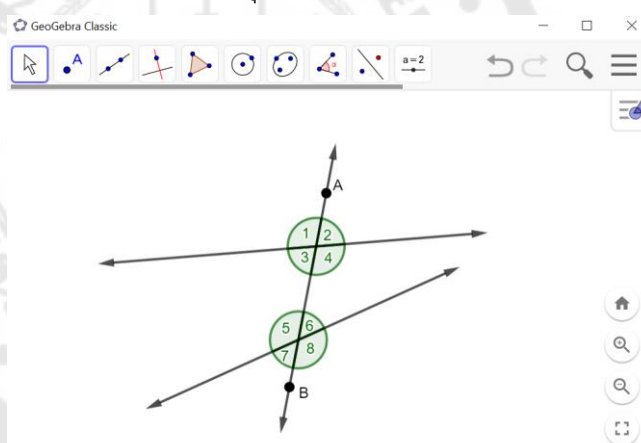
1) สมบัติที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดคืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180°]

2) ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมแย้ง คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน]

4.1.2 เพื่อทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับคำว่า มุมภายนอกและมุมภายใน ครูแสดงรูปในโปรแกรม GeoGebra พร้อมใช้คำถามกระตุ้นดังนี้



1) จากรูป มุมภายนอกคือมุมใดบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ และ $\hat{8}$ คือมุมภายนอก]

2) มุมภายในคือมุมใดบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ และ $\hat{6}$ คือมุมภายใน]

4.1.3 ครูอธิบายนักเรียนว่า จากรูปข้างต้น เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{5}$ ว่าเป็น มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดและในทำนองเดียวกัน จะเรียก $\hat{2}$ และ $\hat{6}$, $\hat{7}$ และ $\hat{3}$, $\hat{8}$ และ $\hat{4}$ แต่ละคู่ว่าเป็น มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

4.1.4 ครูบอกกับนักเรียนว่า ในบทเรียนที่ผ่านมา นอกจากที่เราสามารถตรวจสอบการขนานกันของเส้นตรงจากการพิจารณามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด หรือมุมแย้งแล้ว เรายังสามารถตรวจสอบการขนานกันของเส้นตรง จากการพิจารณาจากมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดได้อีก ซึ่งในบทเรียนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับมุมภายนอกกับมุมภายใน และพิสูจน์ทฤษฎีบทและโจทย์คณิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

4.2 ชั้นสอน (85 นาที)

4.2.1 เพื่อให้ นักเรียนได้เรียนรู้และได้พิสูจน์เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน ครูแจกใบกิจกรรมที่ 3 และให้นักเรียนทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในใบกิจกรรมที่ 3 ส่วนที่ 1 ดังนี้

ส่วนที่ 1

โจทย์ข้อที่ 1

1) นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ โดยมี $\overline{IJ}$ เป็นเส้นตัดที่ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ จากนั้นเลื่อนจุด A, B, C, D, E หรือ F สังเกตความเปลี่ยนแปลง บันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น ผลที่ได้จากการสังเกต

2) นักเรียนร่วมพูดคุยปรึกษากันว่า จากข้อ 1 จะได้ข้อความคาดการณ์ของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด เป็นอย่างไร

3) ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด แล้วสรุปข้อความคาดการณ์ที่ได้อีกครั้ง

4)) นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overline{AB}$ และเส้นตัด $\overline{IJ}$ ที่ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด E จากนั้นสร้าง $\overline{CD}$ ตัด $\overline{IJ}$ ที่จุด F โดยกำหนดให้ $\angle AEI = \angle CFE$ จากนั้นเลื่อนจุด A, B, E หรือ F หลังการเลื่อนจุด ให้นักเรียนสร้างเส้นตรงเส้นใหม่ที่ขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด F บันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น ผลที่ได้จากการสังเกต

5) นักเรียนร่วมพูดคุยปรึกษากันว่า จากข้อ 3 จะได้ข้อความคาดการณ์ของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด เป็นอย่างไร

6) ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด แล้วสรุปข้อความคาดการณ์ที่ได้อีกครั้ง

7) ครูถามนักเรียนว่า จากข้อ 2 และข้อ 4 จะได้ข้อสรุปของข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็นอย่างไร

[เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน]

8) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงานในข้อ 1 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\angle AEI = \angle CFE$, $\angle IEB = \angle EFD$, $\angle CFJ = \angle AEF$ และ $\angle DFJ = \angle BEF$]

จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 6 ในใบกิจกรรม

9) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

10) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

11) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงานในข้อ 3 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overleftrightarrow{IJ}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ ทำให้ $\angle AEI = \angle CFE$]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$]

จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 8 ในใบกิจกรรม

12) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

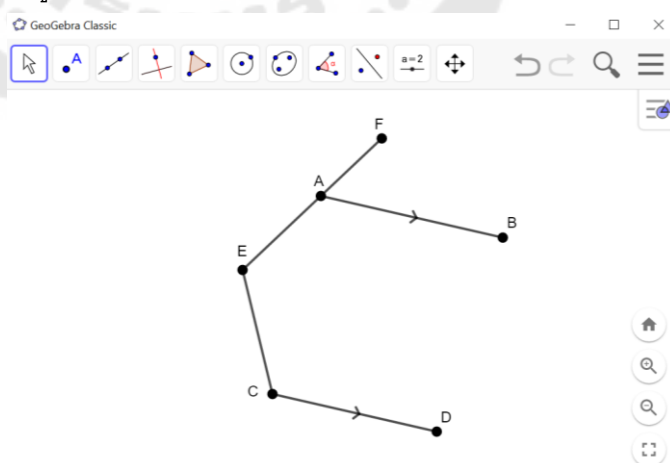
13) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

4.2.2 เพื่อสำรวจข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกและมุมภายใน ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ส่วนที่ 2 ดังนี้

ส่วนที่ 2

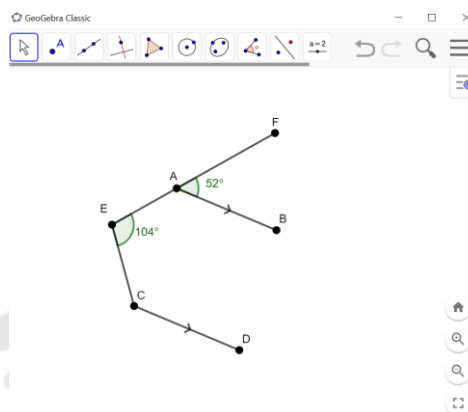
โจทย์ข้อที่ 1

1) นักเรียนเปิดแฟ้ม 3E01.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จากนั้นสำรวจขนาดของ $\angle AEC, \angle ECD$ และ $\angle BAF$ โดยการเลื่อนจุด A, B, C, E หรือ F แล้วบันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น ผลที่ได้จากการสังเกต ตอบคำถามเกี่ยวกับความรู้ที่ใช้ในการพิสูจน์ และสิ่งที่ควรสร้างเพิ่มในการพิสูจน์



2) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วเติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 1 ในใบกิจกรรม

3) นักเรียนเปิดแฟ้ม 3E02.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $BAF = 52^\circ$ และ $AEC = 104^\circ$ ดังรูป และถามนักเรียนว่า จากข้อมูลที่กำหนดให้ นักเรียนจะได้ข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของ ECD เป็นเท่าไร



[นักเรียนควรตอบว่า $ECD = 128^\circ$]

4) นักเรียนเลื่อนจุด A, B, C หรือ E แล้ววัดขนาดของ ECD ว่าเป็นเท่าไรอีกครั้ง แล้วบันทึกขนาดของ ECD ข้อ 2 ในใบกิจกรรม

5) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ว่า “เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $BAF = 52^\circ$ และ $AEC = 104^\circ$ ดังรูปข้างต้น จะได้ $ECD = 128^\circ$ ”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้ คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $BAF = 52^\circ$ และ $AEC = 104^\circ$]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $ECD = 128^\circ$]

(3) ควรใช้ความรู้เรื่องใดในการพิสูจน์

[นักเรียนควรตอบว่า เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน]

(4) ควรสร้างสิ่งใดเพิ่มในการพิสูจน์

[นักเรียนควรตอบว่า ลาก $\overline{EH}$ ให้ขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด E ซึ่งจะทำให้ $\overline{EH} \parallel \overline{CD}$ ด้วย]

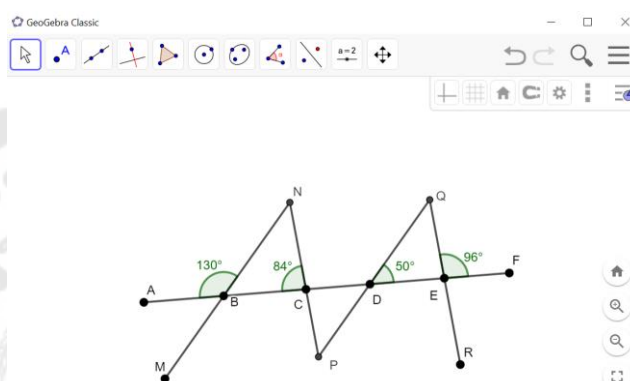
จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 3 ในใบกิจกรรม

6) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

7) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

โจทย์ข้อที่ 2

8) นักเรียนเปิดแฟ้ม 3E04.ggb ซึ่งกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$ ดังรูป เลื่อนจุด A, B, C, D, E หรือ F จากนั้นสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{MN}$ ที่จุด D และสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{NP}$ ที่จุด E เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น และผลที่ได้จากการสังเกต



9) ครูถามนักเรียนว่า เราสามารถสรุปข้อความคาดการณ์ เมื่อกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$ ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$]

10) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ว่า “เมื่อกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$ ดังรูปข้างต้น จะได้ $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$ ”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้ คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$]

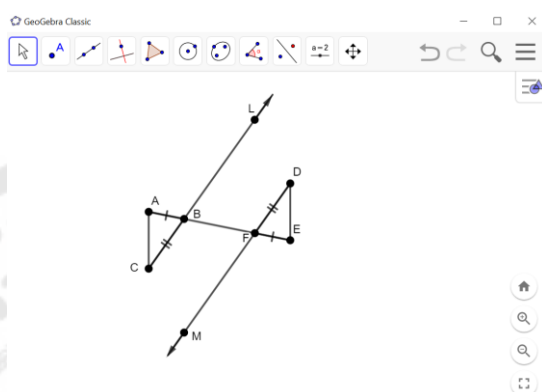
จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 2 ในใบกิจกรรม

11) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

12) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

โจทย์ข้อที่ 3

13) นักเรียนเปิดแฟ้ม 3E05.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ดังรูป จากนั้นเลื่อนจุด A และสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D บันทึกผลลงในตาราง เขียนเงื่อนไขเริ่มต้น และผลที่ได้จากการสังเกต



14) ครูถามนักเรียนว่า เราสามารถสรุปข้อความคาดการณ์ เมื่อกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$]

15) นักเรียนสำรวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ว่า “เมื่อกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ดังรูปข้างต้น จะได้ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ ”

(1) ในแฟ้มงานนี้ สิ่งที่กำหนดให้คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$]

(2) สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$]

จากนั้น เติมคำตอบและระบุเหตุผลลงในช่องว่างข้อ 2 ในใบกิจกรรม

16) นักเรียนวาดรูปประกอบจากโปรแกรม GeoGebra พร้อมลงมือพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ด้วยตนเอง จากนั้นแลกเปลี่ยนการพิสูจน์กับเพื่อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าพบข้อผิดพลาดให้แก้ไขให้ถูกต้อง และบันทึกข้อผิดพลาดการพิสูจน์ของเพื่อน (ถ้ามี)

17) ครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอการพิสูจน์ข้อความดังกล่าว และตรวจสอบความถูกต้องร่วมกับนักเรียนอีกครั้ง

4.3 ขั้นสรุป (5 นาที)

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ที่ได้ในคาบเรียนนี้ โดยการถามนักเรียนว่าทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในคืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งเส้นตรงคู่ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน]

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
1. พิสูจน์ทฤษฎีบทและโจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในได้	วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องในการเขียนพิสูจน์ในใบกิจกรรม เครื่องมือวัดผล : ใบกิจกรรมที่ 3 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน	เกณฑ์การให้คะแนน : พิจารณาจากเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง เส้นขนาน ดังแนบไว้ท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60% ของคะแนนรวมขึ้นไปถือว่าผ่าน

ตารางแสดงเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง เส้นขนาน

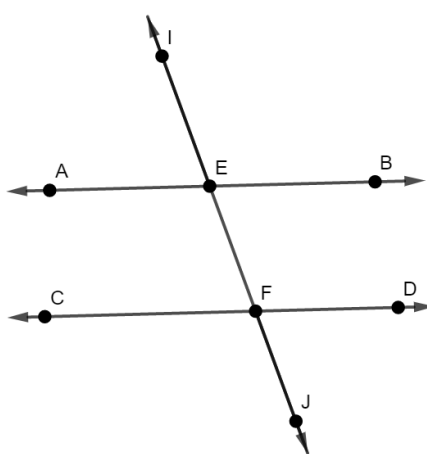
ด้าน	ระดับคะแนน		
	2	1	0
ด้านการทำความเข้าใจปัญหา	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องได้พิสูจน์ได้ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของสิ่งที่ต้องระบุ แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ น้อยกว่าครั้งหนึ่ง หรือไม่ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องพิสูจน์
ด้านการเขียนพิสูจน์	เขียนข้อความ ประกอบการพิสูจน์ได้ อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ ผลสรุปได้อย่างถูกต้อง ทั้งหมด	เขียนข้อความ ประกอบการพิสูจน์ได้ อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ ผลสรุปได้อย่างถูกต้อง ตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถเขียน ข้อความประกอบการ พิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับ ขั้นตอน จนนำไปสู่ ผลสรุป หรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
ด้านการอ้างอิงหรือ การนำเครื่องมือมาใช้ ในการพิสูจน์	อ้างบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่ โจทย์กำหนดให้ ประกอบแต่ละข้อความ ได้ถูกต้องทั้งหมด	อ้างบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่ โจทย์กำหนดให้ ประกอบแต่ละข้อความ ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่ง ขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้อง ทั้งหมด	ไม่สามารถอ้างบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์ กำหนดให้ประกอบแต่ ละข้อความได้ หรือ ถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
ด้านการใช้ภาษาหรือ สัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ในการ พิสูจน์	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ได้ ถูกต้องทั้งหมด	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ได้ ถูกต้องครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถใช้ภาษาหรือ สัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง หรือถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง

กิจกรรมที่ 3 เรื่อง เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

ส่วนที่ 1

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อสำรวจและพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

1. เปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ โดยมี $\overline{IJ}$ เป็นเส้นตัดที่ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ จากนั้นเลื่อนจุด A, B, C, D, E หรือ F สังเกตความเปลี่ยนแปลง และบันทึกผลลงในตาราง และตอบคำถามต่อไปนี้



ครั้งที่	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่ที่ 1		มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่ที่ 2		มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่ที่ 3		มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่ที่ 4	
	ขนาดของ AEI	ขนาดของ CFE	ขนาดของ IEB	ขนาดของ EFD	ขนาดของ CFJ	ขนาดของ AEF	ขนาดของ DFJ	ขนาดของ BEF
1								
2								
3								
4								
5								

เงื่อนไขเริ่มต้น $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ โดยมี $\overline{IJ}$ เป็นเส้นตัดที่ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ

ผลที่ได้จากการสังเกต 1) $AEI = CFE$

2) $IEB = EFD$

3) $CFJ = AEF$ และ

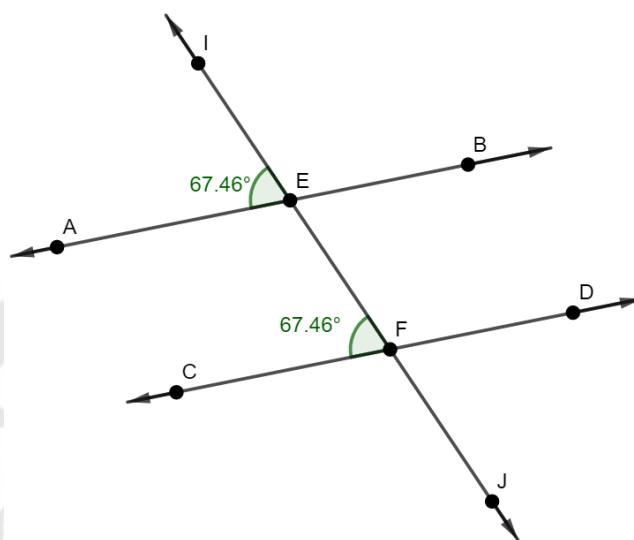
4) $DFJ = BEF$

2. จากข้อ 1 ข้อความคาดการณ์ของความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด เป็นอย่างไร

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน



3. เปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วสร้าง $\overline{AB}$ และเส้นตัด $\overleftrightarrow{IJ}$ ที่ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด E จากนั้นสร้าง $\overline{CD}$ ตัด $\overleftrightarrow{IJ}$ ที่จุด F โดยกำหนดให้ $\angle AEI = \angle CFE$ ดังรูป (เป็นตัวอย่าง) จากนั้นเลื่อนจุด A, B, E หรือ F หลังการเลื่อนจุด ให้นักเรียนสร้างเส้นตรงเส้นใหม่ที่ขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด F บันทึกผลลงในตาราง และตอบคำถามต่อไปนี้

[illegible]

เงื่อนไขเริ่มต้น $AEI = CFE$, $IEB = EFD$, $CFJ = AEF$ และ $DFJ = BEF$

ผลที่ได้จากการสังเกต $\overline{CD}$ กับเส้นตรงที่สร้างใหม่เป็นเส้นตรงเดียวกัน / ทับกัน

4. จากข้อ 3 ข้อความคาดการณ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็นอย่างไร

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

5. จากข้อ 2 และข้อ 4 จะได้ข้อสรุปของข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็นอย่างไร

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

6. สรรวจองค์ประกอบในแฟ้มงานในข้อ 1 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน”

สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AEI = CFE$, $IEB = EFD$, $CFJ = AEF$ และ $DFJ = BEF$

1) $BEF = \underline{\hspace{2cm}}$ $CFE = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $BEF = CFE$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

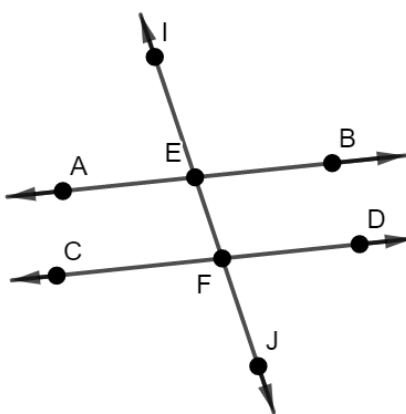
3) $AEI = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $AEI = BEF$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

5) $AEI = CFE$ เพราะจากข้อ 2 และข้อ 4

7. จงพิสูจน์ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน”

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{IJ}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และ F

ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$\angle AEI = \angle CFE$, $\angle IEB = \angle EFD$, $\angle CFJ = \angle AEF$ และ

$\angle DFJ = \angle BEF$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle BEF = \angle CFE$	1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
2. $\angle AEI = \angle BEF$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. $\angle AEI = \angle CFE$	3. จากข้อ 1 และข้อ 2

