



การศึกษาคำรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้าง

ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA III STUDENTS'

CONCEPTUAL KNOWLEDGE AND PROOF ABILITIES ON CIRCLE VIA CONJECTURING

วีรศ กิตติวรากุล

บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2561

การศึกษาค้นคว้าเชิงมนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้าง
ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ปีการศึกษา 2561
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA III STUDENTS'
CONCEPTUAL KNOWLEDGE AND PROOF ABILITIES ON CIRCLE VIA
CONJECTURING AND PROVING METHOD WITH GEOGEBRA PROGRAM



A Thesis Submitted in partial Fulfillment of Requirements
for MASTER OF EDUCATION (Mathematics)
Faculty of Science Srinakharinwirot University

2018

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้าง
ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ของ

วีรศ กิตติวรากุล

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

..... ที่ปรึกษาหลัก ประธาน
(อาจารย์ ดร.ขวัญ เพ็ญชัย) (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ขวัญ เพ็ญชัย)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณนัทย์ ฤกษ์ฤทัยรัตน์)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสวและ)

ชื่อเรื่อง	การศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอน ด้วยวิธีการสร้าง ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
ผู้วิจัย	วีรศ กิตติวรากุล
ปริญญา	การศึกษามหาบัณฑิต
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. ชวัลญ เพ็ญชัย

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ 1) ศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra 2) ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จำนวน 6 แผน แผนละ 2 คาบ คาบละ 45 นาที การประเมินความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ประเมินจากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

คำสำคัญ : ความรู้เชิงมโนทัศน์, ความสามารถในการพิสูจน์, การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

Title	A STUDY OF MATHAYOMSUKSA III STUDENTS' CONCEPTUAL KNOWLEDGE AND PROOF ABILITIES ON CIRCLE VIA CONJECTURING AND PROVING METHOD WITH GEOGEBRA PROGRAM
Author	VEERIS KITTIVARAKUL
Degree	MASTER OF EDUCATION
Academic Year	2018
Thesis Advisor	Dr. Khawn Piasai

The purposes of this study were as follows: 1) to study conceptual knowledge of Mathayomsuksa III students on circle after being taught through the conjecturing and proving method with GeoGebra program; and 2) to study proof abilities of Mathayomsuksa III students on circle after being taught through the conjecturing and proving method with GeoGebra program. The participants were 40 Mathayomsuksa III students of Prasarnmit Demonstration School (Secondary) in Bangkok, Thailand, in the second semester of 2018 academic year. The participants were taught through 6 lesson plans of 90 minutes for each lesson plan. We created: 1) 6 lesson plans that allowed students to learn the topic via conjecturing and proving method with GeoGebra program; and 2) The conceptual knowledge and proof abilities test on the topic of circle.

The research findings revealed that: 1) after being taught by the conjecturing and proving method with GeoGebra program, over 60% of the participants had conceptual knowledge of circle scores that satisfied the criteria at a significant level of .05; and 2) after being taught by the conjecturing and proving method with GeoGebra program, over 60% of the participants had proof abilities on circle scores that satisfied the criteria at a significant level of .05.

Keyword : Conceptual Knowledge, Proof Abilities, Conjecturing and Proving

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดีเป็นเพราะผู้วิจัยได้รับความกรุณาอย่างยิ่งจาก อาจารย์ ดร. ชวัลภ เพ็ญชัย อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญาานิพนธ์หลัก ที่ให้คำแนะนำอย่างดียิ่งและเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินการวิจัย ตลอดจนเสียสละเวลาในการตรวจทานอย่างละเอียดจนปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทรงชัย อักษรคิด ที่ให้ความกรุณาเป็นประธานคณะกรรมการสอบปากเปล่า และขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณหทัย ฤกษ์ฤทัยรัตน์ และอาจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสมาและ ที่ให้ความกรุณาเป็นคณะกรรมการสอบปากเปล่า

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสมาและ อาจารย์เอนก จันทจรุญญ และอาจารย์สิทธิกร เรืองศรี ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย อีกทั้งให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่อการดำเนินการวิจัย ส่งผลให้ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการและคณะอาจารย์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง อาจารย์สิทธิกร เรืองศรี และอาจารย์เกษชฎา เพียรนุเคราะห์ชน ที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย และขอบคุณนักเรียนทุกคนที่ให้ความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

ขอบพระคุณพี่สกล ตั้งเก้าสกุล และรุ่นพี่ในสาขาวิชาทุกท่าน ที่คอยให้คำปรึกษาทั้งในเรื่องของแนวทางการทำปริญญาานิพนธ์ และการเรียนในระดับบัณฑิตศึกษา

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และบุคคลในครอบครัวทุกท่านที่ให้กำลังใจและเป็นแรงบันดาลใจให้ผู้วิจัยมีความมุ่งมั่นต่อการศึกษาโดยตลอด และขอบคุณเพื่อน ๆ สาขาวิชาทุกคน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง นางสาวนันท์ชพร ทาเกตู และนายทัศนพล วิเศษ ที่เป็นเพื่อนที่คอยให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจตลอดระยะเวลาการทำปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จไปได้ด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา พี่สาว น้องสาว และครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฎ
สารบัญรูปภาพ.....	ฐ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	3
ความสำคัญของการวิจัย.....	3
ขอบเขตของการวิจัย.....	4
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย.....	4
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย.....	4
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย.....	4
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย.....	4
ตัวแปรที่ศึกษา.....	4
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	5
กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	7
สมมติฐานในการวิจัย.....	7
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra.....	8

1.1 การนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน.....	8
1.2 ข้อควรคำนึงและข้อจำกัดของการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน.....	10
1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra ที่นำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน.....	12
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์.....	14
2.1 ความหมายของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์.....	14
2.2 รูปแบบของการสร้างข้อความคาดการณ์.....	15
2.3 ขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์.....	17
2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์.....	20
3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์.....	22
3.1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์.....	22
3.2 แนวทางการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์.....	23
3.3 แนวทางการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์.....	26
3.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์.....	29
4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์.....	31
4.1 ความหมายของการพิสูจน์.....	31
4.2 รูปแบบของการพิสูจน์.....	32
4.3 วิธีการพิสูจน์.....	33
4.4 แนวทางการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์.....	34
4.5 แนวทางการวัดความสามารถในการพิสูจน์.....	36
4.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์.....	39
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	42
1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง.....	42

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	42
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	42
2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	42
3. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	44
3.1 แผนการจัดการเรียนรู้และเพิ่มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้าง ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม	44
3.2. แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 3	53
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล	57
แบบแผนการวิจัย	57
การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล	58
5. การวิเคราะห์ข้อมูล	59
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	59
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	60
ตอนที่ 1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการ จัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra.....	60
ตอนที่ 2 ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับ การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra.....	63
บทที่ 5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	66
ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป	66
สรุปผลการวิจัย	69
อภิปรายผลการวิจัย	69

ข้อเสนอแนะ	72
บรรณานุกรม.....	76
ภาคผนวก.....	84
ประวัติผู้เขียน.....	179



สารบัญตาราง

หน้า

ตาราง 1	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของ ขวัญ เพ็ญชัย	36
ตาราง 2	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของ จำเริญ อนันตธรรมรส	38
ตาราง 3	แผนการจัดการเรียนรู้ที่จัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	46
ตาราง 4	เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม	55
ตาราง 5	แบบแผนการวิจัย (One-Group Posttest-Only Design)	58
ตาราง 6	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	61
ตาราง 7	ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด	62
ตาราง 8	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	64
ตาราง 9	ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด	65
ตาราง 10	ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	87

ตาราง 11 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัด
 ความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3..... 91

ตาราง 12 การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม 95

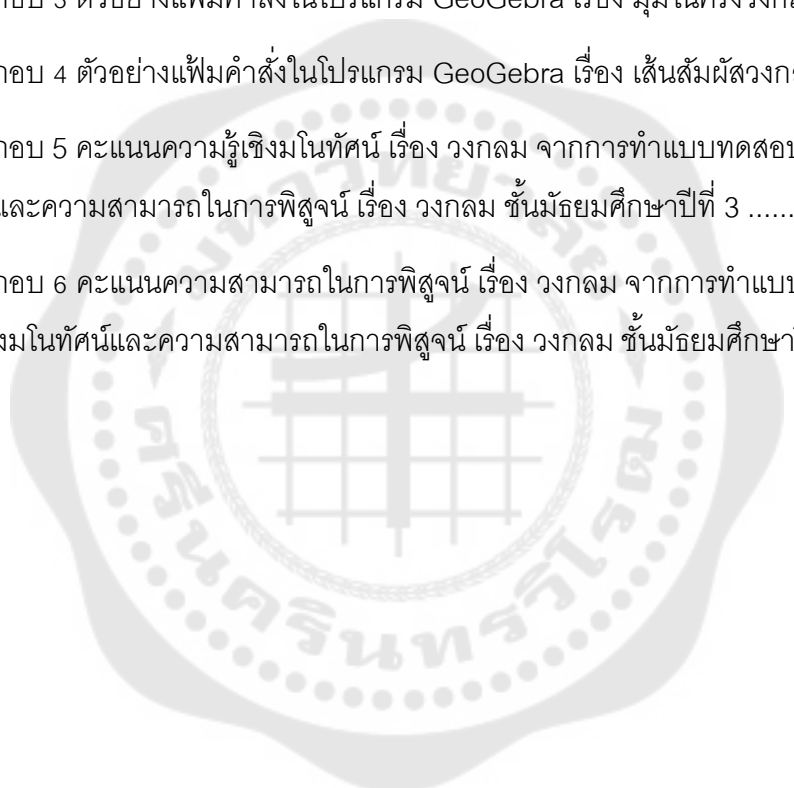
ตาราง 13 การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม
 97



สารบัญรูปภาพ

หน้า

ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย	7
ภาพประกอบ 2 กรอบแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	43
ภาพประกอบ 3 ตัวอย่างเพิ่มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม	52
ภาพประกอบ 4 ตัวอย่างเพิ่มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม.....	52
ภาพประกอบ 5 คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้ เชิง มโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	60
ภาพประกอบ 6 คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัด ความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.....	63



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

เรขาคณิต เป็นสาขาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญ เนื่องจากเนื้อหาเรขาคณิตสามารถนำไปช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ เช่น ตรรกศาสตร์ และพีชคณิต ด้วยวิธีการที่ง่ายและหาคำตอบได้รวดเร็ว และยังฝึกให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผล ทำงานอย่างมีระบบ ขั้นตอน รวมทั้งพัฒนาความสามารถด้านการค้นพบ (โกมล ไพศาล, 2540, p. 2) นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น ฟิสิกส์ ดาราศาสตร์ ศิลปะ พื้นฐานทางวิศวกรรมและสถาปัตยกรรม อีกทั้งยังมีความสำคัญในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น การออกแบบ การอ่านแผนที่ เป็นต้น (Sherard III, 1981, pp. 19-20)

ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตในประเทศไทย หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้กำหนดให้เรขาคณิตเป็นส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งระบุไว้ในสาระที่ 3 เมื่อพิจารณาถึงตัวชี้วัดช่วงชั้นของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้ระบุหนึ่งในคุณภาพของนักเรียนหลังจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไว้ว่า นักเรียนต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติทางเรขาคณิต และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551, pp. 56-60) จากตัวชี้วัดช่วงชั้นข้างต้น จะเห็นได้ว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศไทยได้ให้ความสำคัญกับการนำสมบัติหรือทฤษฎีบททางเรขาคณิตไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหา

วงกลมเป็นเนื้อหาหนึ่งที่สำคัญในเรขาคณิต เนื่องจากเป็นเนื้อหาที่นักเรียนได้ฝึกการนำสมบัติทางเรขาคณิตที่ได้เรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 มาใช้ประกอบการให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทหรือข้อความเกี่ยวกับวงกลมที่กำหนดให้ได้อย่างสมเหตุสมผล (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2554, p. 85) และในการเรียนรู้แต่ละสมบัติของวงกลม นักเรียนจะได้สำรวจและสร้างข้อความคาดการณ์ด้วยตนเอง ในประเทศไทย ปัญหาหนึ่งเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต คือนักเรียนส่วนหนึ่งประสบปัญหาในการนำทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิตไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ และไม่สามารถเริ่มต้นเขียนการพิสูจน์ได้ (ไตรรงค์ กล่ำบุตร, 2557, p. 2) เมื่อพิจารณาถึงสภาพการจัดการเรียนการสอน

เรขาคณิต ในห้องเรียนโดยทั่วไป พบว่า นักเรียนมักใช้วิธีการท่องจำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลม (ศราญลักษณ์ บุตรรัตน์, 2553, p. 3) ซึ่งอาจเกิดจากการจัดการเรียนการสอนของครูที่เน้นให้นักเรียนจดจำสูตร บทนิยาม หรือทฤษฎีบท เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ด้วยวิธีการที่แน่นอนวิธีเดียว สำหรับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ครูส่วนหนึ่งมักใช้การสอนโดยแสดงตัวอย่างบนกระดานพร้อมกับอธิบายให้นักเรียนฟังแล้วให้นักเรียนเลียนแบบหรือทำตามที่ครูสอน ซึ่งการสอนด้วยวิธีการดังกล่าวไม่ได้ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ของนักเรียน สิ่งนี้นักเรียนได้เรียนรู้เป็นเพียงความรู้และความจำเท่านั้น (สุภัทรา เกิดมงคล, 2550, pp. 1-2)

ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตแบบต่าง ๆ ที่ส่งเสริมกระบวนการคิดและให้เหตุผล พบว่า การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ (conjecturing and proving) เป็นวิธีการหนึ่งซึ่งมีลักษณะการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนใช้กระบวนการคิด การให้เหตุผล การค้นหาความสัมพันธ์บางอย่าง และการพิสูจน์เพื่อแสดงว่าความสัมพันธ์เหล่านั้นเป็นจริงในกรณีทั่วไป จนนำไปสู่ข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง (Morselli, 2006, p. 185) กระบวนการดังกล่าวนี้สำคัญอย่างยิ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ เนื่องจากนักเรียนได้เรียนรู้ทฤษฎีบททางเรขาคณิตผ่านประสบการณ์ของตนเอง ทำให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ และยังเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนใช้มโนทัศน์ที่ถูกต้องในการให้เหตุผลและการพิสูจน์สอดคล้องกับแอลลิเบิร์ตและโทมัส (Alibert & Thomas, 2002, p. 215) ที่กล่าวว่า การสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์เป็นสิ่งสำคัญที่ทำให้นักเรียนเกิดความชำนาญในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องต่าง ๆ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องนั้น ๆ นอกจากนี้งานวิจัยของเฟร์กิง (Frerking, 1994, pp. 97-99) และเหงียน (Nguyen, 2012, p. 1742) ซึ่งได้ทำการศึกษาการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ พบว่า การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการดังกล่าว ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ได้ดีขึ้น

นอกจากวิธีการจัดการเรียนการสอนแล้ว การนำเทคโนโลยีมาใช้เป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ช่วยส่งเสริมกระบวนการคิดและการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเป็นเทคโนโลยีหนึ่งที่มีลักษณะเป็นสื่อปฏิสัมพันธ์ ซึ่งช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างรูปเรขาคณิตได้ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ วัดขนาด สัดส่วนของส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุมและพื้นที่ได้อย่างรวดเร็ว และถูกต้อง (อุบล กลองกระโทก, 2554, pp. 9-10) จากคุณลักษณะของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตดังกล่าว ผู้วิจัยเชื่อว่า โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิด

กระบวนการคิดและการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผ่านการสร้างและสำรวจทางเรขาคณิต รวมทั้งสังเกตการเคลื่อนไหวของรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของปัญหาหลาย ๆ ตัวอย่าง ทำให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ และสามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว นอกจากนี้แฟรงค์และมาริโอตตี (Frank & Mariotti, 2010, p. 231) กล่าวว่า มีหลายงานวิจัยระบุว่าโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตช่วยให้นักเรียนค้นพบข้อความคาดการณ์ได้ง่ายยิ่งขึ้น และยังช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิดเพื่อนำไปสู่การอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

จากที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตโปรแกรมหนึ่ง เพื่อเป็นแนวทางหนึ่งในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต โดยใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. เพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
2. เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ความสำคัญของการวิจัย

1. เป็นแนวทางสำหรับครุคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. เป็นแนวทางสำหรับครุคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โดยสุ่มนักเรียน 1 ห้องเรียน จากนักเรียนทั้งหมด 6 ห้องเรียน โดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารภ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาเรื่อง วงกลม ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นจำนวน 12 คาบ ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

- | | |
|---|-------|
| 1. มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม | 4 คาบ |
| 2. คอร์ด | 4 คาบ |
| 3. เส้นสัมผัสวงกลม | 4 คาบ |

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ได้ทำการทดลองสอนจำนวน 12 คาบ คาบละ 45 นาที เวลาในการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 2 คาบ โดยใช้เวลาเรียนปกติ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม
2. ตัวแปรตาม ประกอบด้วย
 - 2.1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม
 - 2.2 ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับหลักการในเรื่อง วงกลม ได้แก่ บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับวงกลม รวมทั้งการนำหลักการในเรื่อง วงกลม ไปใช้ในการอธิบายเหตุผลประกอบขั้นตอนที่จะนำไปสู่คำตอบของสถานการณ์ต่าง ๆ ซึ่งประเมินผลจากคะแนนที่นักเรียนทำได้จากแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม

2. ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หมายถึง ความสามารถในการแสดงให้เห็นว่าข้อความคาดการณ์ หรือ ข้อความทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวงกลมเป็นจริง โดยแบ่งพิจารณาความสามารถเป็น 4 ด้าน ตามแนวคิดของ ขวัญ เพ็ญชัย (2547, p. 47) สไตล์เลียนเดส (Stylianides, 2007, p. 291) และ แมคโครน และมาร์ติน (McCrone & Martin, 2009, p. 205) และปรับให้เข้ากับเนื้อหาในการพิสูจน์สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ดังนี้

2.1 ความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหา คือ ความสามารถในการเขียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

2.2 ความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์ คือ ความสามารถในการเขียนข้อความที่สามารถนำไปสู่ผลสรุปว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริงได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนสมเหตุสมผล

2.3 ความสามารถในการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ คือ ความสามารถในการเขียนเหตุผลประกอบข้อความในข้อ 2.2 โดยใช้บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้อย่างถูกต้อง

2.4 ความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ คือ ความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

ซึ่งประเมินผลจากคะแนนที่นักเรียนทำได้จากแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

3. การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม หมายถึง การจัดการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนค้นพบความรู้เกี่ยวกับเรื่อง วงกลม ด้วยตนเองผ่านการสำรวจด้วยโปรแกรม GeoGebra ตามแนวทางของวิธีการสร้างข้อความการณและพิสูจน์ของมอร์เชลลี (Morselli, 2006, pp. 185-186) แคนาดาส ดิวโลเฟอ ฟิเกอรัส และรีด (Canadas, Deulofeu, Figueiras, & Reid, 2007, p. 64)

และ อัสตาวา วายัน บูดายาซา และจุนิเอติ (Astawa, Wayan, Budayasa, & Juniati, 2018, p. 19) ซึ่งแบ่งพิจารณาตามลักษณะของเนื้อหา ดังนี้

3.1 เนื้อหาในส่วนของที่เกี่ยวข้องกับบทนิยาม จะดำเนินการสอนตามขั้นตอนดังนี้

1) ขั้นสำรวจปัญหา เป็นขั้นที่ให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหา และร่วมกันสังเกต และเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกัน หรือสิ่งที่แตกต่างกันผ่านตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง

2) ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม เป็นขั้นที่ให้นักเรียนพิจารณาผลที่ได้จากขั้นสำรวจปัญหา เพื่อนำมาเขียนเป็นข้อความเชิงบทนิยาม

3) ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม เป็นขั้นที่ให้นักเรียนร่วมกันตรวจสอบ ความถูกต้องของข้อความเชิงบทนิยาม เมื่อได้ข้อความที่ถูกต้องแล้ว จึงสรุปเป็นบทนิยามต่อไป

3.2 เนื้อหาในส่วนของที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบท จะดำเนินการสอนตามขั้นตอนดังนี้

1) ขั้นสำรวจปัญหา เป็นขั้นที่ให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหา และร่วมกันค้นหา ความสัมพันธ์ ผ่านการสังเกตตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง

2) ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนตรวจสอบความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นจากการสำรวจปัญหาแล้วนำความสัมพันธ์ที่ได้ เขียนเป็นข้อความคาดการณ์

3) ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนค้นหาเหตุผลที่ทำให้ ข้อความคาดการณ์เป็นจริงผ่านการใช้คำถามกระตุ้นของครู โดยให้นักเรียนสังเกตผลจากแต่ละ ตัวอย่างที่บันทึก หรือวิเคราะห์ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในรูปภาพ เพื่อค้นหาทฤษฎีบท ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง จนนำไปสู่การพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ โดยครูใช้คำถามเพื่อกระตุ้นและชี้แนะ ให้นักเรียนได้แสดงเหตุผล

4) ขั้นการพิสูจน์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนได้ใช้ผลจากการสำรวจข้อความคาดการณ์ มาเรียบเรียงเขียนแสดงการพิสูจน์ โดยนักเรียนจะต้องระบุสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องพิสูจน์ และแสดงการพิสูจน์โดยมีการอ้างเหตุผลของแต่ละข้อความด้วยบทนิยาม ทฤษฎีบทที่ได้เรียนมาแล้ว หรือ สิ่งที่เกี่ยวข้องที่กำหนดให้ประกอบ จากนั้นจึงเขียนสรุปการพิสูจน์ โดยใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ให้ถูกต้อง

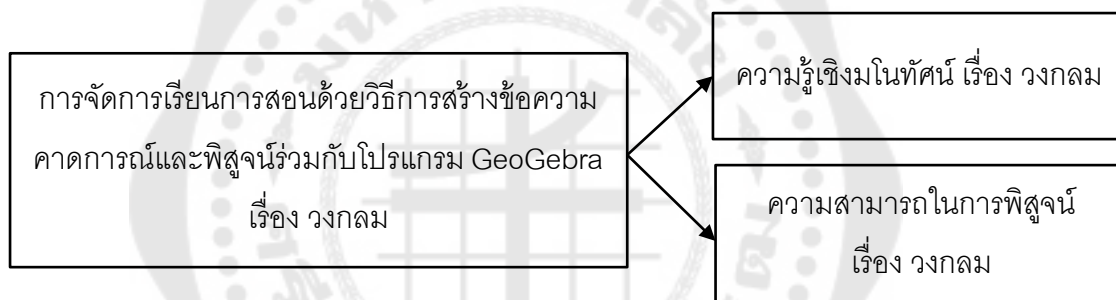
4. แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หมายถึง แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบความรู้เชิงมโนทัศน์ และ ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยประกอบด้วย ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 7 ข้อ และข้อสอบแบบ อัตนัย จำนวน 7 ข้อ

5. เกณฑ์ หมายถึง คะแนนจุดตัดที่กำหนดการผ่านระดับที่ยอมรับได้ โดยการวิจัยครั้งนี้ กำหนดเกณฑ์ที่ร้อยละ 60 เป็นเกณฑ์ที่ใช้สำหรับประเมินความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถ ในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ดังรายละเอียดต่อไปนี้

5.1 สำหรับการประเมินความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ถ้านักเรียนทำคะแนนที่ แสดงถึงความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ถือว่านักเรียน ผ่านเกณฑ์

5.2 สำหรับการประเมินความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ถ้านักเรียนทำ คะแนนที่แสดงถึงความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์

กรอบแนวคิดในการวิจัย



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

สมมติฐานในการวิจัย

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการ เรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่าน เกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับ การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์
3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์
4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra

1.1 การนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน

ปัจจุบัน ครูได้นำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนอย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะในต่างประเทศ ซึ่งมีการสร้างชุมชนของผู้ใช้โปรแกรม ที่รวบรวมสื่อการเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ จากผู้ใช้โปรแกรมทั่วโลก จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องพบว่า มีผู้ได้กล่าวถึงการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนไว้ดังนี้

โฮเฮนวอเตอร์ และฟิช (Hohenwarter & Fuchs, 2004, p. 2) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra เหมาะสำหรับนักเรียนที่มีอายุ 10 ถึง 18 ปี และครูในระดับมัธยมศึกษา ซึ่งโปรแกรม GeoGebra จะช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์จากการลงมือปฏิบัติ ตัวอย่างเช่น นักเรียนสามารถตรวจสอบค่าพารามิเตอร์ของสมการวงกลมในโปรแกรม และสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับรูปทั่วไปของสมการวงกลมได้

โฮเฮนวอเตอร์ และพรีเนอร์ (Hohenwarter & Preiner, 2007, p. 1) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra สามารถช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ โดยครูสามารถใช้จัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนได้มีโอกาสลงมือทำและใช้ในกิจกรรมการแก้ปัญหาได้นอกจากนี้ยังสามารถทำให้นักเรียนสามารถทำกิจกรรมสำรวจข้อค้นพบทางคณิตศาสตร์ได้ทั้งในชั้นเรียนและที่บ้าน

พรีเนออร์ (Preiner, 2008, pp. 61-63) กล่าวถึงจุดเด่นของโปรแกรม GeoGebra โดยสามารถสรุปได้ดังนี้

1. เป็นโปรแกรมโอเพนซอร์ซ กล่าวคือ ครูและนักเรียนสามารถเข้าถึงโปรแกรมได้ฟรี และนำมาใช้ในการเรียนการสอนได้อย่างไม่มีข้อจำกัด นอกจากนี้โปรแกรม GeoGebra ยังมีเวอร์ชันที่เรียกว่า WebStart ซึ่งผู้ใช้โปรแกรมสามารถเข้าถึงโปรแกรมโดยไม่ต้องดาวน์โหลด แต่ใช้โปรแกรมผ่านทางเบราว์เซอร์บนอินเทอร์เน็ตได้ สำหรับขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรมนั้นผู้ใช้โปรแกรมไม่จำเป็นต้องสมัครสมาชิกหรือเสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ทั้งสิ้น ดังนั้นโปรแกรม GeoGebra จึงเป็นโปรแกรมที่สามารถเข้าถึงนักเรียนได้ง่ายทั้งในชั้นเรียนและที่บ้าน

2. เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตที่มีประสิทธิภาพ เนื่องจากโปรแกรม GeoGebra มีศักยภาพที่ใกล้เคียงกับ Cabri Geometry และเป็นโปรแกรมฟรีอีกด้วย

3. เป็นโปรแกรมคณิตศาสตร์แบบพลวัต (Dynamic Mathematics Software: DMS) ซึ่งเป็นการผสมผสานระหว่างความสามารถของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต (Dynamic Geometry Software: DGS) และระบบพีชคณิตคอมพิวเตอร์ (Computer Algebra System: CAS) โดยที่โปรแกรมสามารถเชื่อมโยงระหว่างเรขาคณิตและพีชคณิตได้อย่างสมบูรณ์แบบ

4. เป็นการผสมผสานระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต กล่าวคือ โปรแกรม GeoGebra สามารถนำเสนอสมบัติทางพีชคณิตของอ็อบเจกต์ได้ในหน้าต่างพีชคณิต เช่น ในรูปแบบคู่อันดับ ความสัมพันธ์ หรือ ฟังก์ชัน ของอ็อบเจกต์นั้น ในขณะที่มีการนำเสนอรูปร่างของอ็อบเจกต์นั้นในหน้าต่างของกราฟิก โดยมีการอธิบายสมบัติทางเรขาคณิตในส่วนที่เรียกว่า construction protocol ซึ่งครูและนักเรียนสามารถตรวจสอบขั้นตอนการสร้างของอ็อบเจกต์นั้นได้ที่ละขั้นตอนตลอดเวลา

5. เป็นโปรแกรมที่ออกแบบสำหรับนักเรียน โดยโปรแกรมยึดหลักการ KISS (keep it small and simple) ซึ่งทำให้โปรแกรมออกแบบการจัดวางแถบเครื่องมือต่าง ๆ ที่ใช้งานได้ง่าย โดยที่ผู้ใช้โปรแกรมไม่จำเป็นต้องมีความรู้คอมพิวเตอร์ขั้นสูง

6. โปรแกรม GeoGebra ถูกเขียนโดยภาษาจาวา ดังนั้นจึงสามารถเปิดไฟล์ได้บนทุกระบบปฏิบัติการทั้ง Windows และ MacOS ซึ่งรองรับส่วนเสริมจาวา

7. มีผู้ใช้งานทั่วโลก โดยที่ครูสามารถแลกเปลี่ยนหรือแบ่งปันสื่อการเรียนการสอนกับครูทั่วโลกได้

สำนักงานบริหารการมัธยมศึกษาตอนปลาย (2553, p. 23) ได้กล่าวถึงจุดเด่นของโปรแกรม GeoGebra ว่า โปรแกรมสามารถดำเนินการสร้างจุดภาคตัดกรวย สมการ นอกจากนี้ยัง

มีความสามารถในการส่งออกไฟล์ที่สร้างขึ้นเป็นรูปแบบของภาษาจาวา ซึ่งเป็นสื่อที่ปฏิสัมพันธ์กับนักเรียน โดยนักเรียนสามารถปรับแต่งค่า รวมถึงรูปร่างของสื่อได้เป็นอย่างดี

พิสุทธิ ยงหางเรือ (2559, p. 17) กล่าวถึง จุดเด่นของการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการเรียนการสอนว่า โปรแกรม GeoGebra มีคุณสมบัติเด่นที่สามารถเคลื่อนไหว พลิกหมุน หรือเปลี่ยนค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชัน ทำให้นักเรียนสามารถสังเกตเห็นสิ่งที่เกิดขึ้นระหว่างสมการ และกราฟได้อย่างชัดเจน ซึ่งทำให้โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อในการจัดการเรียนรู้ที่ช่วยให้นักเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาเป็นนามธรรมเห็นชัดเป็นรูปธรรมมากขึ้น

จากการศึกษาจุดเด่นของการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการเรียนการจัดการเรียนการสอน พบว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ซึ่งจะส่งเสริมให้นักเรียนสามารถสำรวจเรขาคณิตผ่านการสร้างและการเลื่อนอ็อบเจกต์ เห็นตัวอย่างรูปตามสมบัติทางเรขาคณิตได้อย่างหลากหลาย สังเกตการเปลี่ยนแปลงของรูปเรขาคณิตเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ และกระตุ้นให้นักเรียนเห็นแนวทางในการพิสูจน์ได้มากขึ้น ทำให้นักเรียนสามารถเรียนเรขาคณิตได้ดียิ่งขึ้น นอกจากนี้โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมโอเพนซอร์ซ ซึ่งครูและนักเรียนสามารถเข้าถึงโปรแกรมได้ง่ายและไม่เสียค่าใช้จ่าย มีความสามารถส่งออกไฟล์ที่สร้างขึ้นเป็นรูปแบบของภาษาจาวา ที่เป็นสื่อปฏิสัมพันธ์กับนักเรียนและเข้าถึงได้ในทุกระบบปฏิบัติการทั้งในชั้นเรียนและที่บ้าน

1.2 ข้อควรคำนึงและข้อจำกัดของการนำโปรแกรม GeoGebra ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอน

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องต่าง ๆ ครูผู้สอนควรคำนึงถึงความเหมาะสมในการเลือกใช้สื่อเทคโนโลยี ซึ่ง อุบล กลองกระโทก (2554, p. 8) กล่าวว่า ในการเลือกใช้โปรแกรมที่จะนำมาจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ควรคำนึงถึงความถูกต้อง ความสามารถของโปรแกรมที่ครบถ้วนและเพียงพอกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้สอน พื้นฐานของนักเรียนก่อนการใช้โปรแกรม หรือความยากง่ายในการใช้โปรแกรม ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับข้อควรคำนึงในการจัดการเรียนการสอน และข้อจำกัดทางด้านเนื้อหาของโปรแกรม GeoGebra ดังนี้

ปิยะวุฒิ ศรีชนะ (2556, p. 62) กล่าวถึง ข้อควรคำนึงในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ว่า ครูควรมีผู้ช่วยในการสอน เพื่อจะได้ให้คำแนะนำนักเรียนได้อย่างรวดเร็วและทั่วถึงมากขึ้น และเครื่องคอมพิวเตอร์ต้องมีการติดตั้งโปรแกรมจาวา ตั้งแต่เวอร์ชัน 5 ขึ้นไป

ชัญญา อุทิศ (2557, p. 77) กล่าวถึง ข้อควรคำนึงในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ว่า ในการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ครูจะต้องเตรียมการสอนล่วงหน้าอย่างดีและมีการสำรวจเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการเรียนรู้ให้พร้อมก่อนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทุกครั้ง ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ครูควรปิดอินเทอร์เน็ตของห้องเรียน เพื่อให้นักเรียนมีสมาธิและตั้งใจเรียนอย่างเต็มที่ ครูควรระวังเรื่องการใช้สีตัวอักษรและกราฟในโปรแกรม GeoGebra โดยไม่ควรใช้สีอ่อน เช่น สีเหลือง และไม่ควรรใช้ตัวอักษรขนาดเล็กหรือตัวอักษรซ้อนทับกันระหว่างเส้นกราฟ เพราะนักเรียนที่นั่งด้านหลังห้องจะมองเห็นสีและตัวอักษรได้ไม่ชัดเจน

โดส และโจเซ (Dos & José, 2017, p. 9) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra ยังมีข้อจำกัดในเรื่องของการสร้างโดคัส และการเขียนสมการของเส้นโค้งหลายตัวแปรในรูปแบบชัดเจน เนื่องจาก โปรแกรม GeoGebra ถูกออกแบบให้สามารถเขียนสมการพหุนามที่มีตัวแปรตามได้เพียงสองตัวแปรเท่านั้น

นาเวตต้า (Navetta, 2017, p. 24) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra ไม่สามารถสร้างฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนได้โดยตรง อย่างไรก็ตามในการเขียนฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนใน GeoGebra นั้น จะสามารถใช้วิธีการสร้างฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนโดยกำหนดให้จำนวนจริงของพิกัด Y ในคู่อันดับเป็นตัวแทนของส่วนจินตภาพในจำนวนเชิงซ้อน

จากการศึกษาข้อควรคำนึงและข้อจำกัดของการใช้โปรแกรม GeoGebra ในการจัดการเรียนการสอน พบว่า ในการจัดการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ครูควรมีความรู้ ความชำนาญ ในการใช้โปรแกรมเป็นอย่างดี มีการเตรียมการสอนล่วงหน้า สำหรับเนื้อหาภายในสื่อควรมีสีตัวอักษร ขนาดตัวอักษร และสีของพื้นหลังที่เหมาะสมเพื่อให้นักเรียนสามารถมองเห็นได้อย่างชัดเจน เตรียมความพร้อมห้องปฏิบัติการโดยสำรวจเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการเรียนรู้ของนักเรียน จัดสภาพแวดล้อมให้นักเรียนมีสมาธิในการเรียนโดยการปิดอินเทอร์เน็ตของห้องเรียน นอกจากนี้ครูอาจจะมีผู้ช่วยในการสอนเพื่อให้นักเรียนได้รับคำแนะนำอย่างทั่วถึง สำหรับข้อจำกัดด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ พบว่าโปรแกรม GeoGebra มีข้อจำกัดในเรื่องของการเขียนสมการของเส้นโค้งที่มีหลายตัวแปร และจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งไม่ได้ส่งผลกระทบต่อการจัดการเรียนการสอน เรื่อง วงกลม ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้

1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra ที่นำไปใช้ในการจัดการเรียน

การสอน

งานวิจัยในประเทศ

ปิยะวุฒิ ศรีชนะ (2556, p. 59) ได้ศึกษาการสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่อง กำหนดการเชิงเส้นโดยใช้โปรแกรม GeoGebra สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนแบบปกติ กับเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่อง กำหนดการเชิงเส้นโดยใช้โปรแกรม GeoGebra และเพื่อ ศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนด้วยชุดการเรียนการสอน เรื่อง กำหนดการเชิงเส้นโดยใช้โปรแกรม GeoGebra กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2556 โรงเรียนสอนแก้วว่องไววิทยา อำเภอเมือง จังหวัดยโสธร จำนวน 50 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนด้วย ชุดการเรียนการสอนเรื่อง กำหนดการเชิงเส้น โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สูงกว่าการเรียน แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความพึงพอใจต่อ การเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนเรื่อง กำหนดการเชิงเส้นโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ในระดับมาก

ชญญา อุทิศ (2557, pp. 72-77) ได้ศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง กำหนดการเชิงเส้นที่ส่งเสริมทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร กลุ่มตัวอย่างคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2556 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 48 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์หลังเรียน เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูง กว่าเกณฑ์ 60% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล โดยนักเรียนมีการเลือกใช้อำนาจที่ถูกต้อง มีกระบวนการคิดและให้เหตุผลชัดเจนเป็นระบบ และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล และนักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่ง กับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

ชยุตม์ ล้อธีรพันธ์ (2558, pp. 137-145) ได้ทำการศึกษาการเปรียบเทียบการใช้ โปรแกรม GSP กับโปรแกรม GeoGebra ประกอบการเรียนรู้เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็น นักเรียนโรงเรียนเทศบาลมิตรสัมพันธ์วิทยา จำนวน 72 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนระหว่างกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP กับกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GeoGebra

ประกอบการเรียนรู้เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

พิสุทธิ ยงทางเรือ (2559, p. 51) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการ เรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่อง ภาคตัดกรวย เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนรู้ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการ เรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่องภาคตัดกรวย และเปรียบเทียบความสามารถของ นักเรียนในการเขียนความสัมพันธ์ของสมการและกราฟในภาคตัดกรวยกับเกณฑ์ร้อยละ 70 กลุ่ม ตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนอิสลาม วิทยาลัยแห่งประเทศไทย จำนวน 40 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน หลังจากที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบ ด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่องภาคตัดกรวย และความสามารถในการเขียนความสัมพันธ์ของ สมการและกราฟในภาคตัดกรวยของนักเรียนหลังจากได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยแผนการจัดการ เรียนรู้โดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรม GeoGebra เรื่องภาคตัดกรวย สูงกว่า เกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

ซาฮา อายิบ และทามิซี (Saha, Ayub, & Tarmizi, 2010, pp. 691-692) ได้ทำ การเปรียบเทียบผลของการจัดการเรียนการสอนเรื่องคู่อันดับและเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับการสอนแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่มีอายุระหว่าง 16 - 17 ปี จำนวน 53 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นระดับต่ำและสูง ผลการวิจัย พบว่านักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระดับต่ำ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องคู่ อันดับและเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GeoGebra หลังเรียนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการสอนแบบ ปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ส่วนนักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระดับสูง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนเรื่องคู่อันดับและเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ไม่แตกต่างกับกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

จวน (Juan, 2015, pp. 140-142) ได้ทำการศึกษาการใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความเข้าใจในการเรียนเรขาคณิต ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 4 โรงเรียน ในประเทศ Belize กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ของแต่ละโรงเรียน รวมจำนวน 4 ห้องเรียน ผลการวิจัยพบว่า การใช้โปรแกรม GeoGebra ทำให้

นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความเอาใจใส่ในการเรียนเรขาคณิตดีขึ้น นอกจากนี้ผู้วิจัยยังให้ข้อเสนอแนะว่า ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพ ครูควรเลือกใช้เทคโนโลยีผสมผสานกับวิธีการในการจัดการเรียนการสอนอย่างเหมาะสม

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม GeoGebra พบว่า โปรแกรม GeoGebra สามารถส่งเสริมให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์โดยเฉพาะในสาระเรขาคณิตได้ดียิ่งขึ้น อีกทั้งความสามารถของโปรแกรม GeoGebra ที่เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตจะช่วยทำให้นักเรียนสามารถสร้างรูปเรขาคณิตได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ ทำการสำรวจเพื่อหาความสัมพันธ์และสร้างข้อความคาดการณ์ผ่านการลากอ็อบเจกต์ต่าง ๆ ที่ทำให้รูปเรขาคณิตยังคงสมบัติทางเรขาคณิตตามที่โจทย์กำหนด ทำให้นักเรียนสามารถเห็นตัวอย่างรูปเรขาคณิตตามสมบัติที่ได้จากการสร้างอย่างหลากหลาย ช่วยให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์จากการสังเกตหลาย ๆ ตัวอย่าง และช่วยให้นักเรียนเห็นแนวทางในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ได้ง่ายยิ่งขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจนำโปรแกรม GeoGebra มาใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอนเรื่อง วงกลม เพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

2.1 ความหมายของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

นักการศึกษาบางท่านอาจแยกคำว่า “วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์” (Conjecturing and Proving) เป็นสองวิธีการที่แตกต่างกัน โดยใช้คำว่า “วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์” (Conjecturing) หรือ “วิธีการพิสูจน์” (Proving) เท่านั้น สำหรับในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยขอรวบรวมความหมายของทั้งสองคำนี้ เนื่องจากมีนักการศึกษาหลายท่านที่ระบุว่าทั้งสองวิธีการนี้มีความเกี่ยวข้องและต่อเนื่องกันและมีนักการศึกษาบางท่านได้รวบรวมสองวิธีการนี้เช่นเดียวกัน สำหรับความหมายของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้อธิบายไว้ ซึ่งพอสรุปได้ดังต่อไปนี้

มอร์เซลลี (Morselli, 2006, p. 185) ได้กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นวิธีการแก้ปัญหาที่มีรูปแบบของปัญหาเป็นปัญหาปลายเปิด เนื่องจากนักเรียนยังไม่ทราบผลลัพธ์ของปัญหาหรือสมบัติที่ต้องการพิสูจน์คืออะไร โดยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์นักเรียนจะต้องค้นหาความสัมพันธ์บางอย่างและแสดงการยืนยันความสัมพันธ์นั้นด้วยตนเอง

โบเอโร และเลมูท (Boero, Rossella, & Lemut, 2007, p. 1) ได้กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นวิธีการที่มุ่งให้นักเรียนได้สร้างข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการการยืนยัน (ที่เรียกว่า ข้อความคาดการณ์) และแสดงการยืนยัน (การพิสูจน์) โดยใช้กฎเกณฑ์ที่เป็นที่ยอมรับจากนักคณิตศาสตร์หรือในชั้นเรียนในการยืนยันข้อความนั้น

โอลิฟโร และโรบัตติ (Olivero & Robutti, 2007, p. 139) ได้กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นวิธีการที่ประกอบไปด้วยสองระยะ โดยระยะแรก คือ การสำรวจและค้นหาเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ คือการให้นักเรียนค้นหาองค์ประกอบ เช่น สมบัติความสัมพันธ์ ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าเป็นจริงต่อไป และระยะที่สอง คือการนำองค์ประกอบเหล่านั้นมาแสดงให้เห็นจริงตามหลักตรรกศาสตร์ หรือเป็นการนำสิ่งที่ค้นพบมาพิสูจน์ว่าเป็นจริง

มาร์ติเน และลี (Martinez & Li, 2010, p. 269) ได้กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นวิธีการที่ประกอบด้วยสองกระบวนการที่มีความเกี่ยวข้องกัน คือ กระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์และกระบวนการพิสูจน์ ซึ่งมีความสำคัญในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์

อัสตาวา และคนอื่น ๆ (Astawa et al., 2018, p. 16) ได้กล่าวถึง วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ โดยสรุปได้ว่า เป็นวิธีการที่นักเรียนได้ค้นหาและสร้างข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีแนวโน้มว่าเป็นจริง โดยใช้ความรู้เดิมหรือความรู้จากข้อมูลที่กำหนดให้ จากนั้นทำการแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริงโดยใช้กระบวนการให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล

สำหรับงานวิจัยนี้ สรุปได้ว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ หมายถึงวิธีการแก้ปัญหาที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ค้นหาความสัมพันธ์หรือข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีแนวโน้มว่าเป็นจริงด้วยตนเอง แล้วแสดงการยืนยันว่าข้อความนั้นเป็นจริงอย่างสมเหตุสมผล โดยใช้ความรู้เดิม หรือสิ่งที่ปัญหากำหนด

2.2 รูปแบบของการสร้างข้อความคาดการณ์

มีนักการศึกษาได้เสนอรูปแบบของการสร้างข้อความคาดการณ์ไว้ดังนี้

แคนาดาส และคนอื่น ๆ (Canadas et al., 2007, pp. 58-61) ได้แบ่งรูปแบบของการสร้างข้อความคาดการณ์ไว้ 5 รูปแบบ ดังนี้

1. การสร้างข้อความคาดการณ์จากหลักฐานเชิงประจักษ์ด้วยการอุปนัยจากกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณีเป็นจำนวนจำกัดที่ไม่ต่อเนื่องกัน (Empirical Induction from a Finite Number of Discrete Cases) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจากการสังเกตจากกรณี

ย่อย ๆ หลายกรณีจนสามารถค้นพบรูปแบบ แล้วสามารถสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้โดยการพิสูจน์ด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การสร้างข้อความรูปแบบนี้มักจะพบในปัญหาที่เกี่ยวกับจำนวน

2. การสร้างข้อความคาดการณ์จากหลักฐานเชิงประจักษ์ด้วยการสังเกตกรณีหลาย ๆ กรณีจากการเคลื่อนไหว (Empirical Induction from Dynamic Cases) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์จากการสังเกตเหตุการณ์ที่มีความต่อเนื่องกันหลาย ๆ เหตุการณ์จากการเปลี่ยนแปลงหรือเคลื่อนไหวของสิ่งต่าง ๆ ซึ่งจะสามารถสรุปว่าเป็นจริงได้แค่บางกรณีเท่านั้น ในการสรุปว่าเป็นจริงในกรณีทั่วไปจะต้องแสดงการพิสูจน์เพิ่มเติม

3. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการเปรียบเทียบ (Analogy) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเปรียบเทียบสิ่งต่าง ๆ ในปัญหา กับความรู้หรือข้อเท็จจริงที่ทราบมาแล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อความคาดการณ์ใหม่

4. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการขยายผล (Abduction) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์ โดยสังเกตจากสิ่งที่เกิดขึ้นและหาลักษณะเพิ่มเติม จากสิ่งที่ทราบมาแล้ว หรือผลจากข้อความคาดการณ์ที่ไม่เป็นจริง เพื่อสรุปเป็นข้อความคาดการณ์ใหม่

5. การสร้างข้อความคาดการณ์จากการรับรู้ด้วยตนเอง (Perceptually Based Conjecturing) เป็นการสร้างข้อความคาดการณ์โดยการแปลงปัญหาหนึ่งเป็นสัญลักษณ์หรือตัวแทนที่สามารถหารูปแบบ เพื่อนำไปสู่การหาข้อสรุปได้ง่ายยิ่งขึ้น

มาร์ติเน และลี (Martinez & Li, 2010, p. 269) ได้แบ่งรูปแบบของข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจากวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ไว้ 3 แบบดังนี้

1. ข้อความคาดการณ์แข่งขัน (Competing conjectures) เป็นข้อความคาดการณ์ทั้งหมดที่ได้มาจากกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์

2. ข้อความคาดการณ์ที่ถูกตัดออก (Dismissed conjectures) เป็นข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจากกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์ที่นักเรียนตัดออก เนื่องจากเห็นว่ามีความตัวอย่างที่ไม่เป็นจริงในข้อความนั้น

3. ข้อความคาดการณ์ที่ต้องพิสูจน์ (Conjectures to prove) เป็นข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจากกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์ที่มีความน่าเชื่อถือและสามารถแสดงการพิสูจน์ว่าเป็นจริงได้

สำหรับงานวิจัยนี้ ได้ใช้แนวทางการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ตามแนวทางการสร้างข้อความคาดการณ์ในรูปแบบที่ 2 ของแคนาดา และคนอื่น ๆ คือ การสร้างข้อความคาดการณ์จากหลักฐานเชิงประจักษ์ด้วยการสังเกต

กรณีหลาย ๆ กรณีจากการเคลื่อนไหว เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้เป็นการใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ประกอบการจัดการเรียนการสอนตามกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

2.3 ขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

มีนักการศึกษาได้เสนอขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ไว้ดังนี้

มอร์เซลลี (Morselli, 2006, p. 185) ได้กล่าวถึง ขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหาและสำรวจเพื่อหาสมบัติในการสร้างนั้น
2. กำหนดข้อความคาดการณ์
3. สำรวจข้อความคาดการณ์และค้นหาทฤษฎีบทหรือข้อโต้แย้งเพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์นั้น

4. สร้างการพิสูจน์ ซึ่งการพิสูจน์นั้นจะต้องเป็นที่ยอมรับของนักคณิตศาสตร์ แคนาดา และคนอื่น ๆ (Canadas et al., 2007, p. 64) ได้กล่าวถึง ขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในรูปแบบการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์จากหลักฐานเชิงประจักษ์ด้วยการสังเกตกรณีหลาย ๆ กรณีจากการเคลื่อนไหว (Empirical Induction from Dynamic Cases) ดังนี้

1. ทำความเข้าใจกับสถานการณ์ที่มีลักษณะต่อเนื่องและเป็นพลวัต
2. สังเกตค่าคงที่ที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนไหวหรือเปลี่ยนแปลง
3. สร้างข้อความคาดการณ์กับกรณีอื่น ๆ
4. ตรวจสอบข้อความคาดการณ์นั้นกับกรณีอื่น ๆ
5. สร้างข้อความคาดการณ์ให้เป็นกรณีทั่วไป
6. ตัดสินหรือยืนยันข้อความคาดการณ์นั้น