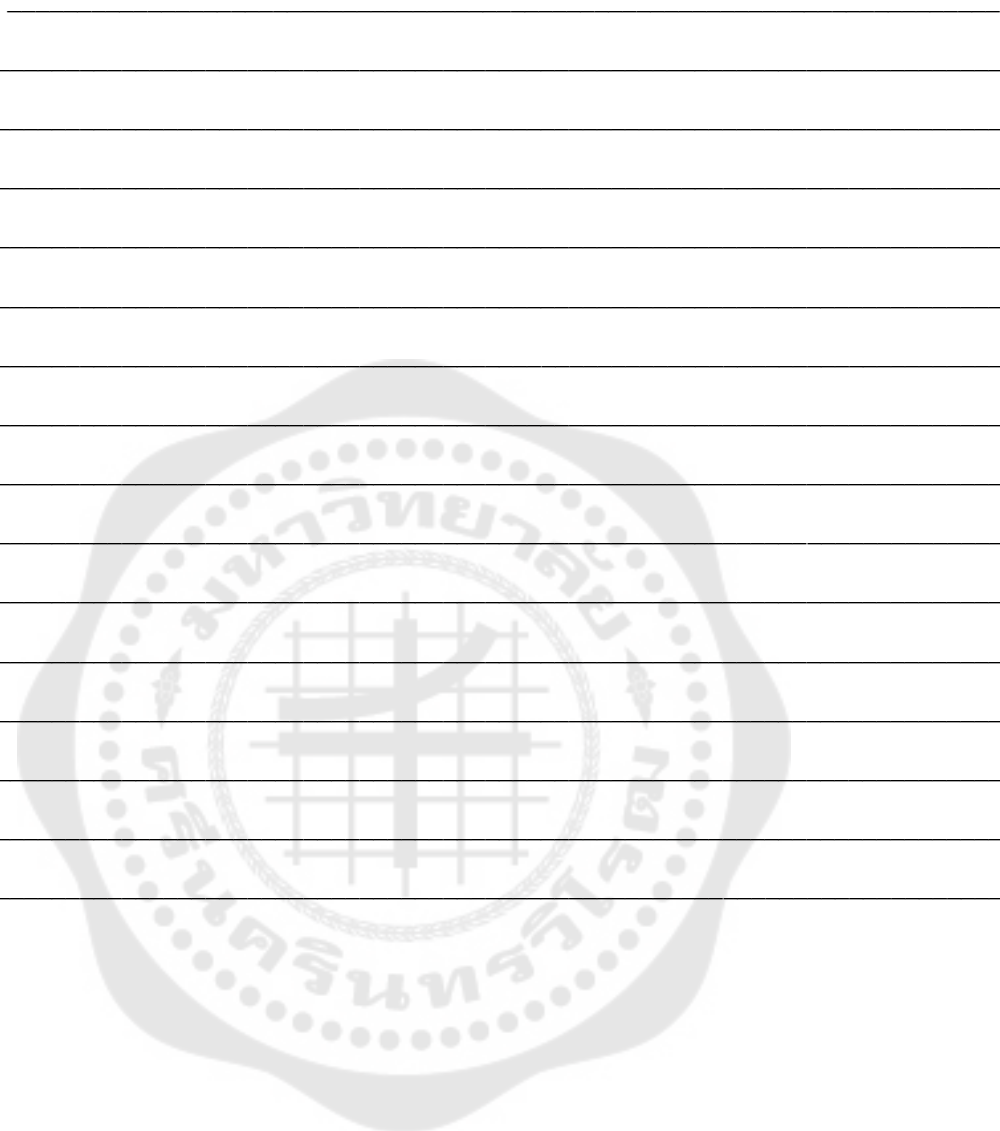
ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\angle IEB = \angle EFD$, $\angle CFJ = \angle AEF$ และ

$\angle DFJ = \angle BEF$

สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายใน
ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน



ข้อผิดพลาดที่พบในการพิสูจน์ของเพื่อน(ถ้ามี)



8. สำนักรวองค์ประกอบในแฟ้มงานในข้อ 3 แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน”

สิ่งที่กำหนดให้ $\overleftrightarrow{IJ}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ ทำให้

$$AEI = CFE$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

1) $AEI = \underline{\hspace{2cm}}$ $AEF = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $AEI + AEF = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมตรงเท่ากับ 180°

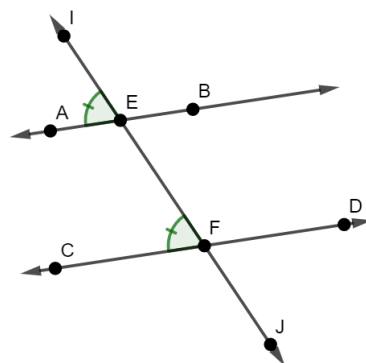
3) $CFE = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $CFE + AEF = 180^\circ$ เพราะจากข้อ 2 และ $AEI = CFE$

5) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ เพราะถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

9. จงพิสูจน์ว่า “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน”

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้ $\overleftrightarrow{IJ}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ ทำให้

$$AEI = CFE$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AEI + AEF = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมตรง
2. $CFE + AEF = 180^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $AEI = CFE$
3. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	3. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

ข้อผิดพลาดที่พบในการพิสูจน์ของเพื่อน(ถ้ามี)

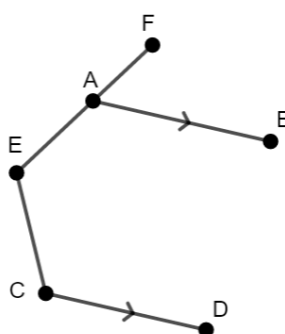


ส่วนที่ 2

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้เพื่อสำรวจข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โจทย์คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

โจทย์ข้อที่ 1

1. เปิดแฟ้ม 3E01.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ดังรูป จากนั้นสำรวจขนาดของ $\angle AEC, \angle ECD$ และ $\angle BAF$ โดยการเลื่อนจุด A, B, C, E หรือ F แล้วบันทึกผลลงในตาราง และตอบคำถามต่อไปนี้



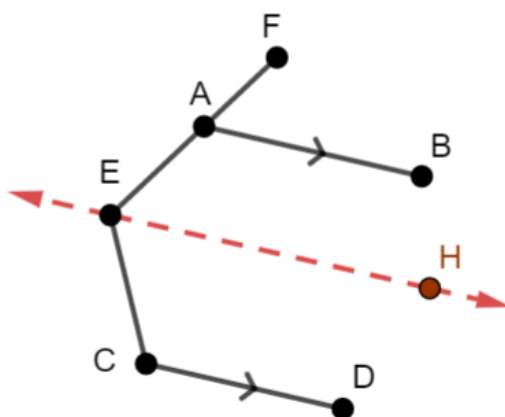
ครั้งที่	ขนาดของ $\angle AEC$	ขนาดของ $\angle ECD$	ขนาดของ $\angle BAF$	ค่าของ $\angle AEC + \angle ECD - \angle BAF$
1				
2				
3				
4				
5				

เงื่อนไขเริ่มต้น $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

ผลที่ได้จากการสังเกต $\angle AEC + \angle ECD - \angle BAF = 180^\circ$

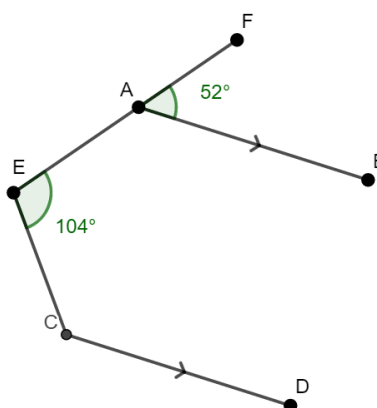
ควรใช้ความรู้เรื่องใดในการพิสูจน์ผลที่ได้จากการสังเกต เส้นขนานและมุม
ภายนอกกับมุมภายใน

ควรสร้างสิ่งใดเพิ่มในการพิสูจน์ ลาก $\overline{EH}$ ให้ขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด E ดังรูป