แฟรงก์ และมารีออตตี (Frank & Mariotti, 2010, p. 234) ได้กล่าวถึง ขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตดังนี้

1. ใช้กลยุทธ์ใน “การลาก” ที่หลากหลาย เพื่อตรวจสอบสถานการณ์ การรักษาสมบัติทางเรขาคณิตของรูป (ค่าคงที่ที่เกิดจากการตั้งใจให้สมบัตินั้นเป็นจริง: Intentionally Induceted Invariance) และใช้การสำรวจโดยการสร้างรอย

2. การสังเกตโลคัส ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของตัวแทนของโลคัส ซึ่งสิ่งนี้จะอธิบายเกี่ยวกับค่าคงที่ที่เกิดจากสังเกตผ่านการลาก

3. ตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่ภายในที่เกิดจากการสร้างและค่าคงที่ที่เกิดจากการสังเกตผ่านการลาก

4. สร้างข้อความคาดการณ์ในรูปแบบ ถ้า “ค่าคงที่ที่เกิดจากการสังเกตผ่านการลาก” (Invariance Observed during Dragging) แล้ว “ค่าคงที่ที่เกิดจากการตั้งใจให้สมบัตินั้นเป็นจริง” (Intentionally Inducted Invariance)

5. พิสูจน์เพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์

อัสตาวา และคนอื่น ๆ (Astawa et al., 2018, p. 19) ได้กล่าวถึง ขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา ประกอบด้วย

- อ่านปัญหาและพิจารณาสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการทราบ
- เขียนสิ่งที่ปัญหาคำหนด
- เขียนสิ่งที่ปัญหาต้องการทราบ

2. สำรวจปัญหา

- เปลี่ยนปัญหาให้เป็นรูปภาพหรือกราฟ
- จัดการกับปัญหาโดยใช้ตัวอย่างของรูปภาพหรือกราฟในหลาย ๆ กรณี
- ค้นหาสมบัติที่คงที่หรือแบบรูป จากการเปลี่ยนแปลงของรูปภาพหรือกราฟ
- เชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติหรือแบบรูปที่ค้นพบ
- กำหนดเงื่อนไขของสมบัติหรือแบบรูป เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์

3. กำหนดข้อความคาดการณ์

- นำสมบัติที่ได้จากการสำรวจปัญหามาเขียนเป็นข้อความคาดการณ์

โดยใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการอ้างอิงให้ถูกต้อง และสามารถเขียนให้ผู้อื่นเข้าใจได้

4. ตัดสินข้อความคาดการณ์

- อธิบายเหตุผลในการยืนยันข้อความคาดการณ์โดยใช้ผลจากการวัดการนับ ในรูปภาพหรือกราฟ โดยเชื่อมโยงกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง
- สรุปข้อความเป็นกรณีทั่วไป โดยทดสอบในกรณีอื่น ๆ แล้วพบว่าข้อความคาดการณ์ยังเป็นจริงในกรณีอื่น ๆ ทุกกรณี
- ตรวจสอบข้อบกพร่องของข้อความคาดการณ์และปรับปรุงแก้ไข

5. พิสูจน์ข้อความคาดการณ์

- ตระหนักว่าข้อความคาดการณ์จะเป็นจริง ก็ต่อเมื่อข้อความนั้นได้รับการพิสูจน์แล้ว

- เลือกรูปแบบการพิสูจน์ที่เหมาะสมกับข้อความคาดการณ์ที่สร้าง

- ทำการพิสูจน์ โดยแสดงรูปภาพหรือกราฟประกอบการพิสูจน์ เขียนข้อความหรือข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่ยอมรับในการแสดงเหตุผล และสรุปว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง หรือผ่านการพิสูจน์แล้ว

จากการศึกษาขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ในงานวิจัยนี้จะใช้แนวทางขั้นตอนของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และการพิสูจน์ของมอร์เซลล์ (Morselli, 2006, pp. 185-186) แคนาดา และคนอื่น ๆ (Canadas et al., 2007, p. 64) และ อัสตาวา และคนอื่น ๆ (Astawa et al., 2018, p. 19) แล้วปรับให้เข้ากับการจัดการเรียนการสอนในเรื่อง วงกลม ดังนี้

1. ส่วนที่เกี่ยวข้องกับบทนิยาม จะดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1.1 ขั้นสำรวจปัญหา เป็นขั้นที่ให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหา และร่วมกันสังเกตและเปรียบเทียบสิ่งๆที่เหมือนกัน หรือสิ่งที่แตกต่างกันผ่านตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง

1.2 ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม เป็นขั้นที่ให้นักเรียนพิจารณาผลที่ได้จากขั้นสำรวจปัญหา เพื่อนำมาเขียนเป็นข้อความเชิงบทนิยาม

1.3 ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม เป็นขั้นที่ให้นักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของข้อความเชิงบทนิยาม เมื่อได้ข้อความที่ถูกต้องแล้ว จึงสรุปเป็นบทนิยามต่อไป

2. ส่วนที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบท จะดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

2.1 ขั้นสำรวจปัญหา เป็นขั้นที่ให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหา และร่วมกันค้นหาความสัมพันธ์ ผ่านการสังเกตตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง

2.2 ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนตรวจสอบความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นจากขั้นสำรวจปัญหา แล้วนำความสัมพันธ์ที่ได้เขียนเป็นข้อความคาดการณ์

2.3 ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนค้นหาเหตุผลที่ทำให้ข้อความคาดการณ์เป็นจริง

2.4 ขั้นการพิสูจน์ เป็นขั้นที่ให้นักเรียนได้ใช้ผลจากการสำรวจข้อความคาดการณ์ มาเรียบเรียงเขียนแสดงการพิสูจน์

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

จากการศึกษาและค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ผู้วิจัยยังไม่พบงานวิจัยในประเทศ จึงขอนำเสนอเฉพาะงานวิจัยต่างประเทศดังนี้

งานวิจัยต่างประเทศ

เฟิร์กกิง (Frerking, 1994, pp. 97-99) ได้ทำการศึกษาการจัดการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเพื่อส่งเสริมขั้นตอนในการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้ของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 58 คน โดยเป็นนักเรียนตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 – 5 ในโรงเรียน Norcross ประเทศสหรัฐอเมริกา ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนที่ได้เรียนผ่านโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตสามารถสร้างข้อความคาดการณ์และเขียนพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้น และนักเรียนมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบของ แวน ฮีลี สูงขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่าความสามารถในการพิสูจน์มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต และความสามารถในการพิสูจน์มีความสัมพันธ์กับระดับการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบของ แวน ฮีลี

เบลล์ (Bell, 1998, pp. 84-85) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบการสอนเรขาคณิตด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตและการสอนเรขาคณิตด้วยวิธีการสอนแบบปกติร่วมกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทางตะวันออกเฉียงเหนือของ Atlanta จำนวน 100 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง หรือกลุ่มที่เรียนเรขาคณิตโดยเน้นกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์จำนวน 40 คน และกลุ่มควบคุม หรือกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการสอนแบบปกติจำนวน 60 คน ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบของ แวน ฮีลี สูงกว่า นักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และนักเรียนกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตหลังเรียนไม่แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ การออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนและการใช้คำถามกระตุ้นของครู เป็นปัจจัยที่สำคัญในการส่งเสริมกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์ของนักเรียน

เบิร์ช (Burtch, 2005, pp. 227-229) ได้ทำการศึกษาการจัดการเรียนการสอน เรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตระดับปริญญาตรี จำนวน 2 ห้องเรียน ในวิทยาลัยทางตะวันตกเฉียงใต้ของสหรัฐอเมริกา ผลการวิจัยพบว่าการจัดการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์สามารถส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง กระตุ้นให้นักเรียนเห็นแนวทางการแก้ปัญหาผ่านการมีปฏิสัมพันธ์หรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนร่วมชั้นเรียน

กิลลิส (Gillis, 2005, pp. 69-71) ได้ทำการเปรียบเทียบการจัดการเรียนการสอนโดยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตกับไม่ใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษา 2 ห้องเรียน จำนวน 41 คน ในตอนใต้ของประเทศสหรัฐอเมริกา ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตสามารถค้นพบข้อความคาดการณ์ที่ถูกต้องได้ดีกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยไม่ได้ใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

เหงียน (Nguyen, 2012, p. 1742) ได้ทำการศึกษาการจัดการจัดการกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตชั้นปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนรายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นสำหรับครูในภาคฤดูร้อน ปี 2010 ที่มหาวิทยาลัย Nguyen University of Education ในประเทศเวียดนาม ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นิสิตชั้นปีที่ 2 หลังเรียนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra มีความสามารถในการพิสูจน์ในระดับที่สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ พบว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ สามารถส่งเสริมให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการพิสูจน์ในสาระเรขาคณิตได้ดียิ่งขึ้น เนื่องจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการดังกล่าว เป็นการส่งเสริมให้นักเรียนค้นพบองค์ความรู้จากการสำรวจด้วยตนเองร่วมกับการใช้คำถามกระตุ้นการคิดของครู นอกจากนี้ยังพบว่านักการศึกษาหลายท่านมักนำวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ไปใช้ในการสอนร่วมกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต เนื่องจากการใช้เครื่องมือการสร้างและการวัดที่มีความแม่นยำในโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตจะช่วยทำให้นักเรียนสามารถสำรวจ สังเกตการเปลี่ยนแปลงของรูปเรขาคณิต จนนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ที่ถูกต้องได้ดียิ่งขึ้น สำหรับในส่วนของการพิสูจน์ พบว่า ครูสามารถออกแบบกิจกรรมและให้นักเรียนใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเป็นเครื่องมือช่วยในการสำรวจองค์ประกอบอื่น ๆ ในรูป เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ซึ่งในงานวิจัยนี้คือโปรแกรม GeoGebra ในสาระเรขาคณิต เรื่อง วงกลม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์

3.1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์

ความรู้ที่เรียกว่า Conceptual Knowledge ได้มีนักการศึกษาหลายท่านเรียกชื่อแตกต่างกันออกไป เช่น “ความรู้เชิงมโนทัศน์” “มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์” เป็นต้น สำหรับการกล่าวถึง Conceptual Knowledge ในครั้งนี้ ผู้วิจัยขอเลือกใช้คำว่า “ความรู้เชิงมโนทัศน์” สำหรับความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาและรวบรวมไว้ดังนี้

ฮีเบิร์ต และลีเฟอวี (Hiebert & Lefevre, 1986, pp. 3-4) ได้กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับองค์ประกอบของข้อมูลบางอย่าง ซึ่งเมื่อเชื่อมโยงหรือหาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของข้อมูลเหล่านั้นจะทำให้เกิดความจริงหรือกระบวนการบางอย่าง

จอห์นสัน ซีเกลอร์ และอาลีบาลี (Johnson, Siegler, & Alibali, 2001, pp. 346-347) ได้กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ เป็นความรู้ที่สามารถสังเกตเห็นได้อย่างชัดเจนเกี่ยวกับหลักการที่สำคัญและเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยของความรู้ในบทเรียน

ชไนเดอร์ และสเตอร์น (Schneider & Stern, 2010, p. 179) ได้กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ หมายถึง ความรู้ทั่วไปที่เป็นนามธรรมและเป็นสิ่งสำคัญของหลักการต่าง ๆ

ธานไฮเซอร์ (Thanheiser, 2012, p. 222) ได้กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ ประกอบด้วยสองลักษณะ คือ ความรู้เกี่ยวกับความคิดรวบยอด และลักษณะการรับรู้เกี่ยวกับความคิดรวบยอดนั้นว่าเป็นอย่างไร

ครุกส์ และอาลีบาลี (Crooks & Alibali, 2014, p. 371) ได้แบ่งความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์ออกเป็นสองกลุ่มดังนี้

กลุ่มที่ 1 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์ในแง่ของความรู้ในหลักการทั่วไป (General principle knowledge) ได้ระบุว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ เป็นความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ต้องใช้กระบวนการแก้ปัญหา

กลุ่มที่ 2 ความหมายของความรู้เชิงมโนทัศน์ในแง่ของความรู้ที่อยู่เบื้องหลังของกระบวนการ (Knowledge of principles underlying procedures) เป็นความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเหตุผลของขั้นตอน กระบวนการ ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ว่าใช้หลักการอย่างไรบ้าง

อัมพร ม้าคนอง (2558, p. 15) ได้กล่าวว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์ หมายถึง ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับลักษณะสำคัญ ความหมาย ที่มา หรือการขยายความ ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม นิยาม เป็นความคิดนามธรรมที่ทำให้นักเรียนสามารถจำแนกสิ่งที่มีลักษณะตามความคิดนามธรรมนั้น ๆ ได้ และสามารถระบุได้ว่าสิ่งที่กำหนดให้เป็นตัวอย่างหรือไม่ใช่ตัวอย่างของความคิดนามธรรมนั้น

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยให้ความหมายของ ความรู้เชิงมโนทัศน์ว่า เป็นความรู้เกี่ยวกับหลักการ ได้แก่ บทนิยาม หรือทฤษฎีบทต่าง ๆ รวมทั้งการนำหลักการนั้นไปใช้ในการอธิบายเหตุผลประกอบขั้นตอนที่จะนำไปสู่คำตอบของสถานการณ์ต่าง ๆ

3.2 แนวทางการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์

ความรู้เชิงมโนทัศน์ เป็นสิ่งสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมาก เนื่องจากจะช่วยให้ นักเรียนสามารถเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงและสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหา อย่างไรก็ตาม ความรู้เชิงมโนทัศน์มักเป็นสิ่งที่ไม่ได้ถูกเน้นในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (อัมพร ม้าคนอง, 2558, p. 16) ทำให้นักเรียนมักประสบปัญหาในการนำทฤษฎีไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังนั้น ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ครูจึงควรให้ความสำคัญในการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ให้กับนักเรียน ผู้วิจัยได้ศึกษาและรวบรวมแนวทางการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ไว้ดังนี้

ทราเวอร์ส (Travers, 1967, p. 142) ได้กล่าวถึง แนวทางการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ โดยสรุปได้ว่า ครูควรให้นักเรียนเห็นความแตกต่างระหว่างตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์นั้น และครูอาจให้นักเรียนได้จัดกลุ่มตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์ด้วยตนเอง

ยุพิน พิพิธกุล (2529, pp. 23-26) ได้กล่าวว่า กระบวนการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ มีองค์ประกอบดังนี้

1. นักเรียนจะต้องมีความรู้ ทักษะ ประสบการณ์และมีความพร้อมที่จะเรียนเรื่องใหม่จากความรู้เดิมที่มีอยู่ เพื่อทำให้นักเรียนสังเกตเห็นคุณสมบัติร่วม (Common Properties) ความสัมพันธ์แบบแผน โครงสร้างของความคิด สิ่งเหล่านี้เมื่อประมวลกันแล้ว จะทำให้นักเรียนนำไปสู่ข้อสรุปได้

2. นักเรียนต้องได้รับแรงจูงใจ (Motivation) หรือถูกกระตุ้นให้อยากเรียน มีความเต็มใจที่จะมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน นักเรียนจะต้องนี้เคยรู้เสมอว่ากำลังทำอะไร เห็นอะไร รู้สึกอย่างไร คิดอย่างไร การเรียนจะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อนักเรียนนั้น ได้ตอบสนองต่อภาพการเรียนและนักเรียนจะตอบสนองก็ต่อเมื่อได้ใช้กระบวนการคิด

3. นักเรียนจะต้องมีความสามารถที่จะมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน การเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์นั้นเป็นกระบวนการของปัญหาซึ่งเกี่ยวข้องกับกิจกรรม เช่น การเห็น การฟัง การอ่าน การเขียน การคำนวณ การคิด การพูด การลงมือทำ การใช้นามธรรม การใช้

สัญลักษณ์ การสรุป นั้นหมายความว่านักเรียนจะเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ ก็ต่อเมื่อ นักเรียนสามารถทำสิ่งเหล่านั้น

4. นักเรียนต้องได้รับการแนะแนวเพื่อเป็นแรงจูงใจให้เรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ การเรียนแบบลองผิดลองถูกอาจทำให้นักเรียนเกิดความท้อถอย เพราะนักเรียนไม่สามารถไปถึงจุดมุ่งหมายของบทเรียนได้สักที

5. จะต้องจัดวัสดุ อุปกรณ์ให้นักเรียนอย่างถูกต้องและเหมาะสม เช่น ของจริง ภาพ แบบเรียน เป็นต้น

6. นักเรียนจะต้องมีเวลาเพียงพอสำหรับที่จะมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม ในการที่นักเรียนจะเกิดมโนทัศน์นั้นจะต้องใช้เวลาการเรียนเป็นกระบวนการที่ค่อยพัฒนาไปที่ละน้อย การที่จะสร้างความรู้เชิงมโนทัศน์ได้นั้นต้องการประสบการณ์ที่ต่างกัน

ลิน ยาง ดี และทาบาร์ค (Lin, Yang, Lee, & Tabach, 2011, p. 308) ได้กล่าวว่า วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นวิธีการที่ช่วยส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ การคิดทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

เอเรนส์ (Arends, 2012, p. 338) ได้กล่าวถึงแนวทางการจัดการเรียนการสอน เพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ของนักเรียน โดยสามารถสรุปเป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 บอกจุดมุ่งหมายของบทเรียน (Clarifying Aims and Establishing Set) โดยครูอธิบายเกี่ยวกับจุดมุ่งหมาย กระบวนการเรียนการสอนในคาบเรียน และเตรียมความพร้อมนักเรียนให้พร้อมเรียนรู้

ขั้นที่ 2 นำเสนอตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์ (Input examples and nonexamples) ซึ่งแบ่งรูปแบบการนำเสนอเป็นสองรูปแบบดังนี้

1) Direct Presentation ครูจะบอกมโนทัศน์กับนักเรียนก่อน แล้วให้นักเรียนนำมโนทัศน์ที่ครูบอกในการระบุตัวอย่างที่สอดคล้องหรือไม่สอดคล้อง

2) Concept Attainment ครูจะยกตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องก่อนแล้วให้นักเรียนใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในการสรุปมโนทัศน์และคุณสมบัติของมโนทัศน์นั้น

ขั้นที่ 3 ทดสอบความเข้าใจในมโนทัศน์ของนักเรียน (Test for attainment) ครูนำเสนอตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์เพิ่มเติม เพื่อทดสอบความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์นี้ให้กับนักเรียน โดยครูอาจจะให้นักเรียนยกตัวอย่างเพิ่มเติมด้วยตนเอง

ขั้นที่ 4 วิเคราะห์กระบวนการคิดของนักเรียนและการนำความรู้เชิงมโนทัศน์ไปใช้ (Analyzing Concepts) เป็นการให้นักเรียนวิเคราะห์ตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์นั้น โดยตัวอย่างนี้อาจจะมีความซับซ้อนกว่าตัวอย่างในขั้นที่ 2 ตัวอย่างควรทำให้นักเรียนเห็นการเชื่อมโยงความรู้เดิมกับมโนทัศน์ใหม่ และมีความเป็นรูปธรรม

อัมพร ม้าคนอง (2558, p. 22) ได้กล่าวถึง แนวทางการส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ดังนี้

1. จัดการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้ในสิ่งที่มีความหมาย จำเป็นสำหรับการคิดและการใช้งาน และเป็นพื้นฐานของการเรียนในระดับที่สูงขึ้น นอกจากนี้ควรพัฒนาให้นักเรียนได้เชื่อมโยงความรู้ไปสู่ขั้นตอนหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพและเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีหรือเนื้อหาเกี่ยวกับวิธีการหรือขั้นตอนการทำงานที่ได้เลือกใช้ ความรู้คณิตศาสตร์จึงควรเกิดจากความเข้าใจ มิใช่เกิดจากการจดจำ ซึ่งอาจลืมได้ง่าย การเรียนรู้อย่างเข้าใจจะช่วยให้นักเรียนมองเห็นประโยชน์และคุณค่าของสิ่งที่เรียน และสามารถพัฒนาให้เป็นความรู้ที่ลึกซึ้งมากขึ้นได้

2. พัฒนาการคิดในลักษณะต่าง ๆ ควบคู่กับการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์ เช่น การคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ การคิดไตร่ตรอง การคิดอย่างมีวิจารณญาณ เนื่องจากการคิดเป็นพื้นฐานสำคัญของการทำความเข้าใจและพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้

3. ออกแบบกิจกรรมและงานให้สอดคล้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ต้องการพัฒนาให้นักเรียน โดยอาจต้องมีการวิเคราะห์มโนทัศน์ย่อยที่จะสอนก่อน จากนั้น จึงออกแบบกิจกรรมสำหรับแต่ละมโนทัศน์ และเมื่อดำเนินการจัดกิจกรรม จะต้องมีการประเมินพฤติกรรมการทำกิจกรรมของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง โดยอาจใช้คำถามที่ส่งเสริมกระบวนการคิด เพื่อช่วยให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเองและขยายไปสู่ความหมายใหม่หรือความรู้เชิงนามธรรมได้

4. เลือกใช้สื่อ เอกสารประกอบการสอน นวัตกรรม และเทคโนโลยีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ต้องการพัฒนา เช่น Geometer's Sketchpad และ TI-Nspire Graphing Calculator รวมทั้งจัดสภาพแวดล้อมหรือบริบทของการเรียนรู้ให้เอื้อต่อการใช้สื่อและนวัตกรรมเหล่านั้น

5. ประเมินผลการพัฒนาความรู้เชิงมโนทัศน์เป็นระยะ ๆ อย่างต่อเนื่องในกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน ทั้งการประเมินรายบุคคลและการประเมินโดยรวม โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประเมินพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน นอกจากนี้ ครูควรสะท้อนการสอนของ

ตนเองจากผลการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นกับนักเรียนเพื่อที่จะปรับการจัดการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

6. พยายามให้นักเรียนทำกิจกรรม คิด สังเกต วิเคราะห์ อภิปราย และหาข้อสรุปด้วยตนเอง โดยใช้กิจกรรมหรือสถานการณ์ที่กระตุ้นและท้าทายความสามารถของนักเรียน และไม่ยากเกินกว่าที่นักเรียนจะคิดได้

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการสอนที่ส่งเสริมความรู้เชิงมนทัศน์โดยพิจารณาตามลักษณะของเนื้อหา ซึ่งในส่วนของบทนิยามต่าง ๆ จะให้นักเรียนได้ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยจากการสังเกตตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง เพื่อสรุปมนทัศน์และคุณสมบัติของมนทัศน์ด้วยตนเองตามแนวทางของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ เอเรนส์ (Arends, 2012, p. 338) และสำหรับในส่วนของทฤษฎีบทและการพิสูจน์ต่าง ๆ จะใช้วิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ซึ่งสอดคล้องตามแนวคิดของ ลิน และคนอื่น ๆ (Lin et al., 2011, p. 308)

3.3 แนวทางการวัดความรู้เชิงมนทัศน์

โสภณ บำรุงสงฆ์ และสมหวัง ไตรตันวงศ์ (2520, p. 222) ได้กล่าวโดยสรุปได้ว่าการวัดความรู้เชิงมนทัศน์ของนักเรียนเป็นการวัดความคิดในเชิงนามธรรม คือความเข้าใจเกี่ยวกับกฎเกณฑ์ และวิธีการในทางคณิตศาสตร์ ควรมีลักษณะของแบบทดสอบที่มีข้อคำถามเกี่ยวกับข้อเท็จจริงหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ และไม่ต้องการคำตอบที่เป็นผลลัพธ์ของปัญหา เช่น

1. ไก่ 50 ตัว ราคา 600 บาท จะหาราคาไก่ 1 ตัว จะคิดโดยวิธีใดที่เร็วที่สุด
 - ก. วิธีบวก
 - ข. วิธีลบ
 - ค. วิธีคูณ
 - ง. วิธีหาร
2. ชายของอย่างหนึ่งได้กำไรร้อยละ 5 หมายความว่าอย่างไร
 - ก. ทุน 95 ขายไป 100
 - ข. ทุน 100 ขายไป 105
 - ค. ทุน 100 ขายไป 95
 - ง. ทุน 105 ขายไป 100

ครูกส์ และอาลีบาลี (Crooks & Alibali, 2014, pp. 364-365) ได้ทำการศึกษาและรวบรวมวิธีการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ ซึ่งจำแนกวิธีการวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ออกเป็น 5 กลุ่มดังนี้

กลุ่มที่ 1 การประยุกต์กระบวนการ (Application of Procedures) โดยการอธิบายถึงกระบวนการ และอาจรวมถึงการตัดสินใจเกี่ยวกับกระบวนการนั้น

กลุ่มที่ 2 การประเมินกระบวนการ (Evaluation of Procedures) โดยการอธิบายหรือประเมินความถูกต้องของกระบวนการที่กำหนดมาให้

กลุ่มที่ 3 การประเมินจากตัวอย่าง (Evaluation of Examples) โดยการอธิบายหรือประเมินความถูกต้องของตัวอย่างที่กำหนดมาให้

กลุ่มที่ 4 การอธิบายความคิดรวบยอด (Explanation of Concepts) โดยการเขียนข้อความหรือให้คำอธิบายเกี่ยวกับความคิดรวบยอด

กลุ่มที่ 5 การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ด้วยวิธีอื่น ๆ ซึ่งมีวิธีการที่หลากหลาย เช่น การกำหนดปัญหาขึ้นมาใหม่จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ และการจำแนกหรือจัดกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ เป็นต้น

จูไรรัตน์ วิชาไทย (2561, pp. 107-108) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยน ดังนี้

1. ด้านการอธิบายเหตุผล/ที่มา โดยกำหนดระดับคะแนน
 - 2 หมายถึง มีการอธิบายเหตุผล/ที่มา ในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ ที่สื่อความหมายชัดเจน ถูกต้องทั้งหมด
 - 1 หมายถึง มีการอธิบายเหตุผล/ที่มา ในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ ที่สื่อความหมายชัดเจน ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด
 - 0 หมายถึง มีการอธิบายเหตุผล/ที่มา ในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ ที่สื่อความหมายชัดเจน ถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่งของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด
2. ด้านการอ้างอิงหลักการ โดยกำหนดระดับคะแนน
 - 2 หมายถึง มีการอ้างอิงบทนิยาม กฎ สูตร ที่ใช้ในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ได้ถูกต้องทั้งหมด
 - 1 หมายถึง มีการอ้างอิงบทนิยาม กฎ สูตร ที่ใช้ในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด
 - 0 หมายถึง มีการอ้างอิงบทนิยาม กฎ สูตร ที่ใช้ในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ได้ถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่งของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด

3. ด้านการใช้หลักการ โดยกำหนดระดับคะแนน

- 2 หมายถึง ใช้บทนิยาม กฎ สูตร ในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ถูกต้องทั้งหมด
- 1 หมายถึง ใช้บทนิยาม กฎ สูตร ในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด
- 0 หมายถึง ใช้กฎ สูตร บทนิยาม ในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ ถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่งของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด

พิมสุภา ชินสา (2561, pp. 72-73) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง พหุนามและเศษส่วนของพหุนามดังนี้

- 1. ด้านการใช้หลักการ โดยกำหนดระดับคะแนน
 - 2 หมายถึง ใช้กฎ บทนิยาม ในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ถูกต้องทั้งหมด
 - 1 หมายถึง ใช้กฎ บทนิยาม ในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด
 - 0 หมายถึง ไม่สามารถใช้กฎ บทนิยาม ในขั้นตอนการแก้โจทย์ได้ถูกต้องหรือถูกน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
- 2. ด้านการอธิบายเหตุผล/ที่มาประกอบขั้นตอน โดยกำหนดระดับคะแนน
 - 2 หมายถึง อธิบายเหตุผล/ที่มาประกอบขั้นตอนของการแก้โจทย์ได้ถูกต้องทั้งหมด
 - 1 หมายถึง อธิบายเหตุผล/ที่มาประกอบขั้นตอนของการแก้โจทย์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด
 - 0 หมายถึง ไม่สามารถอธิบายเหตุผล/ที่มาประกอบขั้นตอนของการแก้โจทย์ได้ถูกต้อง หรือถูกน้อยกว่าครั้งหนึ่งของจุดที่ต้องตอบทั้งหมด

จากการศึกษาข้างต้น สามารถกล่าวได้ว่า การวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ของนักเรียนเป็นการวัดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับข้อเท็จจริงหรือหลักการทางคณิตศาสตร์ สำหรับแบบทดสอบความรู้เชิงมโนทัศน์ของนักเรียนควรมีข้อคำถามที่เกี่ยวกับหลักการทางคณิตศาสตร์หรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ ในการออกข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ ผู้ออกข้อสอบควรวิเคราะห์และศึกษามโนทัศน์ในเรื่องนั้น ๆ แล้วเลือกใช้รูปแบบคำถามเพื่อวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ของนักเรียนที่หลากหลายและเหมาะสม

3.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์

งานวิจัยในประเทศ

ชมพูนุท วนสันเทียะ (2552, pp. 198-201) ได้ศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนราชวินิตบางเขน โดยใช้วิธีสอนแบบโยนิโสมนสิการร่วมกับการใช้แผนผังมโนทัศน์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2551 โรงเรียนราชวินิตบางเขน เขตหลักสี่ กรุงเทพมหานคร ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธีการสอนแบบโยนิโสมนสิการร่วมกับการใช้แผนผังมโนทัศน์มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง เส้นขนานผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 และความรู้เชิงมโนทัศน์กับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธีสอนแบบโยนิโสมนสิการร่วมกับการใช้แผนผังมโนทัศน์มีความสัมพันธ์กันในทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จิรวรัตน์ จตุรานนท์ (2554, pp. 110-113) ได้ศึกษาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตนักศึกษาครุศาสตร์ ศึกษาศาสตร์ วิชาเอกคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนิสิตนักศึกษาที่ศึกษาอยู่ในหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต และการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ (เอกเดี่ยว) ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2554 ของสถาบันอุดมศึกษาของรัฐ สังกัดกระทรวงศึกษาธิการ ในเขตกรุงเทพมหานคร จำนวน 8 สถาบัน ได้แก่ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาวิทยาลัยราชภัฏจันทรเกษม มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร และมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา จำนวน 322 คน ผลการวิจัยในด้านของความรู้เชิงมโนทัศน์ พบว่านิสิตนักศึกษาครุศาสตร์มีความรู้เชิงกระบวนการมากกว่าความรู้เชิงมโนทัศน์ และอยู่ในระดับต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ โดยมีค่าเฉลี่ยคะแนนความรู้เชิงกระบวนการ คิดเป็นร้อยละ 38.994 และมีค่าเฉลี่ยคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ คิดเป็นร้อยละ 36.556

จุไรรัตน์ วัชรชาติ (2561, pp. 122-126) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรอง เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หลังการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรองกับเกณฑ์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนบรรหารแจ่มใสวิทยา จำนวน 1 ห้องเรียน รวม 32 คน ผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับ

การจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรอง มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่องวิถีเรียงสับเปลี่ยน ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

พิมสุภา ชินสา (2561, pp. 85-88) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้แบบ ACE เรื่อง พหุนาม ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เพื่อเปรียบเทียบความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ เรื่องพหุนามและเศษส่วนของ พหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้แบบ ACE กับเกณฑ์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนบรรหารแจ่มใสวิทยา จำนวน 1 ห้องเรียน รวม 35 คน ผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้ เชิงมโนทัศน์พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบ ACE มีความรู้ เชิงมโนทัศน์ เรื่องพหุนามและเศษส่วนของพหุนาม ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวน นักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

งานวิจัยต่างประเทศ

เอมส์ (Ames, 2011, pp. 60-61) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบการสอนเรขาคณิตใน ระดับมัธยมศึกษา โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad กับการสอนด้วยวิธีสอนแบบ ปกติ ที่มีผลต่อความรู้เชิงมโนทัศน์ ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และแรงจูงใจใน การเรียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 จำนวน 38 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่ม ทดลอง หรือกลุ่มที่เรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จำนวน 18 คน และกลุ่ม ควบคุม หรือกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนแบบปกติจำนวน 20 คน ผลการวิจัยในส่วนของความรู้เชิง มโนทัศน์พบว่า นักเรียนกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลองมีความรู้เชิงมโนทัศน์ก่อนและหลังเรียน ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติสำหรับแบบทดสอบแบบปรนัย แต่ในส่วนของ แบบทดสอบแบบอัตนัยพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมีคะแนนแบบทดสอบความรู้เชิงมโนทัศน์ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนมากกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ลิวี และเวลล์ (Livy & Vale, 2011, p. 32) ได้ศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ของ นักศึกษาครูชั้นปีที่ 1 ในเรื่องอัตราส่วน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาครูชั้นปีที่ 1 จำนวน 62 คน ผลการวิจัยพบว่านักศึกษาครูส่วนใหญ่ตอบคำถามไม่ถูกต้อง และมีตัวอย่างความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับอัตราส่วน เช่น การไม่เปลี่ยนหน่วยก่อนตอบคำถามตามที่โจทย์ต้องการ การเปลี่ยนหน่วยโดยสลับกันระหว่างการใช้หลักการคูณและหลักการหาร ใช้การบวกหรือการลบ ทั้งสองจำนวนในอัตราส่วนแล้วสรุปว่าอัตราส่วนใหม่ที่ได้เท่ากับอัตราส่วนเดิม เป็นต้น

คูล (Khoule, 2013, pp. 52-56) ได้ศึกษาความสำคัญของความรู้เชิงมโนทัศน์ และผลกระทบต่อความกังวลในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในระดับวิทยาลัย กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาระดับวิทยาลัยที่เรียนวิชาพีชคณิตในกลุ่มตักค้าง จำนวน 105 คน ในวิทยาลัยแห่งหนึ่งทาง ตะวันออกเฉียงเหนือของประเทศสหรัฐอเมริกา ผลการวิจัยสรุปได้ว่า การจัดการเรียนการสอน ที่เน้นความรู้เชิงมโนทัศน์สามารถส่งผลกระทบต่อความกังวลในการเรียนคณิตศาสตร์ ได้ดีกว่าการจัดการเรียนการสอนที่เน้นความรู้เชิงกระบวนการ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ของกลุ่มที่เรียนโดยเน้นความรู้เชิงมโนทัศน์สูงกว่ากลุ่มที่เน้นความรู้เชิงกระบวนการ

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความรู้เชิงมโนทัศน์ พบว่าความรู้เชิงมโนทัศน์ เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ แต่นักเรียนและครูบางส่วน มีความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งส่งผลให้นักเรียนประสบปัญหาในการเรียนคณิตศาสตร์ใน หลาย ๆ ด้าน ดังนั้นในระหว่างการจัดการเรียนการสอนจึงควรเน้นย้ำความรู้เชิงมโนทัศน์ หรือจัด กิจกรรมการเรียนการสอนที่ทำให้นักเรียนได้เห็นตัวอย่างของมโนทัศน์นั้นที่หลากหลาย ได้มีส่วนร่วม ร่วมในชั้นเรียนหรือค้นพบความรู้ด้วยตนเอง จนเกิดภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่ถูกต้อง จากที่กล่าวมานี้ ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ของนักเรียน ที่เรียนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ เนื่องจากเป็นกรกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ สำรวจ จนสามารถค้นพบและเกิดภาพลักษณ์มโนทัศน์ด้วยตนเอง และใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็น โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ที่จะทำให้นักเรียนสามารถเห็นภาพตัวอย่างที่สอดคล้องหรือไม่สอดคล้องกับมโนทัศน์ได้อย่างหลากหลายและรวดเร็วผ่านการเคลื่อนไหว

4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

4.1 ความหมายของการพิสูจน์

การพิสูจน์มีความสำคัญในการเป็นเครื่องมือที่ทำให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการให้ เหตุผล เป็นความรู้พื้นฐานที่มีความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับขั้นที่สูงขึ้น อีกทั้งยังเป็น เครื่องมือในการตรวจสอบความถูกต้องของข้อความต่าง ๆ ก่อนที่จะสรุปข้อความนั้นเป็น ทฤษฎีบท (เสฐฐวุฒิ เพ็งเจริญ, 2561, p. 12) ดังนั้นการพิสูจน์จึงเป็นกระบวนการที่สำคัญที่ทำให้ เกิดการต่อยอดและสร้างองค์ความรู้ใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์มากมาย จากการศึกษาความหมาย ของการพิสูจน์พบว่า มีผู้กล่าวถึงความหมายของการพิสูจน์ไว้หลายท่าน ดังนี้

สไตล์เลียนิเดส (Stylianides, 2007, p. 291) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์ เป็นการอ้าง เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เป็นลำดับขั้นตอนเพื่อยืนยันข้อความทางคณิตศาสตร์

สมวงษ์ แปลงประสพโชค (2551, p. 9) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์ เป็นการแสดงความสมเหตุสมผลของทฤษฎีบท

สตรากาลินู (Stragalinou, 2012, p. 3) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างมีระเบียบ เป็นลำดับขั้นตอน และสมเหตุสมผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปโดยทั่วไป

มอริส (Morris, 2016, p. 47) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คือ การให้คำอธิบายที่น่าเชื่อถืออย่างสมบูรณ์ว่าข้อสรุปทางคณิตศาสตร์นั้นถูกต้อง ในการเขียนคำอธิบายนั้น จะต้องมีการเขียนอย่างระมัดระวังเพื่อให้เป็นที่ยอมรับและหาข้อหักล้างไม่ได้ โดยใช้กฎของตรรกศาสตร์

ฟาร์เมอร์ (Farmer, 2018, p. 2) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์ คือ การแสดงให้เห็นว่าข้อความทางคณิตศาสตร์มีความสมเหตุสมผล โดยการอ้างเหตุผลอย่างเป็นลำดับจากชุดของข้อเท็จจริงที่เราทราบอยู่แล้ว

จากความหมายของการพิสูจน์ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ความหมายของการพิสูจน์ว่าเป็นการแสดงให้เห็นว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริง โดยยกข้อความที่นำไปสู่ข้อสรุปอย่างเป็นลำดับขั้นตอน มีการอ้างเหตุผลโดยใช้สัญลักษณ์ บทนิยาม ทฤษฎีบท หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ และเขียนโดยใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อย่างถูกต้อง

4.2 รูปแบบของการพิสูจน์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554, pp. 4-5) ได้แบ่งรูปแบบของการพิสูจน์ออกเป็น 2 รูปแบบ ได้แก่

1. การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง เป็นการพิสูจน์ที่ต้องใช้เหตุผลเพื่อแสดงว่าเมื่อเหตุเป็นจริงแล้ว เหตุนั้นทำให้ผลเป็นจริงเสมอ โดยเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้ แล้วอาศัยบทนิยาม สัญลักษณ์ ข้อความที่เคยพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงและสมบัติต่าง ๆ อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่าง ประกอบกันมาให้เกิดผล เพื่อให้ได้ว่าผลที่ต้องการเป็นจริง

2. การพิสูจน์ว่าข้อความไม่จริง ทำได้โดยการยกตัวอย่างที่เป็นจริงตามสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือเหตุ และแสดงให้เห็นได้ว่าผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริงตามที่ต้องการ

ทศพร คล้ายอุดม (2555, pp. 4-11) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์มี 2 รูปแบบ ได้แก่

1. การพิสูจน์แบบตาราง ประกอบด้วย 2 สดมภ์ ได้แก่ ส่วนที่แสดงข้อความทางคณิตศาสตร์ และส่วนที่แสดงเหตุผล

2. การพิสูจน์แบบบรรยายความ โดยการเขียนข้อความที่เชื่อมต่อกัน ข้อความแรกเป็นเหตุ แล้วใช้บทนิยาม สมบัติหรือทฤษฎีบทในการสรุปผล กล่าวคือ ข้อความที่ตามมาจะทำหน้าที่เป็นเหตุในการพิสูจน์ต่อไป จนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

สำหรับงานวิจัยนี้ เนื่องจากเป็นการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยจึงขอเลือกใช้รูปแบบการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง และใช้การพิสูจน์แบบตาราง

4.3 วิธีการพิสูจน์

การพิสูจน์มีหลากหลายวิธี ขึ้นอยู่กับรูปแบบของข้อความที่พิสูจน์ เนื่องจากในงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องวงกลม ซึ่งในบทเรียนมุ่งเน้นการพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \rightarrow q$ ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษากระบวนการพิสูจน์ของข้อความในแบบ $p \rightarrow q$ ดังนี้

เวลล์แมน (Velleman, 2006, pp. 90-91) กล่าวว่า การพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \rightarrow q$ สามารถทำได้ 2 วิธี ดังนี้

1. สมมติว่า p เป็นจริง แล้วพิสูจน์ว่า q เป็นจริง หรือที่เรียกว่า การพิสูจน์ทางตรง
2. สมมติว่า q เป็นเท็จ แล้วพิสูจน์ว่า p เป็นเท็จ หรือที่เรียกว่า การพิสูจน์โดยการแย้งกลับที่

พัฒน์ อุดมกะวานิช (2555, pp. 41-45) กล่าวว่า การพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \rightarrow q$ สามารถทำได้ 2 วิธี คือ โดยตรง และโดยอ้อม ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การพิสูจน์โดยตรง เริ่มต้นด้วยสมมติ p (เป็นจริง) และพิสูจน์ให้ได้ q (เป็นจริง) นั่นคือ มี q เป็นบรรทัดสุดท้ายของบทพิสูจน์
2. การพิสูจน์โดยอ้อม แบ่งเป็น 2 วิธี ได้แก่

1) การพิสูจน์โดยการแย้งกลับที่ (proof by contrapositive) คือ การเปลี่ยนจากการพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \rightarrow q$ เป็น $\sim q \rightarrow \sim p$ แทน ทั้งนี้เพราะ $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ (กฎการแย้งกลับที่)

2) การพิสูจน์โดยความขัดแย้งกัน (proof by contradiction) คือ การพิสูจน์โดยเริ่มด้วยการสมมติ $p \wedge \sim q$ แล้วนำไปสู่ข้อขัดแย้ง กล่าวคือ เป็นการแสดงว่า $p \wedge \sim q \Rightarrow C$

สำหรับงานวิจัยนี้ จะใช้การพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \rightarrow q$ โดยใช้วิธีการพิสูจน์โดยตรง นั่นคือ ยอมรับว่าข้อความ p เป็นจริง แล้วต้องการแสดงข้อความ q โดยใช้สัจพจน์บทนิยาม ทฤษฎีบท หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

4.4 แนวทางการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์

มีนักการศึกษาหลายท่าน ได้กล่าวถึงแนวทางการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ไว้ดังนี้

ฮอยส์ และโจนส์ (Hoyles & Jones, 1998, p. 126) ได้กล่าวถึง แนวทางการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ไว้ว่า ครูอาจจัดการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตร่วมกับวิธีการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน

ฮานนา (Hanna, 2002, p. 61) ได้กล่าวถึง สิ่งที่ครูควรคำนึงถึงในการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนไว้ดังนี้

1. ครูควรให้นักเรียนตระหนักถึงการเขียนพิสูจน์ให้มีลักษณะเป็นการเขียนที่เป็นทางการ กล่าวคือ การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้อง เพื่อเป็นเครื่องมือในการชี้แจงความเข้าใจที่ถูกต้องในการอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ เนื่องจาก เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจในการใช้ภาษา และสัญลักษณ์ในการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องแล้ว การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนย่อมเกิดประสิทธิภาพขึ้นอย่างมาก

2. ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ อาจไม่เพียงพอที่ครูจะเป็นฝ่ายออกแบบกิจกรรมเพื่อสร้างประสบการณ์ให้กับนักเรียนเพียงฝ่ายเดียวเท่านั้น แต่สิ่งที่สำคัญคือการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดหรือคำตอบ เพราะคำตอบของนักเรียนจะเป็นสิ่งสะท้อนพัฒนาการของนักเรียนให้ครูได้ทราบ แล้วนำไปเป็นแนวทางในการปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนต่อไป คำตอบของนักเรียนอาจมีข้อผิดพลาดมากมาย ครูจึงควรฝึกให้นักเรียนได้เรียนรู้เหตุผลของข้อผิดพลาดเหล่านั้น เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดความพยายามเข้าใจในบทเรียนและเรียนรู้ข้อควรระวังมากขึ้น ซึ่งทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาความสามารถในการอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ได้

3. ในการฝึกให้นักเรียนมีความแม่นยำในเนื้อหาคณิตศาสตร์ ครูอาจเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พบกับปัญหาที่ให้นักเรียนเกิดความรู้สึกทำทนาย หรือชวนให้นักเรียนคิดในสิ่งที่แตกต่างออกไป เนื่องจากในบางครั้งการนำเสนอแต่สถานการณ์ที่ง่ายเกินไป หรือซ้ำซาก

อาจทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ดีต่อการทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ ๆ หรือทำให้นักเรียนไม่เห็นแนวทางการแก้ปัญหาที่แตกต่างได้ สำหรับการอธิบายในปัญหาต่าง ๆ นั้น ครูไม่ควรอธิบายทุกขั้นตอน แต่อาจใช้การยกตัวอย่างบางส่วน ใช้คำถาม และทิ้งบางส่วนให้นักเรียนได้ร่วมกันคิด จะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิด แก้ปัญหา นำไปสู่คำตอบด้วยตนเองได้ดียิ่งขึ้น

4. ในการพิสูจน์ บางครั้งนักเรียนอาจเกิดความสับสนในการเชื่อมโยงเนื้อหาต่าง ๆ ซึ่งอาจไม่เกี่ยวข้องกับบทเรียน ดังนั้นครูควรให้คำแนะนำกับนักเรียน เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ในการตระหนักถึงการจำกัดเนื้อหา หรือ เลือกพิจารณาแนวทางที่เหมาะสมในการพิสูจน์ในข้อนั้น ๆ

ก๊อดดิง คินด์ และรอยเตอร์ (Goddijn, Kindt, & Reuter, 2014, pp. 5-6) ได้กล่าวถึงแนวทางการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตว่า ถึงแม้การใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตไม่ได้ให้คำแนะนำโดยตรงใด ๆ สำหรับการพิสูจน์ แต่การใช้โปรแกรมดังกล่าว จะช่วยอำนวยความสะดวกให้นักเรียนสามารถสังเกตการเปลี่ยนแปลงของค่าที่ได้จากการวัด เพื่อหาความสัมพันธ์ต่าง ๆ ได้ อีกทั้งยังช่วยให้นักเรียนสามารถมองหาองค์ประกอบที่มีความคงที่ จากการเปลี่ยนแปลงค่าที่ได้จากการวัดต่าง ๆ ซึ่งสามารถช่วยเป็นหลักฐานในการกระตุ้นการยกข้อความในการพิสูจน์ของนักเรียนได้เป็นอย่างดี

แฟรงก์ และมารีอ็อตตี (Frank & Mariotti, 2010, p. 231) ได้กล่าวว่า มิงานวิจัยหลายชิ้นที่ระบุว่า การใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตจะช่วยให้นักเรียนได้ค้นพบแนวทางในการแก้ปัญหา และช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ได้ง่ายยิ่งขึ้น

จากการศึกษาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ พบว่ามีนักการศึกษาหลายท่านกล่าวว่า การใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตสามารถกระตุ้นให้นักเรียนเห็นแนวทางในการพิสูจน์ได้ สำหรับในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต คือ โปรแกรม GeoGebra ประกอบการเรียนการสอน เพื่อเป็นเครื่องมือช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเห็นแนวทางการพิสูจน์ ร่วมกับวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ซึ่งเป็นกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้แก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยอันนำไปสู่การสรุปองค์ความรู้ใหม่ด้วยตนเอง และกระตุ้นให้นักเรียนได้เกิดกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ผ่านการทำกิจกรรมในชั้นเรียน ซึ่งสอดคล้องกับฮอยส์ และโจนส์ (Hoyle & Jones, 1998, p. 126) ที่กล่าวว่า การสอนที่ส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน นอกจากการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเพียงอย่างเดียวแล้ว ควรจัดให้มีปัจจัยอื่น ๆ ในชั้นเรียน ที่ส่งเสริมกระบวนการคิดของนักเรียน และสอดคล้องกับ ฮานนา (Hanna, 2002,

p. 61) ที่กล่าวถึง สิ่งที่ครูควรคำนึงถึงในการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนว่า ครูอาจเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พบกับสถานการณ์ใหม่ ๆ ที่ทำให้นักเรียนเกิดความรู้สึกท้าทาย หรือชวนให้นักเรียนได้คิดในสิ่งที่แตกต่างออกไป

4.5 แนวทางการวัดความสามารถในการพิสูจน์

ขวัญ เพ็ญชัย (2547, p. 47) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไขไว้ดังนี้

ตาราง 1 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของ ขวัญ เพ็ญชัย

คะแนน	การแสดงความสามารถในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้กฎของเงื่อนไข
3	ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ <ul style="list-style-type: none"> - เขียนสมมติฐานของการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์) - รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข
3	ขั้นนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ <ul style="list-style-type: none"> - นำบทนิยาม ทฤษฎีบท หรือกฎ มาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์ - นำสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ - ใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีอื่น ๆ มาช่วยในการพิสูจน์
4	ขั้นแสดงการพิสูจน์ <ul style="list-style-type: none"> - ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ถูกต้อง - ใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์ ถูกต้อง - เขียนการพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนจนได้ผลสรุป - เขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไขถูกต้อง - การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์

สไตล์เลียนิเดส (Stylianides, 2007, p. 291) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบในการวัดความสามารถในการพิสูจน์ดังนี้