- 1) $BAF = \underline{\hspace{1cm}}$ $AEH = \underline{\hspace{1cm}}$
- 2) $BAF = AEH$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอก
และมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
- 3) $AEC = \underline{\hspace{1cm}}$ $HEC = \underline{\hspace{1cm}}$
- 4) $AEC = AEH + HEC$ เพราะกำหนดให้
- 5) $ECD = \underline{\hspace{1cm}}$
- 6) $HEC + ECD = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้น
ตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°
- 7) $HEC = 180^\circ - ECD$ เพราะจากข้อ 6
- 8) $AEC = BAF + HEC$ เพราะจากข้อ 2 และข้อ 4
- 9) $AEC = BAF + (180^\circ - ECD)$ เพราะจากข้อ 7 และข้อ 8
- 10) $AEC + ECD - BAF = 180^\circ$ เพราะจากข้อ 9

2. เปิดแฟ้ม 3E02.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\angle BAF = 52^\circ$ และ $\angle AEC = 104^\circ$ ดังรูป ให้นักเรียนทำตามคำสั่งและตอบคำถามดังนี้



1) นักเรียนคิดว่าขนาดของ $\angle ECD$ เป็นเท่าไร

ตอบ $\angle ECD = 128^\circ$

2) เลื่อนจุด A, B, C หรือ E แล้ววัดขนาดของ $\angle ECD$ ว่าเป็นเท่าไร อีกครั้ง แล้วบันทึกขนาดของ $\angle ECD$

ตอบ $\angle ECD = 128^\circ$

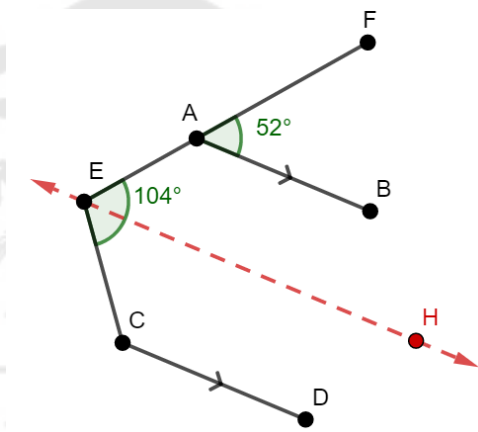
3. สำหรับองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์
ว่า “เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\angle BAF = 52^\circ$ และ $\angle AEC = 104^\circ$ ดังรูปข้างต้น จะได้
 $\angle ECD = 128^\circ$ ”

สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\angle BAF = 52^\circ$ และ $\angle AEC = 104^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle ECD = 128^\circ$

ควรใช้ความรู้เรื่องใดในการพิสูจน์ เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

ควรสร้างสิ่งใดเพิ่มในการพิสูจน์ ลาก $\overline{EH}$ ให้ขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด E ดังรูป ซึ่ง
จะทำให้ $\overline{EH} \parallel \overline{CD}$ ด้วย



1) $\angle AEH = 52^\circ$

2) $\angle BAF = \angle AEH$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอก
และมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

3) $\angle AEC = \angle AEH + \angle HEC$ เพราะกำหนดให้

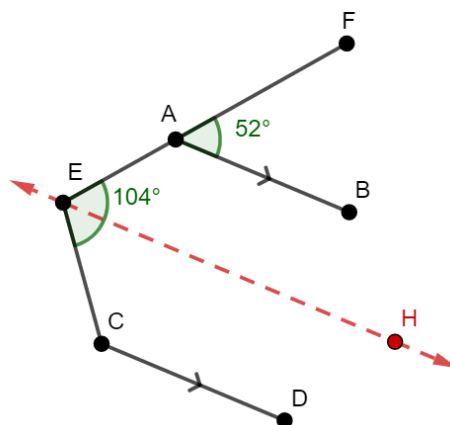
4) $\angle HEC = 52^\circ$ เพราะจากข้อ 4 และ $\angle AEC = 104^\circ$

5) $\angle HEC + \angle ECD = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้น
ตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°

6) $\angle ECD = 128^\circ$ เพราะจากข้อ 4 และข้อ 5

4. เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $BAF = 52^\circ$ และ $AEC = 104^\circ$ ดังรูปข้างต้น จงพิสูจน์
ว่า $ECD = 128^\circ$

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้
สิ่งที่ต้องพิสูจน์
สร้างเพื่อพิสูจน์
พิสูจน์

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $BAF = 52^\circ$ และ $AEC = 104^\circ$

$ECD = 128^\circ$

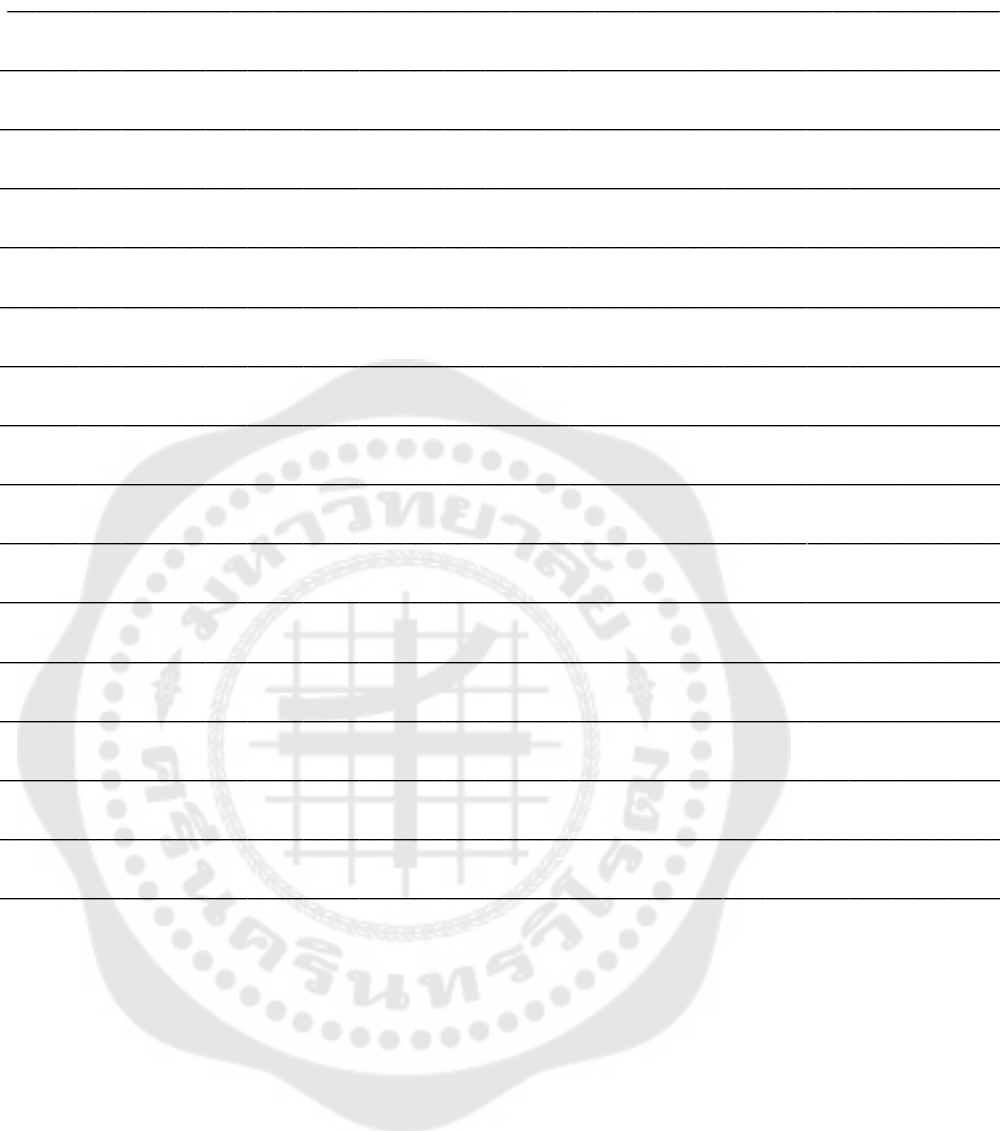
ลาก $\overline{EH}$ ขนานกับ $\overline{AB}$ ซึ่งจะทำให้ $\overline{EH} \parallel \overline{CD}$ ด้วย