1. ใช้ข้อความที่ได้รับการยอมรับว่าเป็นจริง โดยไม่ต้องมีเหตุผลเพิ่มเติม
2. ใช้รูปแบบของการให้เหตุผลหรือข้อโต้แย้งที่ถูกต้องและเป็นที่ยอมรับ
3. ใช้การสื่อสารในรูปของสัญลักษณ์หรือตัวแทนที่เป็นที่ยอมรับ

แมคโครน และมาร์ติน (McCrone & Martin, 2009, p. 205) ได้กล่าวถึง 6 หลักการในการวัดความเข้าใจในการพิสูจน์ของนักเรียน ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

หลักการที่ 1 เข้าใจว่าข้อความทางคณิตศาสตร์จะยอมรับว่าเป็นจริงเมื่อสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงโดยไม่มีข้อยกเว้น หรือข้อความทางคณิตศาสตร์ไม่เป็นจริงเมื่อมีตัวอย่างค้านอย่างน้อย 1 ตัวอย่าง

หลักการที่ 2 บทบาทของการพิสูจน์ ประกอบด้วย การยกข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่ยอมรับ และการอธิบายว่าเพราะเหตุใดข้อความนั้นเป็นจริง

หลักการที่ 3 ในการพิสูจน์ต้องตรวจสอบให้แน่ชัดว่าสามารถแสดงว่าเป็นจริงทุกกรณี หากการเขียนพิสูจน์ไม่ครอบคลุมทุกกรณีอาจจะต้องมีการแบ่งกรณีในการพิสูจน์

หลักการที่ 4 การพิสูจน์จะต้องมีการเรียงลำดับอย่างสมเหตุสมผลจากสมมติฐานไปยังข้อสรุป และอ้างเหตุผลอย่างถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์

หลักการที่ 5 ตระหนักได้ว่าข้อความทางคณิตศาสตร์จะสมมูลกับข้อความแย้งกลับที่ แต่จะไม่สมมูลกับบทกลับของข้อความนั้น

หลักการที่ 6 รูปภาพเป็นเครื่องมือที่ช่วยในการพิสูจน์ได้ แต่ก็มีข้อจำกัด เช่น การวาดรูปภาพเดี่ยวอาจไม่มีความหลากหลาย มองไม่เห็นครบทุกกรณี หรือมีลักษณะเป็นกรณีเฉพาะ

จำเริญ อนันตรธรรมรส (2553, p. 48) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ไว้ดังนี้

ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของ จำเริญ อนันตธรรมรส

ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
0	ไม่เขียนการพิสูจน์เลย หรือเขียนสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์
1	เขียนพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องอย่างน้อย 1 แห่ง แต่ไม่สามารถแสดงการพิสูจน์ได้จนสำเร็จ
2	เขียนพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผล เพียงพอที่จะทำให้เห็นแนวทางในการพิสูจน์ที่ถูกต้องได้ แต่ยังคงพบข้อผิดพลาดหลายประการซึ่งทำให้การพิสูจน์ไม่ถูกต้อง
3	เขียนพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องเกือบทั้งหมด แต่มีข้อผิดพลาดเพียงเล็กน้อย มิฉะนั้นการพิสูจน์จะถูกต้องสมบูรณ์
4	เขียนพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมด ไม่มีข้อผิดพลาดเลย

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้แบบทดสอบแบบอัตนัยในการวัดความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน และในการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ได้แบ่งความสามารถในการพิสูจน์ออกเป็น 4 ด้าน โดยใช้แนวคิดของ ขวัญ เพ็ญชัย (2547, p. 47) สไตล์เลียนิเดส (Stylianides, 2007, p. 291) และแมคโครน และมาร์ติน (Mccrone & Martin, 2009, p. 205) และปรับให้เข้ากับเนื้อหาในการพิสูจน์สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ดังนี้

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหา คือ ความสามารถในการเขียนระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. ความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์ คือ ความสามารถในการเขียนข้อความที่สามารถนำไปสู่ผลสรุปว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริงได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอนสมเหตุสมผล
3. ความสามารถในการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ คือ ความสามารถในการเขียนเหตุผลประกอบข้อความในข้อ 2. โดยใช้บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้อย่างถูกต้อง
4. ความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ คือ ความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

สำหรับเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ในงานวิจัยนี้ จะแสดงไว้ใน
หน้า 55

4.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ งานวิจัยในประเทศ

ขวัญ เพ็ญชัย (2547, p. 66) ได้ศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี โดยมีความมุ่งหมายในการวิจัยเพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 และศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และเจตคติของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 (หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์) ตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ประจำปีการศึกษา 2546 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 29 คน ผลการวิจัยพบว่า นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่เรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ที่สอบผ่านเกณฑ์คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และเจตคติของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่มีต่อชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีความคิดเห็นอยู่ในระดับเห็นด้วยมาก

จำเริญ อนันตธรรมรส (2553, pp. 70-72) ได้ศึกษาผลของการใช้โมเดลเฟสเมทออดคอมปิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยมีความมุ่งหมายของการวิจัย เพื่อศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมทออดคอมปิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ และเปรียบเทียบความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมทออดคอมปิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดราชบพิธ ปีการศึกษา 2553 จำนวน 2 ห้องเรียน สำหรับผลการวิจัยในด้านของความสามารถในการเขียนพิสูจน์พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมทออดคอมปิเนชันมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เสฏฐวุฒิ เพ็งเจริญ (2561, pp. 48-50) ได้ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม โดยมีความมุ่งหมายของการวิจัย เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 12 ห้องเรียน จำนวน 44 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังจากเรียนผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

งานวิจัยต่างประเทศ

ซาอีด (Saeed, 1996, p. 88) ได้ศึกษาความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตระดับปริญญาตรีและความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์กับทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยมีความมุ่งหมายของการวิจัย เพื่อศึกษาความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตระดับปริญญาตรี และความสัมพันธ์ระหว่างทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตระดับปริญญาตรีจำนวน 101 คนที่เรียนในช่วงฤดูใบไม้ผลิ ปี 1996 ที่มหาวิทยาลัย Ohio ผลการวิจัยพบว่า นิสิตระดับปริญญาตรีในกลุ่มตัวอย่างน้อยกว่าร้อยละ 40 เข้าใจความหมายของการพิสูจน์อย่างชัดเจน นิสิตประมาณร้อยละ 38 มองว่าทฤษฎีบทที่มองเห็นได้ค่อนข้างชัดเจนว่าเป็นจริงไม่จำเป็นต้องพิสูจน์ นิสิตกว่าร้อยละ 50 ไม่สามารถพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งได้ และนิสิตมากกว่าร้อยละ 70 ไม่สามารถพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งกลับที่ได้ และไม่สามารถตระหนักได้ว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัยในการสรุปเป็นกรณีทั่วไปไม่เพียงพอสำหรับการพิสูจน์ว่าข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นจริง นอกจากนี้ผลการวิจัยพบว่า ความเข้าใจในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เลดดี (Leddy, 2001, pp. 95-107) ได้ศึกษาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา โดยมีความมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เมือง Ontario ประเทศแคนาดา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 70 คน ผลการวิจัยสามารถสรุปสาระสำคัญได้ดังนี้

1. ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน เช่น รูปแบบของปัญหาในการพิสูจน์ คือ หากเป็นปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคยนักเรียนจะสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ดีกว่า การเขียนอธิบายเหตุผลในการยกข้อความในการพิสูจน์จะช่วยให้นักเรียนสามารถทำความเข้าใจการพิสูจน์ได้ดีกว่า
2. นักเรียนขาดความชำนาญในการพิสูจน์และนักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ดีกว่าการพิสูจน์ทางพีชคณิต
3. นักเรียนที่มีความสามารถในการพิสูจน์ดีกว่าจะมองว่าการพิสูจน์เป็นเครื่องมือสำคัญในการยอมรับข้อความทางคณิตศาสตร์
4. การใช้เทคโนโลยีในการจัดการเรียนการสอนจะสามารถกระตุ้นให้นักเรียนพยายามหาเหตุผลในการพิสูจน์ได้ แต่ยังไม่สามารถช่วยให้นักเรียนอธิบายการพิสูจน์นั้นได้มากนัก

ชินแนปปาน เอกานายาคี และบราวน์ (Chinnappan, Ekanayake, & Brown, 2009, pp. 882-885) ได้ศึกษาความรู้ที่ใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในประเทศศรีลังกา โดยมีความมุ่งหมายของวิจัย เพื่อศึกษาความรู้ที่นักเรียนนำมาใช้ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยพิจารณาความรู้เป็น 3 ด้าน ได้แก่ ความรู้ด้านเนื้อหาเรขาคณิต ทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และทักษะในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 166 คน ผลการวิจัยพบว่า ความรู้ทั้ง 3 ด้านมีบทบาทที่สำคัญในการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ กล่าวคือ ในขณะที่นักเรียนเรียนรู้เนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิต นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และทักษะในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้วย

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ พบว่ามีผู้สนใจศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เนื่องจากความสามารถในการพิสูจน์เป็นสิ่งสำคัญในการเรียนเรขาคณิตและในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ นักเรียนควรได้รับการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ เพื่อพัฒนากระบวนการให้เหตุผล ซึ่งจะทำให้นักเรียนเห็นการเชื่อมโยงเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ สามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น ดังนั้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนหลังเรียนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เนื่องจากเป็นวิธีการสอนที่กระตุ้นให้นักเรียนได้ค้นพบองค์ความรู้ด้วยตนเอง และใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นอีกหนึ่งเครื่องมือที่จะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนสำรวจและค้นหาเหตุผลที่ทำให้องค์ความรู้นั้นเป็นจริง

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
3. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

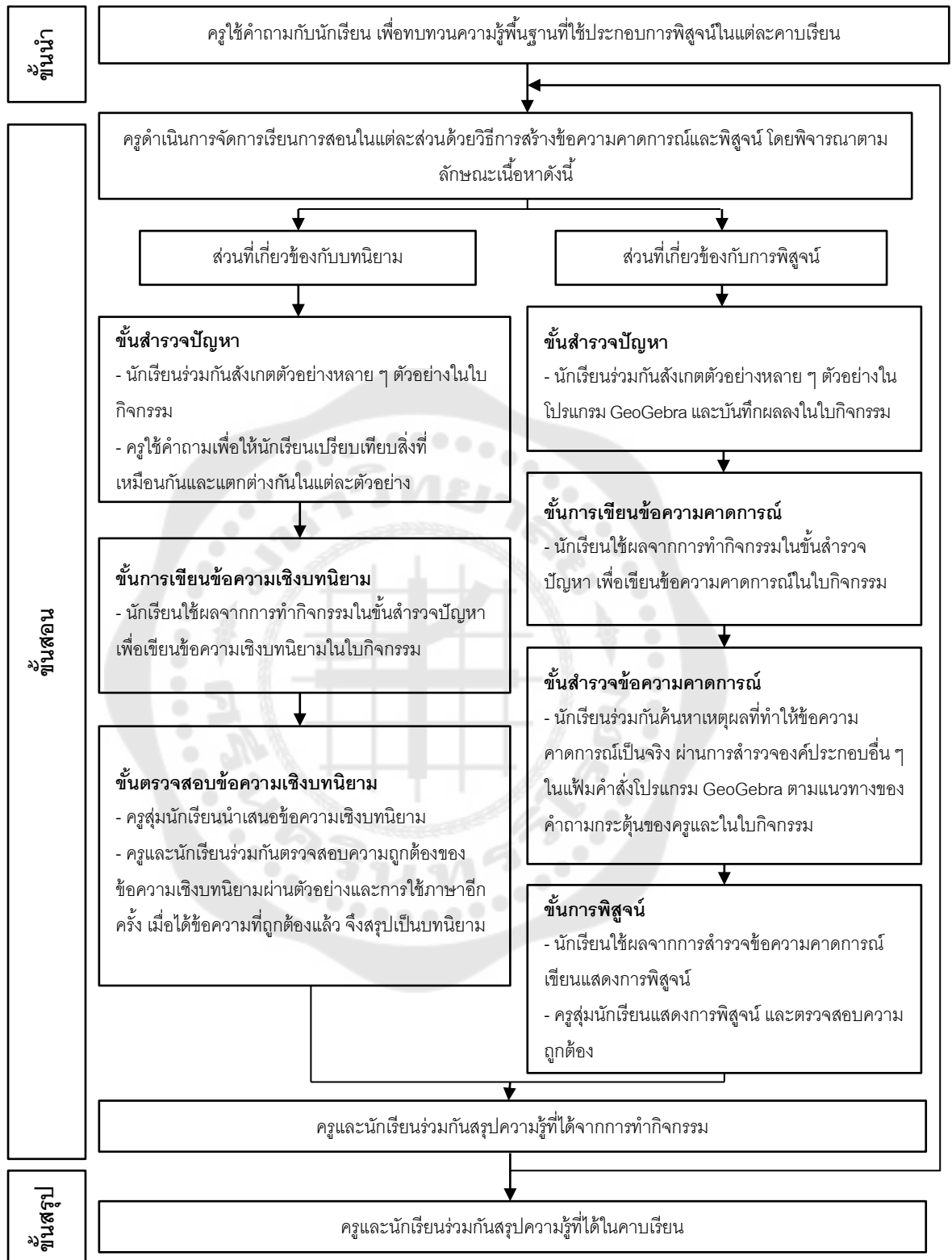
ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โดยสุ่มนักเรียน 1 ห้องเรียน จากนักเรียนทั้งหมด 6 ห้องเรียน โดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบคละความสามารถ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. การกำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความ คาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ในการดำเนินการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดกรอบแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนโดยใช้กระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ดังนี้



ภาพประกอบ 2 กรอบแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

3. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม และแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีรายละเอียดในการดำเนินการ ดังนี้

3.1 แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม โดยอิงเนื้อหาจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จำนวน 6 แผน แผนละ 2 คาบเรียน คาบเรียนละ 45 นาที และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ โดยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

3.1.1 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ และการใช้โปรแกรม GeoGebra ในการจัดการเรียนการสอน เพื่อเป็นแนวทางในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

3.1.2 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบด้วย มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง การวัดและประเมินผล เป็นต้น

3.1.3 ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้ เรื่อง วงกลม รวมทั้งหนังสือคู่มือครูในการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

3.1.4 ศึกษาเอกสารในการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ซึ่งประกอบด้วย

- 1) จุดประสงค์การเรียนรู้
- 2) สาระการเรียนรู้
- 3) สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้
- 4) กิจกรรมการเรียนรู้
- 5) การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

6) กิจกรรมในแฟ้มคำสั่ง

3.1.5 กำหนดจุดประสงค์และขอบเขตของการจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน เรื่อง วงกลม ที่สอดคล้องกับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

3.1.6 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม โดยอิงเนื้อหาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 6 แผน รวม 12 คาบเรียน รายละเอียดของแผนการจัดการเรียนรู้ที่จัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในแต่ละแผนทั้ง 6 แผน แสดงดังตาราง 3



ตาราง 3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่จัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

แผน	จุดประสงค์	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน	สื่อการเรียนรู้
1	<p>1. บอกความหมายและระบุมุมในครั้งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลมได้</p> <p>2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมในครั้งวงกลมได้</p>	<p>ขั้นนำ</p> <p>1. ทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับส่วนประกอบของวงกลม และความรู้พื้นฐานที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท ได้แก่ สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว</p> <p>ขั้นสอน</p> <p>2. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับบทนิยามของมุมในครั้งวงกลมตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>3. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “มุมในครั้งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือ 1 มุมฉาก” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>4. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับบทนิยามของมุมที่จุดศูนย์กลางตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>5. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับบทนิยามของมุมในส่วนโค้งของวงกลมตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>ขั้นสรุป</p> <p>6. นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญที่ได้จากบทเรียนผ่านการตอบคำถามของครู</p>	<p>1. เพิ่มในโปรแกรม GeoGebra</p> <p>แสดงรูปของวงกลม และรูปสามเหลี่ยมประกอบ</p> <p>การทบทวน</p> <p>2. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง มุมในครั้งวงกลม</p> <p>3. ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม</p> <p>4. เพิ่มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติในโปรแกรม GeoGebra</p> <p>เรื่อง มุมในครั้งวงกลม</p>

ตาราง 3 (ต่อ)

แผน	จุดประสงค์	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน	สื่อการเรียนรู้
2	<p>1. เขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติของมุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลมได้</p> <p>2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลมได้</p>	<p>ขั้นนำ</p> <p>1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทที่ได้เรียนมาแล้ว</p> <p>ขั้นสอน</p> <p>2. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน” ผ่านการทำกิจกรรมสำรวจในโปรแกรม GeoGebra</p> <p>3. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>4. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ส่วนโค้งยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อ มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน” ผ่านการทำกิจกรรมสำรวจในโปรแกรม GeoGebra</p> <p>5. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p>	<p>1. ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลม</p> <p>2. เพิ่มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลม</p> <p>3. ใบงานที่ 1 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลม</p>

ตาราง 3 (ต่อ)

แผน	จุดประสงค์	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน	สื่อการเรียนรู้
		<p>ขั้นสรุป</p> <p>6. นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญที่ได้จากบทเรียนผ่านการตอบคำถามของครู</p>	
3	<p>1. เขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติของคอร์ดได้</p> <p>2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ดได้</p>	<p>ขั้นนำ</p> <p>1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันทบทวนความรู้พื้นฐานที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท ได้แก่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม</p> <p>ขั้นสอน</p> <p>2. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าว ว่า “ถ้าคอร์ดสองคอร์ดยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน และส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>3. ครูให้นักเรียนพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทที่ได้ในข้อ 2 เป็นแบบฝึกหัด</p> <p>4. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าว ว่า “ถ้าส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>5. ครูให้นักเรียนพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทที่ได้ในข้อ 4 เป็นแบบฝึกหัด</p>	<p>1. เพิ่มในโปรแกรม GeoGebra แสดงรูปสามเหลี่ยมประกอบการทบทวน</p> <p>2. ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ด (1)</p> <p>3. เพิ่มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง คอร์ด</p>

ตาราง 3 (ต่อ)

แผน	จุดประสงค์	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน	สื่อการเรียนรู้
		<p>6. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าว ว่า “เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ด ของวงกลม จะผ่านจุดศูนย์กลางของ วงกลมนั้น” ตามวิธีการสร้างข้อความ คาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>ขั้นสรุป</p> <p>7. นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญที่ได้จาก บทเรียนผ่านการตอบคำถามของครู</p>	
4	<p>1. เขียนข้อความ คาดการณ์เกี่ยวกับ สมบัติของคอร์ดได้</p> <p>2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้องกับคอร์ดได้</p>	<p>ขั้นนำ</p> <p>1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกัน ทบทวนทฤษฎีบทที่ได้เรียนมาแล้ว</p> <p>ขั้นสอน</p> <p>2. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับวิธีการหาจุด ศูนย์กลางของวงกลมตามวิธีการสร้าง ข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>3. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าว ว่า “ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้น ยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่าง จากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะ เท่ากัน” ตามวิธีการสร้างข้อความ คาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>4. ครูให้นักเรียนพิสูจน์บทกลับของ ทฤษฎีบทที่ได้ในข้อ 3 เป็นแบบฝึกหัด</p> <p>ขั้นสรุป</p> <p>5. นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญที่ได้จาก บทเรียนผ่านการตอบคำถามของครู</p>	<p>1. ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทที่ เกี่ยวข้องกับคอร์ด (2)</p> <p>2. เพิ่มคำสั่ง กิจกรรมภาคปฏิบัติ ในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง คอร์ด</p>

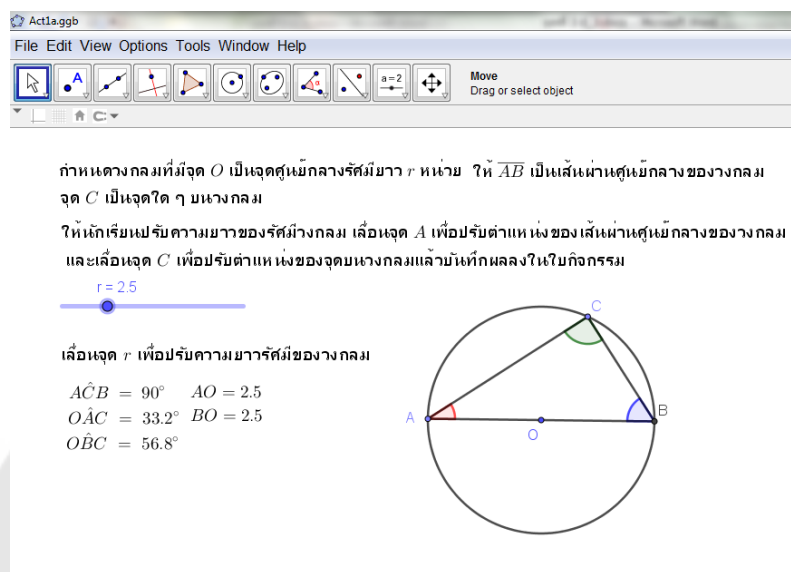
ตาราง 3 (ต่อ)

แผน	จุดประสงค์	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน	สื่อการเรียนรู้
5	<p>1. บอกความหมายและระบุเส้นสัมผัสวงกลมได้</p> <p>2. เขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติของเส้นสัมผัสวงกลมได้</p> <p>3. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสวงกลมได้</p>	<p>ขั้นนำ</p> <p>1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันทบทวนทฤษฎีบทที่ได้เรียนมาแล้ว</p> <p>ขั้นสอน</p> <p>2. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับบทนิยามของเส้นสัมผัสวงกลมตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>3. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “ในบรรดาส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดจุดหนึ่งไปยังเส้นตรงเส้นหนึ่ง ส่วนของเส้นตรงที่สั้นที่สุดคือเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรงนั้น” ผ่านการทำกิจกรรมสำรวจในโปรแกรม GeoGebra</p> <p>4. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “เส้นสัมผัสวงกลม จะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>5. ครูให้นักเรียนเขียนบทกลับของทฤษฎีบทที่ได้ในข้อ 4 แล้วสำรวจว่าเป็นจริงผ่านการทำกิจกรรมสำรวจในโปรแกรม GeoGebra</p> <p>6. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับวิธีการสร้างเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดที่กำหนดให้ ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>ขั้นสรุป</p> <p>7. นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญที่ได้จากบทเรียนผ่านการตอบคำถามของครู</p>	<p>1. ใบกิจกรรมที่ 6 เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม</p> <p>2. ใบกิจกรรมที่ 7 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสวงกลม (1)</p> <p>3. เพิ่มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม</p>

ตาราง 3 (ต่อ)

แผน	จุดประสงค์	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน	สื่อการเรียนรู้
6	<p>1. ระบุมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัส และมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดได้</p> <p>2. เขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติของเส้นสัมผัสวงกลมได้</p> <p>3. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสวงกลมได้</p>	<p>ขั้นนำ</p> <p>1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันทบทวนทฤษฎีบทที่ได้เรียนมาแล้ว</p> <p>ขั้นสอน</p> <p>2. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่ “ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด ๆ หนึ่งภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกันจะยาวเท่ากันและมีได้สองเส้น” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>3. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับลักษณะของมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส และมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>4. นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่กล่าวว่ “มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัส จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น” ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์</p> <p>ขั้นสรุป</p> <p>5. นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญที่ได้จากบทเรียนผ่านการตอบคำถามของครู</p>	<p>1. ใบกิจกรรมที่ 8 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสวงกลม (2)</p> <p>2. ใบกิจกรรมที่ 9 เรื่อง เส้นสัมผัสและคอร์ด</p> <p>3. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม</p>

3.1.7 สร้างแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เพื่อใช้ประกอบในการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งมีตัวอย่างของแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra แสดงดังภาพประกอบ 3 และภาพประกอบ 4



กำหนดวงกลมที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาว r หน่วย ให้ \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม จุด C เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม

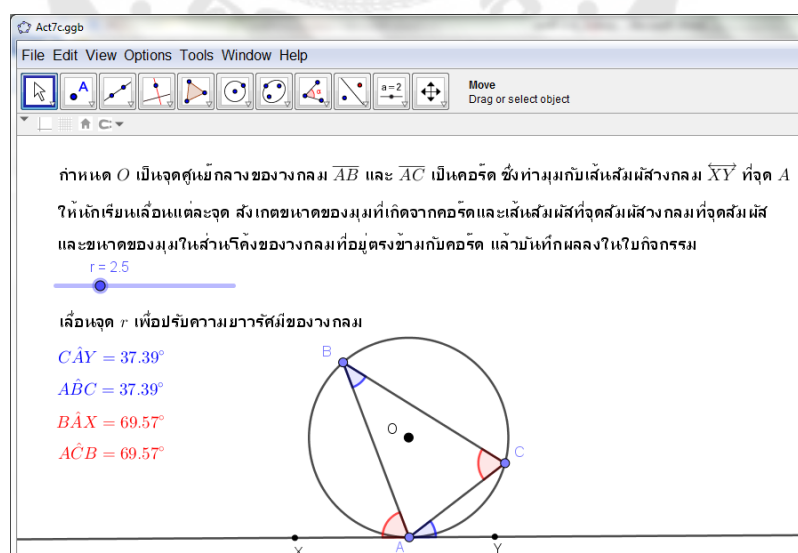
ให้ถักเริ่มปรับความยาวของรัศมีวงกลม เลื่อนจุด A เพื่อปรับตำแหน่งของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และเลื่อนจุด C เพื่อปรับตำแหน่งของจุดบนวงกลมแล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

$r = 2.5$

เลื่อนจุด r เพื่อปรับความยาวรัศมีของวงกลม

$\angle ACB = 90^\circ$ $AO = 2.5$
 $\angle OAC = 33.2^\circ$ $BO = 2.5$
 $\angle OBC = 56.8^\circ$

ภาพประกอบ 3 ตัวอย่างแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม



กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{AC} เป็นคอร์ด ซึ่งทำมุมกับเส้นสัมผัสที่จุด A ที่จุด X และ Y ให้ถักเริ่มเลื่อนแต่ละจุด สังเกตขนาดของมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส และขนาดของมุมในเส้นรัศมีของวงกลมที่มุดตรงข้ามกับคอร์ด แล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

$r = 2.5$

เลื่อนจุด r เพื่อปรับความยาวรัศมีของวงกลม

$\angle CAY = 37.39^\circ$
 $\angle ABC = 37.39^\circ$
 $\angle BAX = 69.57^\circ$
 $\angle ACB = 69.57^\circ$

ภาพประกอบ 4 ตัวอย่างแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม

3.1.8 นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม เสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

3.1.9 นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม ที่ได้รับการตรวจสอบมาดำเนินการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของกรรมการควบคุมปริญญาโทแล้วเสนอให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความถูกต้องของภาษาที่ใช้ และการวัดประเมินผล

3.1.10 ปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

3.1.11 นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วไปทดลองสอนกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 40 คน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของภาษาและเวลาที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้

3.1.12 นำแผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ที่ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วเสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อตรวจสอบอีกครั้งก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3.2. แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อใช้ทดสอบภายหลังจากการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม โดยมีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

3.2.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม ประกอบด้วย ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง การวัดและประเมินผล เป็นต้น

3.2.2 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์

3.2.3 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ และวิเคราะห์ขอบเขตเนื้อหา

3.2.4 สร้างแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งประกอบด้วย

1) ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 16 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบที่ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม (ใช้จริง 7 ข้อ) โดยมีเกณฑ์การตรวจให้คะแนนดังนี้

คะแนน 1 หมายถึง เลือกคำตอบถูกต้อง

คะแนน 0 หมายถึง เลือกคำตอบไม่ถูก หรือเลือกคำตอบมากกว่า 1 ตัวเลือก หรือไม่เลือกตอบ

2) ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 10 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบที่ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม (ใช้จริง 7 ข้อ) โดยมีเกณฑ์การตรวจให้คะแนนดังนี้

คะแนน 1 หมายถึง เขียนคำตอบถูกต้อง

คะแนน 0 หมายถึง เขียนคำตอบไม่ถูกต้อง หรือเขียนคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ หรือไม่เขียนคำตอบ

3) ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 12 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบที่ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จำนวน 2 ข้อ (ใช้จริง 2 ข้อ) และข้อสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จำนวน 10 ข้อ (ใช้จริง 5 ข้อ) โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ดังนี้

คะแนน 3 หมายถึง วาดรูปได้ถูกต้องตามเงื่อนไขทั้งหมด

คะแนน 2 หมายถึง วาดรูปได้ถูกต้องตามเงื่อนไขตั้งแต่ครึ่งหนึ่งของเงื่อนไขทั้งหมดขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด

คะแนน 1 หมายถึง วาดรูปได้ถูกต้องอย่างน้อย 1 เงื่อนไข แต่ถูกต้องน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของเงื่อนไขทั้งหมด

คะแนน 0 หมายถึง วาดรูปไม่ถูกต้องตามเงื่อนไขเลย หรือไม่วาดรูป

และมีเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ ดังตาราง 4

ตาราง 4 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

		ระดับคะแนน		
		2	1	0
ด้านการทำความเข้าใจในปัญหา	ระบุสิ่งที่ปัญหา	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด
	กำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ถูกต้องทั้งหมด	และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของสิ่งที่ต้องระบุ แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไปของสิ่งที่ต้องระบุ	และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่งหรือไม่ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์
ด้านการเขียนแสดงการพิสูจน์	เขียนข้อความประกอบกรพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ผลสรุปได้อย่างถูกต้องทั้งหมด	เขียนข้อความประกอบกรพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ผลสรุปได้อย่างถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	เขียนข้อความประกอบกรพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ผลสรุปได้อย่างถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป	ไม่สามารถเขียนข้อความประกอบกรพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน จนนำไปสู่ผลสรุป หรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง
	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ประกอบแต่ละข้อความได้ถูกต้องทั้งหมด	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ประกอบแต่ละข้อความได้ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ประกอบ	ไม่สามารถอ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ประกอบแต่ละข้อความได้ หรือถูกต้องน้อยกว่าครั้งหนึ่ง

ตาราง 4 (ต่อ)

	ระดับคะแนน		
	2	1	0
ด้านการใช้ภาษา หรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ ในการพิสูจน์	ใช้ภาษาหรือ สัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง ทั้งหมด	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ได้ ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถใช้ภาษาหรือ สัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง หรือถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง

3.2.5 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว เสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญา นิพนธ์ เพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

3.2.6 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการตรวจสอบมาดำเนินการปรับปรุงแก้ไขตาม คำแนะนำของกรรมการควบคุมปริญญา นิพนธ์ แล้วนำเสนอให้ผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยคัดเลือกเฉพาะข้อสอบที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มากกว่า 0.5 แล้วนำคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไข โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน สำหรับข้อสอบแต่ละข้อ ดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง	ข้อสอบมีความสอดคล้อง
คะแนน 0 หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าข้อสอบมีความสอดคล้องหรือไม่
คะแนน -1 หมายถึง	ข้อสอบไม่มีความสอดคล้อง

3.2.7 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้ว และคัดเลือกข้อที่มีค่าดัชนี ความสอดคล้องตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป มาทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 40 คน แล้วตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่สร้าง

3.2.8 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ตรวจให้คะแนนแล้วมาวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบ

ประกอบด้วย ค่าความยากง่าย (p) และค่าจำแนก (r) เป็นรายข้อ ซึ่งมีเกณฑ์ค่าความยากง่าย (p) ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่าตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป แล้วคัดเลือกแบบทดสอบ วัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีค่าความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนกอยู่ในเกณฑ์ดังกล่าว โดยเป็นข้อสอบแบบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ แบบเติมคำตอบ จำนวน 7 ข้อ และแบบอัตนัย จำนวน 7 ข้อ ซึ่งผลการพิจารณาแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่าค่าความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อมีค่าตั้งแต่ 0.28-0.80 และค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบแต่ละข้อมีค่าตั้งแต่ 0.20-0.60

3.2.9 นำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ถูกคัดเลือกมาวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบ โดยในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และแบบเติมคำตอบ ใช้สูตรของคูเดอร์ – ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson Formula – 20: KR-20) และในส่วนข้อสอบแบบอัตนัยใช้การหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ซึ่งผลการพิจารณาพบว่าค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และข้อสอบแบบเติมคำตอบสำหรับใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ มีค่าเท่ากับ 0.66 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัย สำหรับวัดความรู้เชิงมโนทัศน์มีค่าเท่ากับ 0.89 และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัย สำหรับวัดความสามารถในการพิสูจน์ มีค่าเท่ากับ 0.89

3.2.10 จัดทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างต่อไป

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ เป็นการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) เพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้แบบแผนการวิจัยแบบกลุ่มเดียวมีการทดสอบหลังเรียนเท่านั้น (One-Group Posttest-Only Design) ซึ่งมีแบบแผนการวิจัยดังนี้

ตาราง 5 แบบแผนการวิจัย (One-Group Posttest-Only Design)

กลุ่มตัวอย่าง	ตัวแปรอิสระ	ทดสอบหลังเรียน
ER	X	T

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการวิจัย

- ER หมายถึง กลุ่มทดลองที่ได้มาโดยกระบวนการสุ่ม
- X หมายถึง การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
- T หมายถึง การทดสอบหลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra (Posttest)

การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองตามแบบแผนการวิจัย โดยทดลองแบบกลุ่มเดียวมีการทดสอบหลังเรียนเท่านั้น (One-Group Posttest-Only Design) มีรายละเอียดการดำเนินการดังนี้

1. ผู้วิจัยชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ บทบาทของครูและบทบาทของนักเรียนในการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
2. จัดการเรียนการสอน เรื่อง วงกลม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 6 แผน แผนละ 2 คาบเรียน คาบเรียนละ 45 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนการสอนด้วยตนเอง
3. เมื่อดำเนินการทดลองตามแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ครบจำนวน 6 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบหลังการจัดการเรียนการสอน (Posttest) โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งเป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ แบบเติมคำตอบ จำนวน 7 ข้อ และแบบอัตนัย จำนวน 7 ข้อ ทดสอบกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ใช้เวลา 90 นาที

4. ผู้วิจัยตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แล้วนำคะแนนมาทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานต่อไป

5. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีขั้นตอนในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. นำคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{x}) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ($S.D.$)

2. หาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม และหาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

3. ทดสอบสมมติฐาน 2 ข้อที่ว่า (1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และ (2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบ Z (Z-Test for Population Proportion)

6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. สถิติที่ใช้ในการทดสอบคุณภาพเครื่องมือ ได้แก่ ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นโดยคำนวณจากสูตร $KR - 20$ สำหรับข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และแบบเติมคำตอบ สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) สำหรับข้อสอบแบบอัตนัย

3. สถิติที่ใช้สำหรับการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ การทดสอบ Z (Z-Test for Population Proportion)

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวม ผู้วิจัยนำมาวิเคราะห์เชิงปริมาณ โดยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 ตอน ได้แก่

ตอนที่ 1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ตอนที่ 2 ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ตอนที่ 1 ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน



ภาพประกอบ 5 คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

จากภาพประกอบ 5 พบว่า คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีคะแนนเต็ม 22 คะแนน นักเรียนมีคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ตั้งแต่ 8 คะแนน ถึง 22 คะแนน โดยมีฐานนิยมเท่ากับ 17 คะแนน จากนั้นผู้วิจัยนำคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูล แสดงดังตาราง 6

ตาราง 6 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{x})	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
แบบทดสอบ	22	16.03	72.84	3.47

จากตาราง 6 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เท่ากับ 16.03 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 72.84 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.47

1.2 การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ผู้วิจัยได้นำคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างไปทดสอบภาวะการแจกแจงปกติโดยใช้การทดสอบซาพิโร – วิลค์ ซึ่งพบว่าคะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงปกติ (ดูรายละเอียดที่ภาคผนวก ข) จากนั้นหาจำนวนนักเรียนที่มีคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม แล้วทดสอบ

สมมติฐานของการวิจัยโดยใช้การทดสอบ Z เพื่อทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย แสดงดังตาราง 7

ตาราง 7 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

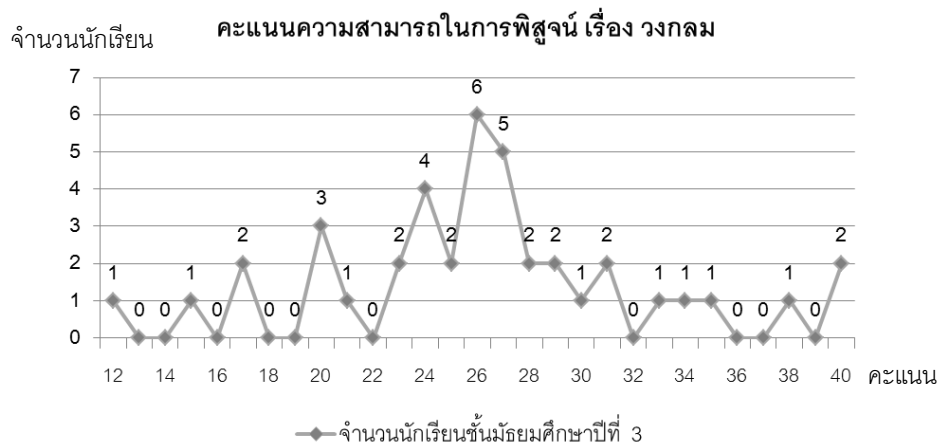
จำนวน นักเรียนกลุ่ม ตัวอย่าง	จำนวนนักเรียนที่มี ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์ (คน)	ร้อยละนักเรียนที่มี ความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ ทดสอบ Z	ค่าวิกฤต
40	31	77.50	2.259	1.645*

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 7 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

ตอนที่ 2 ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

2.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน



ภาพประกอบ 6 คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

จากภาพประกอบ 6 พบว่า คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีคะแนนเต็ม 40 คะแนน นักเรียนมีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ ตั้งแต่ 12 คะแนน ถึง 40 คะแนน โดยมีฐานนิยมเท่ากับ 26 คะแนน จากนั้นผู้วิจัยนำคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูล แสดงดังตาราง 8

ตาราง 8 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{x})	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
แบบทดสอบ	40	26.28	65.69	6.14

จากตาราง 8 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เท่ากับ 26.28 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 65.69 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.14

2.2 การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ผู้วิจัยได้นำคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ไปทดสอบภาวะการแจกแจงปกติโดยใช้การทดสอบซาapiro – วิลค์ ซึ่งพบว่าคะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงปกติ (ดูรายละเอียดที่ภาคผนวก ข) จากนั้นหาจำนวนนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม แล้วทดสอบสมมติฐานของการวิจัยโดยใช้การทดสอบ Z เพื่อทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย แสดงดังตาราง 9

ตาราง 9 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จำนวน นักเรียนกลุ่ม ตัวอย่าง	จำนวนนักเรียนที่มี ความสามารถใน การพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์ (คน)	ร้อยละนักเรียนที่มี ความสามารถในการ พิสูจน์ เรื่อง วงกลม ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ ทดสอบ Z	ค่าวิกฤต
40	30	75.00	1.936	1.645*

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 9 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
2. เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

สมมติฐานของการวิจัย

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โดยสุ่มนักเรียน 1 ห้องเรียน

จากนักเรียนทั้งหมด 6 ห้องเรียน โดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารภ กล่าวคือ ในแต่ละห้องเรียนประกอบด้วยนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย (1) แผนการจัดการเรียนรู้และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จำนวน 6 แผน แผนละ 2 คาบเรียน คาบเรียนละ 45 นาที ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล การเรียนรู้ และแฟ้มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ (2) แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังจากได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงกลม

หลังจากสร้างเครื่องมือเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำเครื่องมือเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำเครื่องมือที่ผ่านการพิจารณาเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของปัญหา และความชัดเจนของข้อคำถาม แล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นนำเครื่องมือไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม) จำนวน 40 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง แล้วปรับปรุงแก้ไขเครื่องมืออีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ เป็นการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) เพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้แบบแผนการวิจัยแบบกลุ่มเดียวมีการทดสอบหลังเรียนเท่านั้น (One-Group Posttest-Only Design)

การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองตามแบบแผนการวิจัย โดยทดลองแบบกลุ่มเดียวมีการทดสอบหลังเรียนเท่านั้น (One-Group Posttest-Only Design) มีรายละเอียดการดำเนินการดังนี้

1. ผู้วิจัยชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ บทบาทของครูและบทบาทของนักเรียน ในการจัดการเรียนสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra
2. จัดการเรียนการสอน เรื่อง วงกลม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 6 แผน แผนละ 2 คาบเรียน คาบเรียนละ 45 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โดยผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนการสอนด้วยตนเอง
3. เมื่อดำเนินการทดลองตามแผนการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ครบจำนวน 6 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบหลังการจัดการเรียนการสอน (Posttest) โดยใช้แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งเป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ แบบเติมคำตอบ จำนวน 7 ข้อ และแบบอัตนัย จำนวน 7 ข้อ ทดสอบกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ใช้เวลา 90 นาที
4. ผู้วิจัยตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แล้วนำคะแนนมาทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานต่อไป

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลดังนี้

1. ผู้วิจัยได้นำคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{x}) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) จากนั้นหาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็มมาทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม

หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ที่ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบ Z (Z-Test for Population Proportion)

2. ผู้วิจัยได้นำคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากการทำแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{x}) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) จากนั้นหาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็มมาทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ที่ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบ Z (Z-Test for Population Proportion)

สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ปรากฏผลดังนี้

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ที่ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05
2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ที่ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

อภิปรายผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้ออกแบบการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่องวงกลม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่องวงกลม มีคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ

60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม และมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุดังต่อไปนี้

1. การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่องวงกลม เป็นการจัดการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้ค้นพบความรู้เกี่ยวกับบทนิยาม และทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ วงกลม ด้วยตนเอง ผ่านการสำรวจโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ด้วยการสังเกตจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง โดยมีครูคอยให้ความช่วยเหลือผ่านการใช้คำถามกระตุ้นกับนักเรียน และมีการอภิปรายถึงการให้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการเขียนข้อความเชิงบทนิยามและข้อความคาดการณ์ที่ถูกต้อง จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่องวงกลม จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ ผ่านการสำรวจสิ่งที่เหมือนกัน และสิ่งที่แตกต่างกัน ในหลาย ๆ ตัวอย่างได้อย่างรวดเร็วและได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องจากการใช้เครื่องมือการวัดในโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต จึงส่งผลให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ถูกต้อง ทั้งในส่วนของภาพลักษณ์มโนทัศน์ ที่ได้จากการสังเกตรูปภาพหลาย ๆ ตัวอย่างที่เป็นหลักฐานเชิงประจักษ์ และบทนิยามมโนทัศน์ ที่ได้จากการฝึกฝนการเขียนข้อความเชิงบทนิยามและข้อความคาดการณ์ สอดคล้องกับเอเรนส์ (Arends, 2012, p. 338) ที่ได้กล่าวถึงแนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์ในรูปแบบของ Concept Attainment ว่า ครูควรยกตัวอย่างที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องก่อนแล้วให้นักเรียนใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในการสรุปมโนทัศน์นั้น และอัมพร ม้าคนอง (2558, p. 22) ที่ได้กล่าวถึงแนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความรู้เชิงมโนทัศน์โดยสรุปได้ว่า ครูควรพยายามให้นักเรียนทำกิจกรรม คิด สังเกต วิเคราะห์ อภิปราย และหาข้อสรุปด้วยตนเอง โดยอาจใช้คำถามที่ส่งเสริมกระบวนการคิด เพื่อช่วยให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเองและขยายไปสู่ความหมายใหม่หรือความรู้เชิงนามธรรมได้ และอาจมีการเลือกใช้สื่อ เอกสารประกอบการสอน นวัตกรรม และเทคโนโลยีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับความรู้เชิงมโนทัศน์ที่ต้องการพัฒนามีส่วนส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ได้ดียิ่งขึ้น จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่าการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความรู้เชิงมโนทัศน์ได้เป็นอย่างดี

2. เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในแต่ละชั้น จะพบว่าสามารถส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนในแต่ละด้านได้ดังนี้

2.1 ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหา เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนในชั้นสำรวจปัญหาจะพบว่าในชั้นนี้เป็นการฝึกให้นักเรียนเขียนสิ่งที่ปัญหา กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการทราบ ซึ่งการกระตุ้นให้นักเรียนเขียนสิ่งเหล่านี้จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความพยายามในการอ่านและวิเคราะห์ปัญหา รวมไปถึงสังเกตองค์ประกอบต่าง ๆ ในรูปที่อยู่ในโปรแกรม GeoGebra ส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการทำความเข้าใจในปัญหาได้ดียิ่งขึ้น

2.2 ด้านความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์ และความสามารถในการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนในชั้นสำรวจข้อความคาดการณ์ จะพบว่าการจัดการเรียนการสอนในชั้นนี้ได้เปิดโอกาสให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและค้นหาเหตุผลที่ทำให้ข้อความคาดการณ์เป็นจริงในแต่ละประเด็นผ่านการสังเกตองค์ประกอบต่าง ๆ ของรูปที่อยู่ในโปรแกรม GeoGebra ซึ่งกระบวนการนี้เป็นสิ่งสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนได้ฝึกฝนการสังเกต มีความพยายามในการค้นหาข้อความและเหตุผลทางคณิตศาสตร์ รวมไปถึงการค้นหาแนวทางในการสร้างเพื่อพิสูจน์ ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะช่วยทำให้นักเรียนมีความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์และมีความสามารถในการอ้างอิงหรือการนำเครื่องมือมาใช้ในการพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น สอดคล้องกับ ฮอยล์ และโจนส์ (Hoyle & Jones, 1998, p. 126) และก๊อดดิง คินด์ และรอยเตอร์ (Goddijn et al., 2014, pp. 5-6) ที่ได้กล่าวถึงแนวทางในการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ว่า การใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ร่วมกับการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม จะสามารถช่วยส่งเสริมและกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาแนวทางในการพิสูจน์ และพยายามค้นหาเหตุผลในแต่ละข้อความ ซึ่งจะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์และอ้างเหตุผลได้ดียิ่งขึ้น

2.3 ด้านความสามารถในการใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ เมื่อพิจารณาถึงการจัดการเรียนการสอนในชั้นการเขียนข้อความคาดการณ์และชั้นการพิสูจน์ จะพบว่าการจัดการเรียนการสอนในสองชั้นนี้ได้ให้นักเรียนเขียนเรียบเรียงผลที่ได้จากการทำกิจกรรมในชั้นสำรวจปัญหาและชั้นสำรวจข้อความคาดการณ์ตามลำดับ ซึ่งการจัดการเรียนการสอนในสองชั้นนี้จะกระตุ้นให้นักเรียนใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องผ่านกิจกรรมการนำเสนอและการร่วมกันอภิปรายถึงความเหมาะสมของการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์โดยการให้ข้อเสนอแนะของครูและเพื่อนร่วมชั้นเรียน ซึ่งทำให้นักเรียนได้ฝึกฝนและตระหนักถึงความสำคัญของการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง ส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น

สอดคล้องกับ ฮานนา (Hanna, 2002, p. 61) ที่ได้กล่าวถึงแนวทางในการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ว่าครูควรจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนตระหนักถึงการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้อง เนื่องจากเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจในการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องแล้ว การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนในเรื่องต่าง ๆ ย่อมมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

จากที่กล่าวมาจะพบว่า การจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สามารถส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน โดยผลที่ได้จากการวิจัยนี้ สอดคล้องกับงานวิจัยของ เฟิร์กกิง (Frerking, 1994, pp. 97-99) ที่ได้ศึกษาการจัดการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเพื่อส่งเสริมขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ พบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในลักษณะดังกล่าว ทำให้นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์และเขียนพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น นอกจากนี้ผลการวิจัยยังพบว่า การจัดการเรียนการสอนลักษณะดังกล่าวทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และนักเรียนมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบของ แวน ฮีลี สูงขึ้น และสอดคล้องกับงานวิจัยของเหงียน (Nguyen, 2012, p. 1742) ที่ได้ทำการศึกษากิจกรรมการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผลการวิจัยพบว่า กลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สูงกว่าก่อนเรียน

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะสำหรับการเรียนการสอน

1.1 ครูสามารถนำการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ไปประยุกต์ใช้กับการเรียนการสอนในชั้นเรียนปกติได้ เช่น ในการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับทฤษฎีบทต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนรู้จักใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในการหาข้อสรุปจากตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างนำไปสู่ข้อความคาดการณ์ และการให้เหตุผลแบบนิรนัยในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้นว่าเป็นจริง ซึ่งกระบวนการให้เหตุผลนี้จะเป็นสิ่งสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนเห็นความสำคัญและประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์

1.2 เนื่องจากการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนได้สังเกต และสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง

จากความรู้เดิมที่มีอยู่แล้ว ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนลักษณะนี้เหมาะสำหรับนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานในระดับค่อนข้างดี

1.3 ในการเริ่มต้นในแต่ละคาบเรียนครูควรจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนได้ทบทวนความรู้เดิมที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ในคาบเรียนนั้น ๆ ก่อน

1.4 ในช่วงคาบเรียนแรก ๆ ของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ครูควรใช้คำถามอย่างละเอียดในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ หรืออาจมีการช่วยเหลือ แนะนำแนวทางในการพิสูจน์ และให้นักเรียนทำกิจกรรมสำรวจ รวมถึงการเขียนพิสูจน์ไปพร้อม ๆ กับครูก่อน เนื่องจากนักเรียนบางคนอาจไม่คุ้นเคยกับการเขียนข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