ข้อความ	เหตุผล
1. $\overline{EH} \parallel \overline{AB}$	1. จากการสร้าง
2. $\overline{EH} \parallel \overline{CD}$	2. จากการสร้าง
3. $AEH = 52^\circ$	3. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
4. $AEC = AEH + HEC$	4. กำหนดให้
5. $HEC = 52^\circ$	5. จากข้อ 3 ข้อ 4 และ $AEC = 104^\circ$
6. $HEC + ECD = 180^\circ$	6. ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°
7. $ECD = 128^\circ$	7. จากข้อ 5 และข้อ 6

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $BAF = 52^\circ$ และ $AEC = 104^\circ$ ดังรูป แล้ว

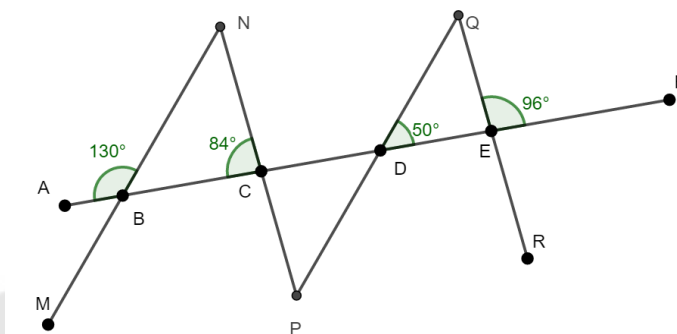
$ECD = 128^\circ$

ข้อผิดพลาดที่พบในการพิสูจน์ของเพื่อน(ถ้ามี)



โจทย์ข้อที่ 2

1. เปิดแฟ้ม 3E04.ggb ซึ่งกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$ ดังรูป เลื่อนจุด A, B, C, D, E หรือ F จากนั้นสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{MN}$ ที่จุด D และสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{NP}$ ที่จุด E บันทึกผลลงในตาราง และตอบคำถามต่อไปนี้



เงื่อนไขเริ่มต้น $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$

ผลที่ได้จากการสังเกต 1) $\overline{PQ}$ กับเส้นตรงที่สร้างใหม่ที่จุด D เป็นเส้นเดียวกัน/ทับกัน

และ

2) $\overline{QR}$ กับเส้นตรงที่สร้างใหม่ที่จุด E เป็นเส้นเดียวกัน/ทับกัน

สรุปข้อความคาดการณ์ เมื่อกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$ ได้ว่า $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$

2. สำนัวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ว่า “เมื่อกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$ ดังรูปข้างต้น จะได้ $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$ ”

สิ่งที่กำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$

1) $ABN + NBC = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมตรงเท่ากับ 180°

2) $NBC = 50^\circ$ เพราะจากข้อ 1 และ $ABN = 130^\circ$

3) $QDE = NBC$ เพราะจากข้อ 2 และ $QDE = 50^\circ$

4) $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ เพราะถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

5) $BCN + NCD = 180^\circ$ เพราะขนาดของมุมตรงเท่ากับ 180°

6) $NCD = 96^\circ$ เพราะจากข้อ 5 และ $BCN = 84^\circ$

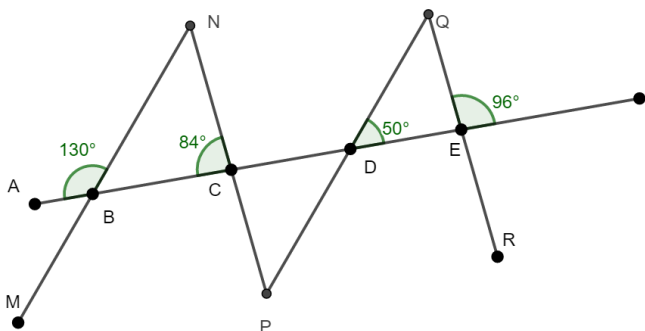
7) $QEF = NCD$ เพราะจากข้อ 6 และ $QEF = 96^\circ$

8) $\overline{NP} \parallel \overline{QR}$ เพราะถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

3. เมื่อกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$

ดังรูปข้างต้น จะได้ $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้

$ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ $QEF = 96^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $ABN + NBC = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมตรง
2. $NBC = 50^\circ$	2. จากข้อ 1 และ $ABN = 130^\circ$
3. $QDE = NBC$	3. จากข้อ 2 และ $QDE = 50^\circ$
4. $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$	4. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน
5. $BCN + NCD = 180^\circ$	5. ขนาดของมุมตรง
6. $NCD = 96^\circ$	6. จากข้อ 5 และ $BCN = 84^\circ$
7. $QEF = NCD$	7. จากข้อ 6 และ $QEF = 96^\circ$
8. $\overline{NP} \parallel \overline{QR}$	8. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $ABN = 130^\circ$, $BCN = 84^\circ$, $QDE = 50^\circ$ และ

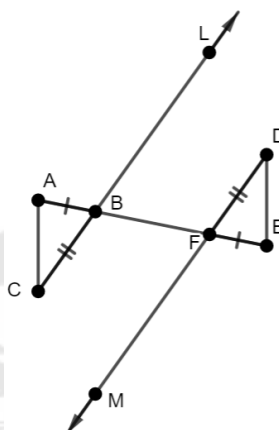
$QEF = 96^\circ$ ดังรูป แล้ว $\overline{MN}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{NP}$ ขนานกับ $\overline{QR}$

ข้อผิดพลาดที่พบในการพิสูจน์ของเพื่อน(ถ้ามี)



โจทย์ข้อที่ 3

1. เปิดแฟ้ม 3E05.ggb ซึ่งกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ดังรูป จากนั้นเลื่อนจุด A และสร้างเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D บันทึกผลลงในตาราง แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



ครั้งที่	ขนาดของ AB	ขนาดของ BC	เส้นตรงที่สร้างใหม่สัมพันธ์อย่างไรกับ $\overline{DE}$	
			ทับกัน	ไม่ทับกัน
1				
2				
3				
4				
5				