1.5 ในการจัดการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ครูควรคำนึงถึงสภาพแวดล้อมในการจัดการเรียนการสอน ดังนี้

(1) ในชั้นเรียนไม่ควรมีจำนวนนักเรียนที่มากเกินไป เพราะครูจะไม่สามารถดูแลนักเรียนได้อย่างทั่วถึง

(2) ลักษณะของการจัดห้องเรียน ควรจัดให้ครูสามารถมองเห็นหน้าจอของคอมพิวเตอร์ของนักเรียนได้อย่างทั่วถึง และในกรณีที่ไม่ได้ใช้อินเทอร์เน็ต ครูควรปิดอินเทอร์เน็ตเพื่อป้องกันไม่ให้นักเรียนทำกิจกรรมอื่นที่ไม่เกี่ยวข้องกับบทเรียน

(3) เพิ่มคำสั่งในโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตที่ครูใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอนควรกำหนดขนาดของตัวอักษร และใช้สีที่เหมาะสม โดยเฉพาะเพิ่มคำสั่งที่ใช้ในหน้าจอของครู ควรมีตัวอักษรขนาดใหญ่มากพอ และใช้สีให้ชัดเจนเพื่อให้นักเรียนสามารถมองเห็นได้อย่างทั่วถึง

(4) ครูอาจเตรียมลงเพิ่มคำสั่งในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในแต่ละเครื่องให้เรียบร้อยก่อนการจัดการเรียนการสอน เพื่อความรวดเร็วในการเตรียมความพร้อมในแต่ละคาบเรียน หรือถ้าใช้ระบบเปิดเพิ่มผ่านอินเทอร์เน็ต ควรตรวจสอบว่าระบบอินเทอร์เน็ตในชั้นเรียนมีความเร็วสูงมากพอสำหรับการให้คอมพิวเตอร์หลาย ๆ เครื่อง เปิดหน้าเว็บไซต์ของเพิ่มคำสั่งพร้อม ๆ กันได้

1.6 ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนทุกคนมีส่วนร่วมกับการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน เช่น การให้นักเรียนนั่งทำงานเป็นคู่ และได้ร่วมกันอภิปรายกับเพื่อน และลองเขียนข้อความคาดการณ์ในแต่ละคู่ก่อนร่วมกันเฉลยทั้งชั้นเรียน หรือคอยสังเกตการทำงานของนักเรียนแต่ละคู่

อย่างสม่ำเสมอ เพื่อป้องกันไม่ให้นักเรียนลอกข้อความคาดการณ์จากเพื่อนผู้อื่น ๆ โดยไม่ได้ฝึกฝน การค้นหาข้อความคาดการณ์จากโปรแกรมในคู่ของตนเอง

1.7 นอกจากการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์แล้ว ครูควรใช้เวลาหรือมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม เพื่อให้ นักเรียนคุ้นเคยกับการเขียนพิสูจน์ และได้ฝึกแก้ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ของทฤษฎีบทต่าง ๆ มากขึ้น

1.8 ครูควรคำนึงถึงความรู้พื้นฐานในการให้เหตุผลของนักเรียน เช่น ในเนื้อหาที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอน อาจมีบางทฤษฎีบทที่ใช้วิธีการพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง ซึ่งจากการทดลองสอนในงานวิจัยนี้พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ยังไม่มีความรู้พื้นฐานในการให้เหตุผลที่เพียงพอสำหรับการพิสูจน์ด้วยวิธีดังกล่าว เพราะนักเรียนไม่ได้เรียนรู้เกี่ยวกับหลักตรรกศาสตร์เบื้องต้นมาก่อน ดังนั้น ครูอาจจัดการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการสำรวจในโปรแกรม GeoGebra และให้นักเรียนใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยเพื่อสรุปผลที่ได้ในเบื้องต้น จากนั้นจึงชี้แจงกับนักเรียนว่าในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่ได้จะต้องใช้ความรู้ระดับที่สูงขึ้นต่อไป หรือครูอาจแสดงการพิสูจน์ให้กับนักเรียนได้ หากพบว่านักเรียนมีความรู้ในการให้เหตุผลที่เพียงพอ

1.9 ควรให้เวลาสำหรับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ให้มากขึ้น เช่น จาก 12 คาบเรียน เป็น 16-20 คาบเรียน เพื่อให้ นักเรียนได้มีเวลาอภิปรายในกลุ่ม ฝึกฝนการค้นหาองค์ความรู้ด้วยตนเอง รวมทั้งมีเวลาในการนำเสนอและสะท้อนผลของการทำกิจกรรมได้มากยิ่งขึ้น

2. ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาผลของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ สำหรับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ ในระดับมัธยมศึกษาและระดับอุดมศึกษา

2.2 ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาผลของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ ร่วมกับสื่อเทคโนโลยีอื่น ๆ เช่น Graphing Calculator หรือร่วมกับวิธีการสอนแบบอื่น ๆ เช่น การใช้บทเรียนสำเร็จรูป การเรียนแบบร่วมมือ เป็นต้น

2.3 ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาผลของการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ กับตัวแปรที่เกี่ยวข้องอื่น ๆ เช่น ความสามารถในการแก้ปัญหา ความคิดสร้างสรรค์ ความรู้เชิงกระบวนการ เป็นต้น

2.4 ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาความพึงพอใจ หรือเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชา
คณิตศาสตร์ ก่อนและหลังเรียนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์



บรรณานุกรม

- Alibert, D., & Thomas, M. (2002). Research on Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Ames, L. (2011). *The Effect of Incorporating Geometer's Sketchpad in a High School Geometry Course to Improve Conceptual Understanding, Inductive Reasoning, and Motivation*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/900864789?accountid=44800>
- Arends, R. L. (2012). *Learning to Teach* (9th ed.). New York: McGraw-Hill.
- Astawa, I., Wayan, P., Budayasa, I. K., & Juniati, D. (2018). The Process of Student Cognition in Constructing Mathematical Conjecture. *Journal on Mathematics Education*, 9(1), 15-26.
- Bell, M. D. (1998). *Impact of an Inductive Conjecturing Approach in a Dynamic Geometry Enhanced Environment*. Retrieved from <https://search-proquest-com.clvpn.swu.ac.th/docview/304431592?accountid=44800>
- Boero, P., Rossella, G., & Lemut, E. (2007). Approaching theorem in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and condition suitable to enhance them. In P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 247-262). Rotterdam: Sense Publishers.
- Burch, M. C. (2005). *Conjecturing as A Classroom Activity in Differential Equations*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/305026547?accountid=44800>
- Canadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., & Reid, D. (2007). The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72.
- Chinnappan, M., Ekanayake, M. B., & Brown, C. (2009). Knowledge Use in the Construction of Geometry Proof By Sri Lankan Students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(4), 865-887.

- Crooks, N., & Alibali, M., W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344-377.
- Dos, S., & José, M. (2017). Intersection of two surfaces in GeoGebra. *The Journal of the International GeoGebra Institute of São Paulo (IGISP)*. Retrieved from <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35462/24310>
- Farmer, W. M. (2018). *A New Style of Mathematical Proof*. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/1806.00810.pdf>
- Frank, A. B., & Mariotti, M. A. (2010). Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: The Elaboration of Some Research Hypotheses. *Proceedings of CERME 6*. Retrieved from <http://inrp.fr/editions/cerme6>
- Frerking, B. G. (1994). *Conjecturing and Proof-Writing in Dynamic Geometry*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/304097038?accountid=44800>
- Gillis, J. M. (2005). *An Investigation of Student Conjectures in Static and Dynamic Geometry Environments*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/305026444?accountid=44800>
- Goddjin, A., Kindt, M., & Reuter, W. (2014). *Geometry with Applications and Proofs : Advanced Geometry for Senior High School, Student Text and Background Information*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Hanna, G. (2002). Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54-64). New York: Kluwer Academic.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale: Erlbaum.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. Retrieved from https://archive.geogebra.org/static/publications/pecs_2004.pdf
- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7(1). Retrieved from https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

- Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer.
- Johnson, B. R., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362.
- Juan, K. (2015). *Effects of Interactive Software on Student Achievement and Engagement in Four Secondary School Geometry Classes, Compared to Two Classes with No Technology Integration*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/1815189905?accountid=44800>
- Khoule, A. (2013). *Emphasis on Conceptual Knowledge and Its Impact on Mathematics Anxiety for Community College Students*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/1469385599?accountid=44800>
- Leddy, J. F. J. (2001). *Justifying and Proving in Secondary School Mathematics*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/304754367?accountid=44800>
- Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., & Tabach, M. (2011). Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. In G. Hanna & M. D. Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study* (pp. 305-325). New York: Springer.
- Livy, S., & Vale, C. (2011). First Year Pre-service Teachers' Mathematical Content Knowledge: Methods of Solution for a Ratio Question. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(2), 22-43.
- Martinez, M. V., & Li, W. (2010). The Conjecturing Process and The Emergence of the Conjecture to Prove. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 265-272). Belo Horizonte: PME.
- Mccrone, S. M. S., & Martin, T., S. (2009). Formal Proof in High School Geometry: Student Perceptions of Structure Validity, and Purpose. In D. A. Stylianou (Ed.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades* (pp. 204-221). New York: Routledge.

- Morris, D. W. (2016). *Proofs and Concepts: the fundamentals of abstract mathematics*. New York: P.D. Magnus.
- Morselli, F. (2006). Use of Examples in Conjecturing and Proving: An Exploratory Study. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. a. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 185-192). Prague: PME.
- Navetta, A. (2017). Visualizing Functions of Complex Numbers Using GeoGebra. *North American GeoGebra Journal*, 5(2), 17-25. Retrieved from <https://geogebrajournal.miamioh.edu/index.php/ggjbj/article/view/106/102>
- Nguyen, D. N. (2012). The Development of the Proving Process Within a Dynamic Geometry Environment. *European Researcher*, 32(10-2), 1731-1744.
- Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(2), 135-136.
- Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra*. Retrieved from <https://archive.geogebra.org/static/publications/jpreiner-dissertation.pdf>
- Saeed, R. M. (1996). *An Exploratory Study of College Students' Understanding of Mathematical Proof and the Relationship of This Understanding to Their Attitude Toward Mathematics*. Retrieved from <https://search.proquest.com/docview/304279685?accountid=44800>
- Saha, R. A., Ayub, A., Fauzi Mohd, & Tarmizi, R. A. (2010). The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 8(1), 686-693.
- Schneider, M., & Stern, E. (2010). The Developmental Relations Between Conceptual and Procedural Knowledge: A Multimethod Approach. *Developmental Psychology*, 46(1), 178-192.
- Sherard III, W. H. (1981). Why is Geometry a Basic Skill? *The Mathematics Teacher*, 74(1), 19-21.

- Stragalinou, A. (2012). *Instructional Strategies to Support Students' First Steps into Proving and Reasoning*. Retrieved from <https://esc.fnwi.uva.nl/thesis/centraal/files/f1942091027.pdf>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(1), 289-321.
- Thanheiser, E. (2012). Understanding multidigit whole numbers: The role of knowledge components, connections, and context in understanding regrouping 3+- digit numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(2), 220-324.
- Travers, R. M. W. (1967). *Essentials of Learning: An Overview for Students of Education*. New York: The Macmillan Co.
- Velleman, D. J. (2006). *How To Prove It: A Structured Approach* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- โกมล ไพศาล. (2540). *การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. (ปริญญาานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- ขวัญ เพ็ญชัย. (2547). *การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุดของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรี*. (ปริญญาานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- จำเริญ อนันตธรรมรส. (2553). *ผลของการใช้โมเดลเฟสเมทีอดคอมปิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. (วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์)), คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- จิรรัตน์ จตุรานนท์. (2554). *การศึกษาความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียนการสอนของนิสิตนักศึกษาคณะครุศาสตร์ศึกษาศาสตร์ วิชาเอกคณิตศาสตร์*. (วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์)), คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

- จุไรรัตน์ วัชรไทย. (2561). ผลการจัดการเรียนรู้ตามกระบวนการคิดไตร่ตรอง เรื่องวิธีเรียงสับเปลี่ยน ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. (ปริญญาานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- ชมพูนุท วนสันเทียะ. (2552). การศึกษาความคิดรวบยอดและความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนราชวินิตบางเขน โดยใช้วิธีสอนแบบโยนิโสมนสิการร่วมกับการใช้แผนผังมโนทัศน์. (ปริญญาานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- ชยุตม์ ล้อธีรพันธ์. (2558). การเปรียบเทียบการใช้โปรแกรม GSP กับโปรแกรม GeoGebra ประกอบการเรียนรู้ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. รายงานการประชุมวิชาการและนำเสนอผลการวิจัย ระดับชาติและนานาชาติ กลุ่มระดับชาติ ด้านการศึกษา, 3(6), 137-145.
- ชัญญา อุกิต. (2557). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง “กำหนดการเชิงเส้น” ที่ส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรม *GeoGebra* ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสมุทรสาครบูรณะ จังหวัดสมุทรสาคร. (วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.
- ไตรรงค์ กล้าบุตร. (2557). การพัฒนาชุดกิจกรรมเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล เรื่อง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (วิทยาศาสตร์ศึกษา)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร, พิษณุโลก.
- ทศพร คล้ายอุดม. (2555). คณิตศาสตร์สำหรับครู. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- ปิยะวุฒิ ศรีชนะ. (2556). ชุดการเรียนการสอนเรื่องกำหนดการเชิงเส้นโดยใช้โปรแกรม *GeoGebra* สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ วท.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา)), คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี, อุบลราชธานี.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2555). หลักคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 2 ed.). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- พิมพ์สุภา ชิดสา. (2561). ผลการจัดการเรียนรู้แบบ ACE เรื่องพหุนามและเศษส่วนของพหุนาม ที่มีต่อความรู้เชิงมโนทัศน์และความรู้เชิงกระบวนการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- พิสุทธิ ยงหางเรือ. (2559). ผลการเรียนรู้โดยใช้แนวทางการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยโปรแกรมจีโอเจิบร้า เรื่องภาคตัดกรวย. (วิทยานิพนธ์ วท.ม. (การสอนคณิตศาสตร์)), คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, กรุงเทพฯ.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2529). การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ: ภาควิชาการมัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ศราญลักษณ์ บุตรรัตน์. (2553). การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล เรื่อง “วงกลม” โดยใช้โปรแกรม *The Geometer's Sketchpad* สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบางละมุง จังหวัดชลบุรี. (วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: สกสศ. ลาดพร้าว.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. (2551). รากฐานเรขาคณิต. กรุงเทพฯ: พัทธการพิมพ์.
- สำนักงานบริหารการมัธยมศึกษาตอนปลาย. (2553). การเรียนรู้ดิจิทัลเทคโนโลยี โรงเรียนมาตรฐานสากล. กรุงเทพฯ: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- สุภัทรา เกิดมงคล. (2550). กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องสมบัติของวงกลมโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- เสฏฐวุฒิ เพ็งเจริญ. (2561). การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม. (ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.
- โสภณ บำรุงสงฆ์, & สมหวัง ไตรต้นวงศ์. (2520). เทคนิคและวิธีสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

อั้มพร ไม้คอง. (2558). คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม (พิมพ์ครั้งที่ 2 ed.). กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริม
การพัฒนาวัตกรรมการ ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย.

อุบล กลองกระโทก. (2554). ประมวลสาระชุดวิชาการจัดประสบการณ์การเรียนรู้คณิตศาสตร์ หน่วย
ที่ 12 การสำรวจคณิตศาสตร์โดยใช้เทคโนโลยี. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.





ภาคผนวก



ภาคผนวก ก

การหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และ
ความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

การหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

แบบทดสอบที่ใช้เป็นเครื่องมือวัดผล คือ แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 1 ฉบับ ประกอบไปด้วย

1. ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 16 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบที่ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม (ใช้จริง 7 ข้อ)

2. ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 10 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบที่ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม (ใช้จริง 7 ข้อ)

3. ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 12 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบที่ใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จำนวน 2 ข้อ (ใช้จริง 2 ข้อ) และข้อสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จำนวน 10 ข้อ (ใช้จริง 5 ข้อ)

ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการหาคุณภาพของแบบทดสอบดังนี้

1. วิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง ข้อสอบมีความสอดคล้อง

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอบมีความสอดคล้องหรือไม่

คะแนน -1 หมายถึง ข้อสอบไม่มีความสอดคล้อง

1.2 คำนวณค่า IOC เป็นรายข้อ แล้วเลือกข้อคำถามที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป โดยใช้สูตรการคำนวณ IOC คือ

$$IOC = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$$

เมื่อ IOC แทน ค่าดัชนีความสอดคล้อง

R_i แทน คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญคนที่ i

i แทน จำนวนตั้งแต่ 1 ถึง n

n แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

ตาราง 10 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก						
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
14	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเติมคำ						
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

ตาราง 10 (ต่อ)

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเติมคำ						
7	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบอัตนัย						
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	0	+1	2	0.67	ใช้ได้
ข้อสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์แบบอัตนัย						
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

2. หาค่าความยากง่าย (p) ค่าจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2.1 หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก และข้อสอบแบบเติมคำ โดยใช้สูตร

$$p = \frac{R_H + R_L}{2n}$$

เมื่อ p	แทน	ค่าความยากง่าย
R_H	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกข้อนั้นในกลุ่มสูง
R_L	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกข้อนั้นในกลุ่มต่ำ
n	แทน	จำนวนผู้ตอบในแต่ละกลุ่ม (จำนวนเท่ากัน)

หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัยโดยใช้สูตร

$$p_i = \frac{(H_i + L_i)}{[T(N_H + N_L)]}$$

เมื่อ p_i	แทน	ค่าความยากง่าย ข้อที่ i
H_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มสูง
L_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มต่ำ
T_i	แทน	คะแนนเต็มของข้อที่ i
N_H	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มสูง
N_L	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

2.2 หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและข้อสอบแบบเติมคำโดยใช้สูตร

$$r = \frac{R_H - R_L}{n}$$

เมื่อ r	แทน	ค่าอำนาจจำแนก
R_H	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกข้อนั้นในกลุ่มสูง
R_L	แทน	จำนวนผู้ตอบถูกข้อนั้นในกลุ่มต่ำ
n	แทน	จำนวนผู้ตอบในแต่ละกลุ่ม (จำนวนเท่ากัน)

หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัยโดยใช้สูตร

$$r_i = \frac{(H_i - L_i)}{\left[T_i \times \frac{1}{2} (N_H + N_L) \right]}$$

เมื่อ r_i	แทน	ค่าอำนาจจำแนก ข้อที่ i
H_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มสูง
L_i	แทน	คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มต่ำ
T_i	แทน	คะแนนเต็มของข้อที่ i
N_H	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มสูง
N_L	แทน	จำนวนผู้ตอบทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

2.3 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หาค่าความเชื่อมั่น แบบความสอดคล้องภายในของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและข้อสอบแบบเติมคำโดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson: KR) สูตร KR-20 ดังนี้

$$r_{tt} = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right\}$$

เมื่อ r_{tt}	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัด
k	แทน	จำนวนข้อของเครื่องมือวัด
\sum	แทน	ผลรวม
p	แทน	สัดส่วนของผู้ตอบถูกในแต่ละข้อ
q	แทน	สัดส่วนของผู้ตอบผิดในแต่ละข้อ
S^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนทั้งฉบับ

หาค่าความเชื่อมั่น แบบความสอดคล้องภายในของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัยโดยใช้สูตรของ Cronbach ซึ่งมีสูตรการคำนวณสัมประสิทธิ์แอลฟา (alpha coefficient: α) ดังนี้

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left\{ 1 - \frac{\sum s_i^2}{S_t^2} \right\}$$

เมื่อ α	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัด
k	แทน	จำนวนข้อของเครื่องมือวัด
\sum	แทน	ผลรวม
S_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนแต่ละข้อ
S_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนรวมทั้งฉบับ

ตาราง 11 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก		
1	0.73	0.05
2	0.23	0.05
3	0.65	0.20
4	0.48	0.25
5	0.70	0.30

ตาราง 11 (ต่อ)

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก		
6	0.20	0.20
7	0.33	0.05
8	0.38	0.25
9	0.23	0.25
10	0.36	0.00
11	0.68	0.25
12	0.40	0.30
13	0.25	0.40
14	0.78	0.05
15	0.40	0.40
16	0.30	0.40
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบเติมคำ		
1	0.40	0.40
2	0.63	0.25
3	0.15	0.00
4	0.88	0.15
5	0.80	0.30
6	0.68	0.35
7	0.73	0.45
8	0.35	0.60
9	0.60	0.10
10	0.48	0.45
ข้อสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์แบบอัตนัย		
1	0.53	0.28
2	0.39	0.21

ตาราง 11 (ต่อ)

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
ข้อสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์แบบอัตนัย		
1	0.68	0.28
2	0.69	0.31
3	0.69	0.36
4	0.61	0.22
5	0.55	0.24
6	0.59	0.28
7	0.61	0.27
8	0.55	0.29
9	0.50	0.21
10	0.50	0.16

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและข้อสอบแบบเติมคำสำหรับใช้วัดความรู้เชิงมโนทัศน์ โดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson: KR) สูตร KR-20 มีค่าเท่ากับ 0.66

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัย สำหรับวัดความรู้เชิงมโนทัศน์ โดยวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) มีค่าเท่ากับ 0.89

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในส่วนที่เป็นข้อสอบแบบอัตนัย สำหรับวัดความสามารถในการพิสูจน์ โดยวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) มีค่าเท่ากับ 0.89



ภาคผนวก ข
การทดสอบสมมติฐาน

การทดสอบสมมติฐานข้อ 1

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติ

ในการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของข้อมูล ผู้วิจัยได้รวบรวมคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากกลุ่มตัวอย่างแต่ละคน แล้วนำคะแนนที่ได้ไปทดสอบภาวะการแจกแจงปกติ โดยใช้การทดสอบซาปิโร-วิลค์ (Shapiro-Wilk) ผลที่ได้เป็นดังนี้

ตาราง 12 การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม

Tests of Normality						
	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Score	.147	40	.029	.960	40	.163

a. Lilliefors Significance Correction

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 12 ค่าพี (p-value) ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีค่าเท่ากับ 0.163 ซึ่งมีค่ามากกว่า .05 ดังนั้น คะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงปกติ

การทดสอบสมมติฐาน

เนื่องจากข้อมูลมีการแจกแจงปกติ การทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด จึงใช้สถิติทดสอบ Z (Z-test for Population Proportion) ดังนี้

$$\text{สมมติฐานคือ } H_0 : p \leq 0.60$$

$$H_1 : p > 0.60$$

$$\text{สถิติทดสอบคือ } Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ p แทน สัดส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

\hat{p} แทน สัดส่วนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีคะแนนความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

p_0 แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ต้องการทดสอบ

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน

$$\text{นั่นคือ } \hat{p} = \frac{31}{40} = 0.775$$

$$p_0 = 0.60$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } Z &= \frac{0.775 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{40}}} \\ &= \frac{0.175}{\sqrt{0.006}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } Z = 2.259$$

เนื่องจาก $Z_{.05^*} = 1.645$ จะได้ $Z > Z_{.05^*}$ เพราะฉะนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความรู้เชิงมโนทัศน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

การทดสอบสมมติฐานข้อ 2

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติ

ในการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของข้อมูล ผู้วิจัยได้รวบรวมคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม จากแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากกลุ่มตัวอย่างแต่ละคน แล้วนำคะแนนที่ได้ไปทดสอบภาวะการแจกแจงปกติ โดยใช้การทดสอบชาปิโร-วิลค์ (Shapiro-Wilk) ผลที่ได้เป็นดังนี้

ตาราง 13 การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

Tests of Normality						
	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Score	.128	40	.097	.968	40	.300

a. Lilliefors Significance Correction

* ที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 13 ค่าพี (p-value) ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีค่าเท่ากับ 0.300 ซึ่งมีค่ามากกว่า .05 ดังนั้น คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงปกติ

การทดสอบสมมติฐาน

เนื่องจากข้อมูลมีการแจกแจงปกติ การทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด จึงใช้สถิติทดสอบ Z (Z-test for Population Proportion) ดังนี้

สมมติฐานคือ $H_0 : p \leq 0.60$

$H_1 : p > 0.60$

สถิติทดสอบคือ
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ p แทน สัดส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

\hat{p} แทน สัดส่วนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

p_0 แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ต้องการทดสอบ

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน

นั่นคือ
$$\hat{p} = \frac{30}{40} = 0.75$$

$$p_0 = 0.60$$

$$\begin{aligned}
 \text{แทนค่า } Z &= \frac{0.75 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{40}}} \\
 &= \frac{0.15}{\sqrt{0.006}} \\
 \text{ดังนั้น } Z &= 1.936
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $Z_{.05^*} = 1.645$ จะได้ $Z > Z_{.05^*}$ เพราะฉะนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ผ่านเกณฑ์ ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05