เงื่อนไขเริ่มต้น $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$

ผลที่ได้จากการสังเกต $\overline{DE}$ กับเส้นตรงที่สร้างใหม่ทับกัน

สรุปข้อความคาดการณ์ เมื่อกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ได้ว่า

$$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$$

2. สำนัวจองค์ประกอบในแฟ้มงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ว่า
เมื่อกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ดังรูปข้างต้น จะได้ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

1) $\angle B = \angle F$ $\angle DFE = \angle BCF$

2) $\angle B = \angle F$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอก
และมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

3) $\angle B = \angle F$

4) $\angle B = \angle F$ เพราะถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

5) $\angle DFE = \angle BCF$ เพราะจากข้อ 2 และข้อ 4

6) $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ เพราะ ด.ม.ด

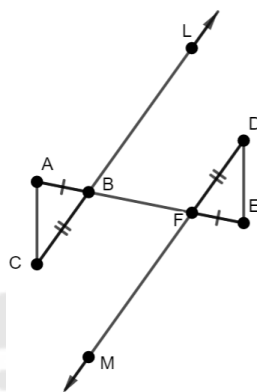
7) $\angle BAC = \angle FED$

8) $\angle BAC = \angle FED$ เพราะมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
จะมีขนาดเท่ากัน

9) $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ เพราะถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

3. เมื่อกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ดังรูปข้างต้น จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

รูปประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$
 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$
 พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle LBF = \angle DFE$	1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน
2. $\angle LBF = \angle ABC$	2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. $\angle DFE = \angle ABC$	3. จากข้อ 1 และข้อ 2
4. $\triangle ABC \cong \triangle EFD$	4. ค.ม.ด
5. $\angle BAC = \angle DEF$	5. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน
6. $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$	6. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

สรุปได้ว่า เมื่อกำหนดให้ $\overline{CL} \parallel \overline{DM}$, $AB = EF$ และ $BC = FD$ ดังรูป แล้ว

$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

ข้อผิดพลาดที่พบในการพิสูจน์ของเพื่อน(ถ้ามี)



ภาคผนวก ง

- 1) แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์
เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
- 2) แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

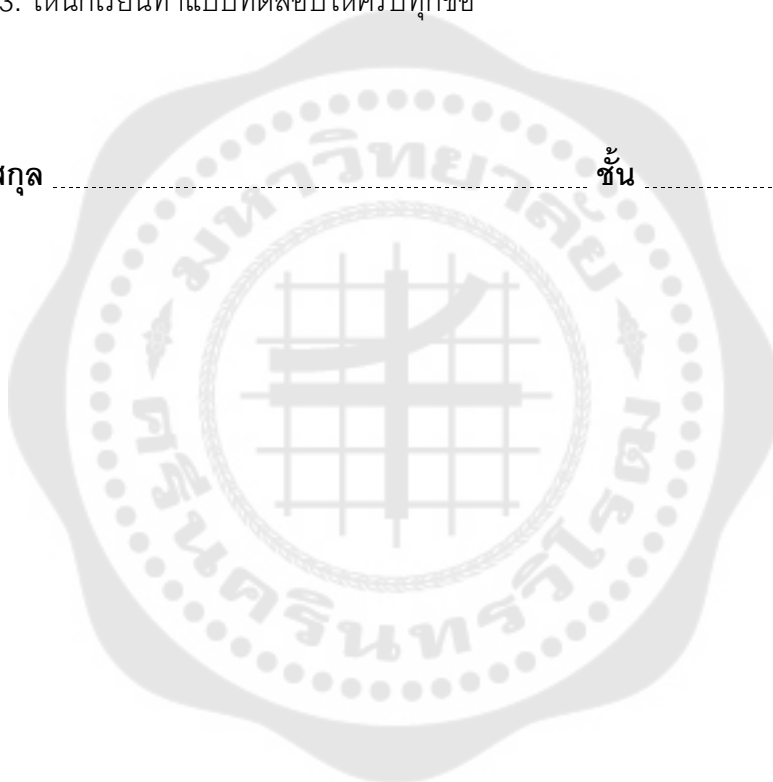
**แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์
เรื่องเส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบอัตนัย 8 ข้อ

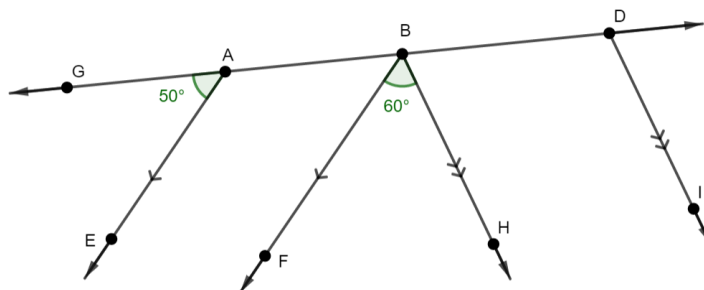
คำสั่ง ในการทำแบบทดสอบให้นักเรียนดำเนินการ ดังนี้

1. ให้นักเรียนเขียนชื่อ – สกุล ชั้น และเลขที่ ลงใน**แบบทดสอบ**ให้ชัดเจน
2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียดใน**แบบทดสอบ**ให้ถูกต้อง
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบให้ครบทุกข้อ

ชื่อ – สกุล ชั้น เลขที่



1. จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BH} \parallel \overrightarrow{DI}$, $\angle GAE = 50^\circ$ และ $\angle FBH = 60^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\angle BDI = 110^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้

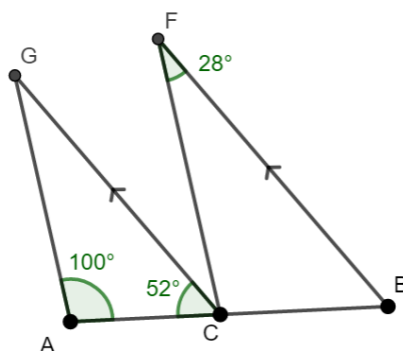
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

2. จากรูป กำหนดให้ $\overline{CG} \parallel \overline{BF}$, $\angle GAC = 100^\circ$, $\angle ACG = 52^\circ$ และ $\angle CFB = 28^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AG} \parallel \overline{CF}$



สิ่งที่กำหนดให้

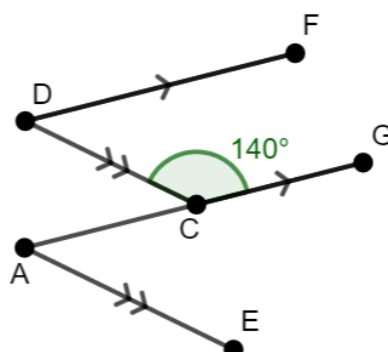
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

3. จากรูป กำหนดให้ $\overline{DF} \parallel \overline{CG}$, $\overline{DC} \parallel \overline{AE}$ และ $\angle DCG = 140^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\angle CAE = 40^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้

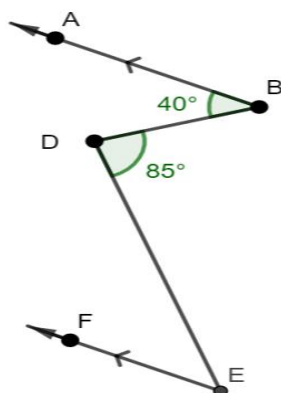
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

4. จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{EF}$, $\angle DBA = 40^\circ$ และ $\angle BDE = 85^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\angle FED = 45^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

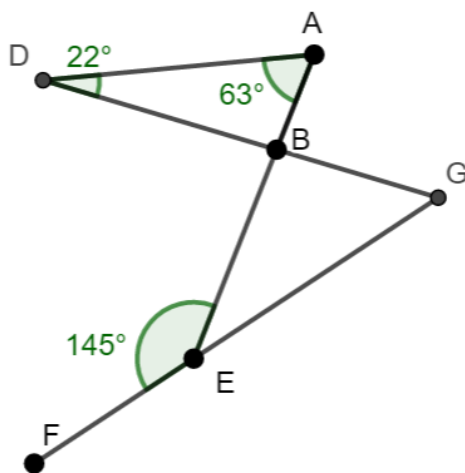
สิ่งที่สร้างเพื่อพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

5. จากรูป กำหนดให้ $ADB = 22^\circ$, $DAB = 63^\circ$ และ $FEB = 145^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $BGE = 50^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้

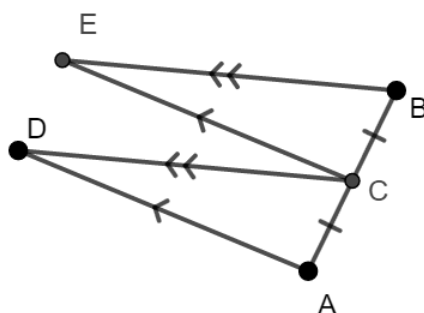
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

6. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ และ $AC = CB$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ADC \cong \triangle CEB$



สิ่งที่กำหนดให้

.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

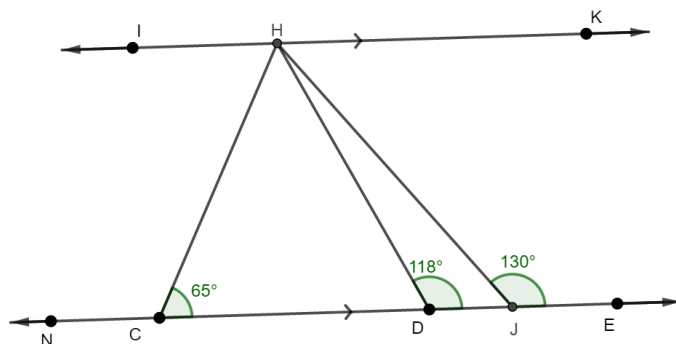
.....

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

7. จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{IK} \parallel \overrightarrow{NE}$, $\angle HCD = 65^\circ$, $\angle HDJ = 118^\circ$ และ $\angle HJE = 130^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\angle IHC + \angle CHD + \angle DHJ = 130^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้

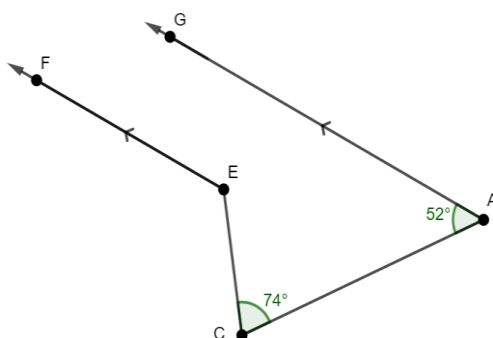
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

8. จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AG}$, $\angle ECA = 74^\circ$ และ $\angle CAG = 52^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\angle FEC = 126^\circ$



สิ่งที่กำหนดให้

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

สิ่งที่สร้างเพื่อพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

สรุป

แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงความคิดเห็นหรือความรู้สึกของ
นักเรียนที่มีต่อข้อความนั้นมากที่สุด

ลำดับ	ข้อความ	ระดับเจตคติ				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็น ด้วย	ไม่ แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
1	คณิตศาสตร์ฝึกให้ผู้เรียนตัดสินใจอย่าง มีเหตุผล					
2	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่กระตุ้นให้ฉัน ค้นหาความรู้อยู่เสมอ					
3	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญ ต่อการศึกษาต่อ					
4	ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่สามารถ นำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้					
5	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก ซับซ้อน และต้องใช้ความพยายามเป็นอย่างมาก					
6.	ทุกครั้งที่ฉันสามารถทำโจทย์ คณิตศาสตร์ได้ถูกต้องฉันรู้สึก ภาคภูมิใจในตนเอง					
7.	ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์					
8.	ฉันอยากเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทุกวัน					
9	ฉันรู้สึกสนุกในการทำโจทย์ คณิตศาสตร์					
10.	คณิตศาสตร์ทำให้ฉันเครียด					
11.	ฉันรู้สึกประหม่าเมื่อครูให้ออกไปทำ กิจกรรมคณิตศาสตร์หน้าห้องเรียน					
12	ฉันรู้สึกไม่มั่นใจเมื่อเข้าสอบวิชา คณิตศาสตร์					

ลำดับ	ข้อความ	ระดับเจตคติ				
		เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็น ด้วย	ไม่ แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
13.	ฉันไม่กล้าสบตาครูเวลาเรียน กลัวจะถูกถามคำถาม					
14.	ฉันขยันทำแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์					
15.	ครูคณิตศาสตร์มีความเป็นกันเองกับนักเรียน					
16.	ครูคณิตศาสตร์มีความคิดเป็นระบบและมีเหตุผล					
17.	วิชาคณิตศาสตร์ทำให้ฉันเสียสุขภาพจิต					
18.	ถ้าสามารถเลือกวิชาเรียนได้ฉันจะไม่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์					
19.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากกว่าวิชาอื่น					
20.	ฉันพยายามจะทำแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์อย่างเต็มความสามารถ					

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง เส้นขนาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. อาจารย์ ดร. ชีรศักดิ์ ฉลาดการณ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2. อาจารย์ เอนก จันทรวงูญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

3. อาจารย์ ภมรเมษย์ เลหาวิรุฬห์กุล

โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ

4. อาจารย์ นันทชัยพร ทาเกตุ

โรงเรียนราชโบริกานุเคราะห์

5. วีรศ กิตติวรากุล

นิสิตปริญญาเอก ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

นทรวิโรฒ

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล ปัญญาพร เชื้อมั่ง
วัน เดือน ปี เกิด 27 มีนาคม 2536
สถานที่เกิด กรุงเทพมหานคร
วุฒิการศึกษา พ.ศ. 2554 มัธยมศึกษาตอนปลาย
จากโรงเรียนศึกษานารีวิทยา กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2558 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และ
วิทยาการคอมพิวเตอร์ วิชาเอกคณิตศาสตร์
จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. 2563 การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ที่อยู่ปัจจุบัน 36 ซอยบางบอน 5 ซอย 20 เขตบางบอน แขวงบางบอน กรุงเทพมหานคร
10150