ภาคผนวก ค

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้และเพิ่มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra
ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยการเรียนรู้ วงกลม

หัวข้อเรื่อง มุมในครึ่งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลม (1)

ปีการศึกษา 2561

ภาคเรียนที่ 2

เวลา 90 นาที

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียน

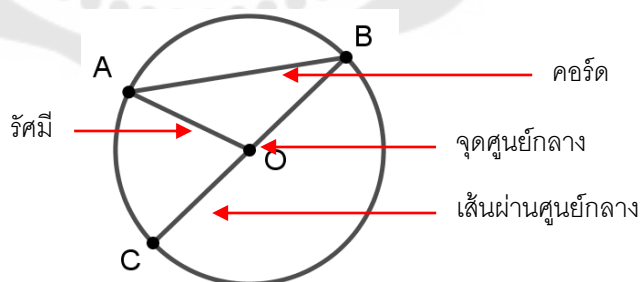
1. บอกความหมายและระบุมุมในครึ่งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลมได้
2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมในครึ่งวงกลมได้

2. สาระการเรียนรู้

1. ทบทวนเรื่องวงกลม

วงกลม เป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบซึ่งแต่ละจุดบนรูปเรขาคณิตนี้ อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่นี้ว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม เรียกระยะที่เท่ากันนี้ว่า **รัศมี** ของวงกลม

ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงกลมที่นักเรียนเคยรู้จักมาแล้วมีดังนี้



จากรูป จุด O เป็นจุดคงที่ เรียกจุด O ว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม

จุด A อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม หรือกล่าวได้ว่า จุด A **อยู่บนวงกลม**

เรียก \overline{OA} ว่า **รัศมีของวงกลม** ซึ่งหมายถึง ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม

และจุดบนวงกลม หรือหมายถึงส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย

สังเกตว่า รัศมีของวงกลมหนึ่งวงมีได้หลายเส้น และรัศมีของวงกลมวงเดียวกัน จะมีความยาวเท่ากันทุกเส้น

จุด B และจุด C อยู่บนวงกลม และ \overline{BC} ผ่านจุดศูนย์กลาง O เรียก \overline{BC} ว่า **เส้นผ่านศูนย์กลาง** ของวงกลม

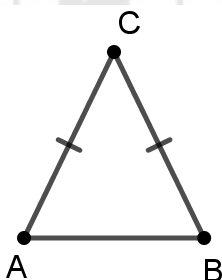
เรียก \overline{AB} **คอร์ด** ซึ่งหมายถึง ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลม เดียวกัน

การเรียกชื่อวงกลมวงหนึ่งที่มีจุดศูนย์กลางตามที่กำหนดให้ อาจเรียกชื่อตามจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น เช่น จากรูปข้างต้น อาจเรียกว่า **วงกลม O**

2. ทบทวนเรื่องรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน

ทฤษฎีบท ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

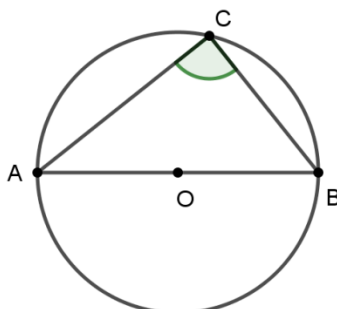


จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $AC = BC$

จะได้ว่า $BAC = CBA$

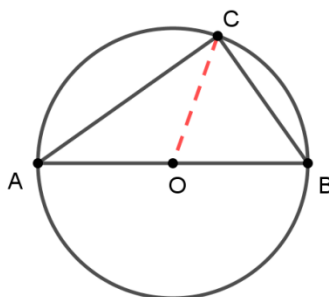
3. มุมในครึ่งวงกลม

มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง



จากรูป \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O จะได้ ACB เป็นมุมในครึ่งวงกลม

ทฤษฎีบทที่ 1 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° องศาหรือหนึ่งมุมฉาก



สิ่งที่กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ

ACB เป็นมุมในครึ่งวงกลม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ACB มีขนาด 90° หรือหนึ่งมุมฉาก

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก \overline{OC}

พิสูจน์

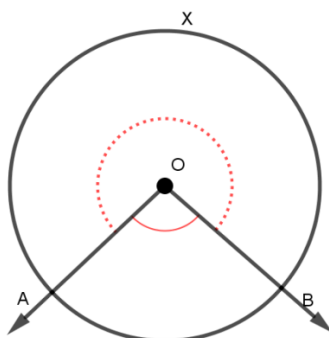
ข้อความ	เหตุผล
1. $AO = BO = CO$	รัศมีของวงกลมเดียวกัน มีความยาวเท่ากัน
2. $\triangle AOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	$AO = CO$
3. $\triangle BOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	$BO = CO$
4. $OAC = ACO$ และ $OBC = BCO$	เป็นมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
5. $BAC + ABC + ACB = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC
6. $OAC + ACO + BCO + OBC = 180^\circ$	จากข้อ 5
7. $ACO + ACO + BCO + BCO = 180^\circ$	แทนค่าจากข้อ 4 ในข้อ 6
8. $ACO + BCO = 90^\circ$	จากข้อ 7 โดยสมบัติของการเท่ากัน
9. $ACB = 90^\circ$	จากข้อ 8

นั่นคือ ACB มีขนาด 90° หรือหนึ่งมุมฉาก

4. มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

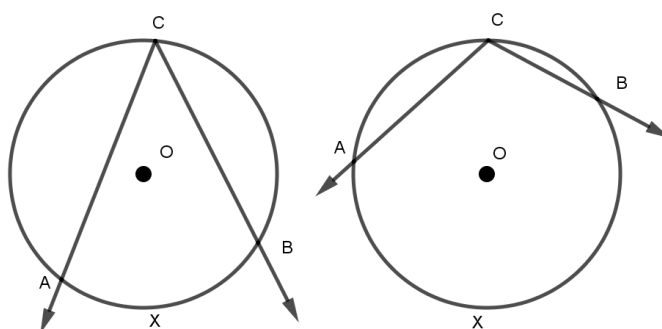
มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้ง

สองของมุมตัดวงกลม



จากรูป AOB และมุมกลับ AOB แต่ละมุมเป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม O ที่ AOB รองรับด้วย AB และมุมกลับ AOB รองรับด้วย AXB

มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุม ตัดวงกลม



จากรูป ACB เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม O ที่รองรับด้วย AXB

3. สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้

3.1 แฟ้มในโปรแกรม GeoGebra แสดงรูปของวงกลมและรูปสามเหลี่ยมประกอบ การทบทวน

3.2 ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม

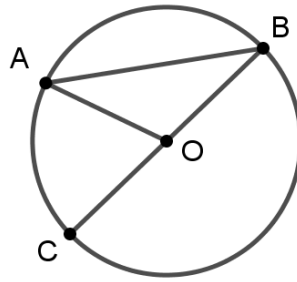
3.3 ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

3.4 แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ (15 นาที)

4.1.1 เพื่อเป็นการทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับส่วนประกอบของวงกลม ครูแสดงวงกลมและส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงกลม ในโปรแกรม GeoGebra ดังรูป



4.1.2 ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันทบทวนเกี่ยวกับส่วนประกอบต่างๆ ของวงกลม ดังนี้

1) จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม เรียก \overline{OA} ว่าอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: รัศมี]

2) \overline{BC} เรียกว่าอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: เส้นผ่านศูนย์กลาง]

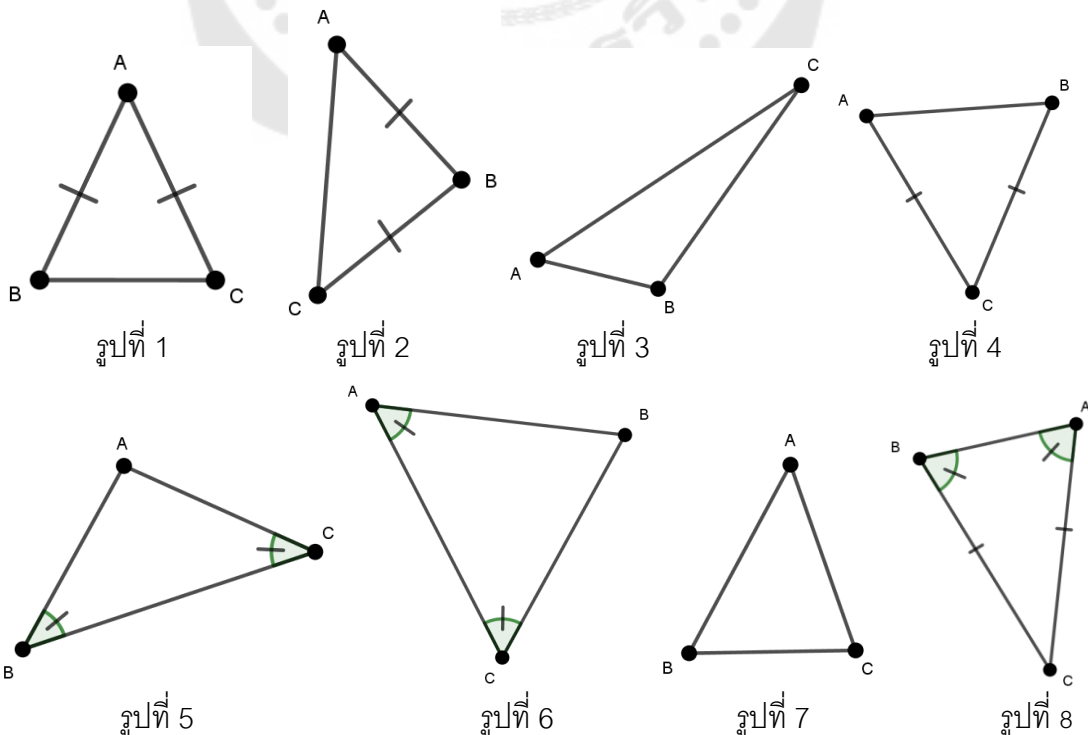
3) \overline{AB} เรียกว่าอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: คอร์ด]

4) $\angle AOB$ และ $\angle AOC$ รองรับด้วยส่วนโค้งใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $\angle AOB$ รองรับด้วย \overline{AB} และ $\angle AOC$ รองรับด้วย \overline{AC}]

4.1.3 เพื่อเป็นการทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ครูแสดงรูปสามเหลี่ยมต่างๆ ในโปรแกรม GeoGebra ดังรูป



4.1.4 ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันทบทวนเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนี้

1) จากรูปที่กำหนดให้ รูปใดบ้างที่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

[นักเรียนควรตอบว่า: รูปที่ 1 2 4 5 6 และ 8]

2) เพราะเหตุใดรูปที่ 3 และรูปที่ 7 ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

[นักเรียนควรตอบว่า: เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ได้กำหนดให้มีด้านที่ยาวเท่ากันสองด้าน หรือมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม]

3) นักเรียนสามารถสรุปทฤษฎีและสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า:

(1) มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากันสองด้าน

(2) มีมุมที่ฐานที่มีขนาดเท่ากันสองมุม]

4.1.5 ครูสรุปผลที่ได้จากการทำกิจกรรม และบอกกับนักเรียนว่าในบทเรียนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับวงกลม

4.2 ชั้นสอน (70 นาที)

4.2.1 ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม ให้นักเรียนพร้อมทั้งชี้แจงการทำกิจกรรม

4.2.2 เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับบทนิยามของมุมในครึ่งวงกลม ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในใบกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 1 ดังนี้

ขั้นสำรวจปัญหา

1) ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตเกี่ยวกับลักษณะของตัวอย่างของมุมในครึ่งวงกลมและตัวอย่างที่ไม่เป็นมุมในครึ่งวงกลมในใบกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 1

2) ครูใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันและแตกต่างกันในแต่ละตัวอย่างดังนี้

(1) ในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 นักเรียนคิดว่ามุมในครึ่งวงกลมคือมุมใด

[นักเรียนควรตอบว่า: ACB]

(2) ในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 นักเรียนสังเกตเห็นอะไรที่เหมือนกันบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า:

- O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

- A, B และ C เป็นจุดบนวงกลม

- \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม]

(3) ในระหว่างรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 มีสิ่งใดที่แตกต่างกัน

[นักเรียนควรตอบว่า: ในรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 ACB ในแต่ละรูปไม่ได้

มีแกนของมุมทั้งสองผ่านจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม]

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม

3) ครูให้นักเรียนเขียนข้อความเชิงบทนิยามโดยใช้ผลจากการทำกิจกรรม
ในขั้นสำรวจปัญหา

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม

4) ครูสุ่มนักเรียนนำเสนอข้อความเชิงบทนิยาม

5) ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของข้อความเชิงบทนิยาม
ผ่านตัวอย่างของรูปและการใช้ภาษาอีกครั้ง เมื่อได้ข้อความที่ถูกต้องแล้ว จึงสรุปเป็นบทนิยาม

4.2.3 เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับสมบัติของมุมในครึ่งวงกลม ครูให้นักเรียน
ทำกิจกรรมตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ดังนี้

ขั้นสำรวจปัญหา

1) ครูให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act1a.ggb แล้วสำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ใน
ชิ้นงาน แล้วใช้คำถามกระตุ้นดังนี้

(1) ในแฟ้มงาน Act1a.ggb สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า: วงกลมมีจุดศูนย์กลางคือจุด O มีรัศมียาว
เท่ากับ r]

(2) สิ่งที่ต้องการทราบคืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: สมบัติของมุมในครึ่งวงกลม]

(3) ในกิจกรรมนี้มุมในครึ่งวงกลมคือมุมใด

[นักเรียนควรตอบว่า: ACB]

2) ครูให้นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อสำรวจขนาดของมุมในครึ่ง
วงกลม แล้วบันทึกผลลงในข้อที่ 3 ของใบกิจกรรมในขั้นสำรวจปัญหา

ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

3) ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตผลที่ได้จากการวัดขนาดของมุมในครึ่งวงกลม
ในแต่ละครั้ง และถามว่า นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของ
มุมในครึ่งวงกลมได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือหนึ่งมุมฉาก]

ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

4) ครูถามนักเรียนว่า นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของนักเรียนเป็นจริง

[นักเรียนควรตอบว่า: ลาก \overline{OC}]

5) ครูให้นักเรียนสร้าง \overline{OC} ในแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra จากนั้นให้นักเรียนวัดขนาดขององค์ประกอบอื่น ๆ ในรูปเพิ่มเติมแล้วบันทึกผลลงในตารางข้อที่ 2 ของใบกิจกรรมในขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

6) ครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนหาเหตุผลที่ทำให้ข้อความคาดการณ์เป็นจริง ดังนี้

(1) ความยาวของส่วนของเส้นตรง AO , BO และ CO มีความสัมพันธ์กันอย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: มีความยาวเท่ากัน เพราะ เป็นความยาวของรัศมีวงกลมวงเดียวกัน]

(2) $\triangle AOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $AO = CO$]

(3) $\triangle BOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $BO = CO$]

(4) ขนาดของมุม OAC กับ ACO และขนาดของมุม OBC กับ BCO มีความสัมพันธ์กันอย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: มีขนาดเท่ากัน เพราะ เป็นขนาดของมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว]

(5) ขนาดของมุม ACB มีความสัมพันธ์กับขนาดของมุม ACO และ BCO อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $ACB = ACO + BCO$]

(6) $BAC + ABC + ACB$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: มีขนาดเท่ากับ 180 องศา เพราะ เป็นผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC]

(7) จากข้อ (6) $OAC + ACO + BCO + OBC$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา

[นักเรียนควรตอบว่า: มีขนาดเท่ากับ 180 องศา]

7) ครูให้นักเรียนใช้ผลจากการตอบคำถามในการแสดงแนวคิดที่ข้อความคาดการณืเป็นจริง ผ่านการตอบคำถามในขั้นสำรวจข้อความคาดการณืของใบกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 8

ขั้นการพิสูจน์

8) ครูให้นักเรียนวาดรูปจากโปรแกรม GeoGebra เพื่อเป็นรูปที่ใช้ประกอบการพิสูจน์

9) ครูใช้คำถามกระตุ้นและให้นักเรียนทำกิจกรรมเพื่อแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณื ดังนี้

(1) จากรูป สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า: จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม \overline{CO} เป็นรัศมีของวงกลม และ ACB เป็นมุมในครึ่งวงกลม]

(2) จากรูป สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $ACB = 90^\circ$]

(3) ครูให้นักเรียนใช้ผลที่ได้จากขั้นสำรวจข้อความคาดการณืเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ และสุ่มนักเรียนมาเฉลยการพิสูจน์

4.2.4 ครูสรุปผลที่ได้จากการทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณืเกี่ยวกับสมบัติของมุมในครึ่งวงกลม

4.2.5 ครูแจกใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมให้นักเรียนพร้อมทั้งชี้แจงการทำกิจกรรม

4.2.6 เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับบทนิยามของมุมที่จุดศูนย์กลาง ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณืและพิสูจน์ดังนี้

ขั้นสำรวจปัญหา

1) ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตเกี่ยวกับลักษณะของตัวอย่างของมุมที่จุดศูนย์กลางและตัวอย่างที่ไม่เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางในใบกิจกรรมที่ 2 ข้อที่ 1

2) ครูใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันและแตกต่างกันในแต่ละตัวอย่างดังนี้

(1) ในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 นักเรียนคิดว่ามุมที่จุดศูนย์กลาง คือมุมใด

[นักเรียนควรตอบว่า: AOB]

(2) ในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 นักเรียนสังเกตเห็นอะไรที่เหมือนกันบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า:

- O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
- จุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุม
- แขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม]

(3) ในระหว่างรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 มีสิ่งใดที่แตกต่างกัน

[นักเรียนควรตอบว่า: ในรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 จุดศูนย์กลางของวงกลม

ไม่ได้เป็นจุดยอดมุม]

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม

3) ครูให้นักเรียนเขียนข้อความเชิงบทนิยามโดยใช้ผลจากการทำกิจกรรมใน
ขั้นสำรวจปัญหา

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม

4) ครูสุ่มนักเรียนนำเสนอข้อความเชิงบทนิยาม
5) ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของข้อความเชิงบทนิยาม
ผ่านตัวอย่างของรูปและการใช้ภาษาอีกครั้ง เมื่อได้ข้อความที่ถูกต้องแล้ว จึงสรุปเป็นบทนิยาม

4.2.7 เพื่อให้ให้นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับบทนิยามของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ดังนี้

ขั้นสำรวจปัญหา

1) ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตเกี่ยวกับลักษณะของตัวอย่างของมุมในส่วนโค้งของวงกลมและตัวอย่างที่ไม่เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมในใบกิจกรรมที่ 2 ข้อที่ 2

2) ครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันและแตกต่างกันในแต่ละตัวอย่างดังนี้

(1) ในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 นักเรียนคิดว่ามุมที่จุดศูนย์กลาง คือมุมใด

[นักเรียนควรตอบว่า: ABC]

(2) ในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 นักเรียนสังเกตเห็นอะไรที่เหมือนกันบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า:

- O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
- จุดยอดมุมอยู่บนวงกลม
- แขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม]

(3) ในระหว่างรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 มีสิ่งใดที่แตกต่างกัน

[นักเรียนควรตอบว่า: ในรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 จุดบนวงกลมไม่ได้เป็นจุดยอดมุม]

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม

3) ครูให้นักเรียนเขียนข้อความเชิงบทนิยามโดยใช้ผลจากการทำกิจกรรมในขั้นสำรวจปัญหา

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม

4) ครูสุ่มนักเรียนนำเสนอข้อความเชิงบทนิยาม

5) ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของข้อความเชิงบทนิยามผ่านตัวอย่างของรูปและการใช้ภาษาอีกครั้ง เมื่อได้ข้อความที่ถูกต้องแล้ว จึงสรุปเป็นบทนิยาม

4.3 ขั้นสรุป (5 นาที)

4.3.1 เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญจากบทเรียนผ่านการตอบคำถามของครู ดังต่อไปนี้

1) มุมในครึ่งวงกลม คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง]

2) ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมในครึ่งวงกลม กล่าวได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก]

3) มุมที่จุดศูนย์กลาง คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม]

4) มุมในส่วนโค้งของวงกลม คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม]

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<p>1. บอกความหมายและระบุมุมในครึ่งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลมได้</p>	<p>วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องของการนำความรู้เกี่ยวกับบทนิยามของมุมในครึ่งวงกลม ตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 1 และใบกิจกรรมที่ 2</p> <p>เครื่องมือวัดผล : 1. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม 2. ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งของวงกลม</p>	<p>เกณฑ์การให้คะแนน : ในแต่ละข้อคำถาม - ถ้านักเรียนเขียนบทนิยามได้ถูกต้องและชัดเจนทั้งหมด จะได้ 2 คะแนน - ถ้านักเรียนเขียนบทนิยามได้ถูกต้องและชัดเจนบางส่วน จะได้ 1 คะแนน - ถ้านักเรียนเขียนบทนิยามไม่ถูกต้อง จะได้ 0 คะแนน</p> <p>เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 70% ของคะแนนรวมขึ้นไป ถือว่าผ่าน</p>
<p>2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับมุมในครึ่งวงกลมได้</p>	<p>วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องในการเขียนแสดงการพิสูจน์ในใบกิจกรรมที่ 1</p> <p>เครื่องมือวัดผล : ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม</p>	<p>เกณฑ์การให้คะแนน : พิจารณาจากเกณฑ์การให้คะแนนด้านความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ดังแนบไว้ท้ายแผนการจัดการเรียนรู้</p> <p>เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60% ของคะแนนรวมขึ้นไป ถือว่าผ่าน</p>

ตารางแสดงเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

	ระดับคะแนน		
	2	1	0
ด้านการทำความเข้าใจในปัญหา	ระบุสิ่งที่ปัญหา กำหนดและสิ่งที่ต้อง พิสูจน์ได้ถูกต้อง ทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่ง ขึ้นไปของสิ่งที่ต้องระบุ แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ ถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง หรือไม่ระบุ สิ่งที่ปัญหากำหนดและ สิ่งที่ต้องพิสูจน์
ด้านการเขียน แสดงการพิสูจน์	เขียนข้อความ ประกอบการพิสูจน์ได้ อย่างเป็นลำดับ ขั้นตอน และสามารถ นำไปสู่ผลสรุปได้ อย่างถูกต้องทั้งหมด	เขียนข้อความ ประกอบการพิสูจน์ได้ อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ ผลสรุปได้อย่างถูกต้อง ตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถเขียน ข้อความประกอบการ พิสูจน์ได้อย่างเป็น ลำดับขั้นตอน จนนำไปสู่ผลสรุป หรือ ถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง
ด้านการอ้างอิง หรือการนำ เครื่องมือมาใช้ในการ พิสูจน์	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติ ต่าง ๆ หรือข้อมูลที่ โจทย์กำหนดให้ ประกอบแต่ละ ข้อความได้ถูกต้อง ทั้งหมด	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์ กำหนดให้ประกอบแต่ ละข้อความได้ถูกต้อง ตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถอ้าง บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์ กำหนดให้ประกอบ แต่ละข้อความได้ หรือ ถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง
ด้านการใช้ภาษา หรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ ในการพิสูจน์	ใช้ภาษาหรือ สัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ได้ ถูกต้องทั้งหมด	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ได้ ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่ง ขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้อง ทั้งหมด	ไม่สามารถใช้ภาษา หรือสัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง หรือถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง

ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาพินัยมเกี่ยวกับ **มุมในครึ่งวงกลม**

ขั้นสำรวจปัญหา

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างรูปต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A, B และ C เป็นจุดบนวงกลม แล้วเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 และสิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

รูปภาพ	
เป็นตัวอย่างของ "มุมในครึ่งวงกลม"	เป็นตัวอย่างของมุมที่ไม่ใช่ "มุมในครึ่งวงกลม"
<p>รูปที่ 1 รูปที่ 2</p> <p>รูปที่ 3 รูปที่ 4</p>	<p>รูปที่ 5 รูปที่ 6</p> <p>รูปที่ 7 รูปที่ 8</p>
สิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4	สิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทยาม

2. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 1 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความเชิงบทยาม” เพื่อคาดการณ์ว่า บทยามของมุมในครึ่งวงกลมคืออะไร

ข้อความเชิงบทยาม

มุมในครึ่งวงกลม คือ

.....

.....

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทยาม

3. เมื่อตรวจสอบและปรับปรุงข้อความเชิงบทยามแล้ว จะได้บทยามของมุมในครึ่งวงกลม เป็นดังนี้

บทยาม

มุมในครึ่งวงกลม คือ

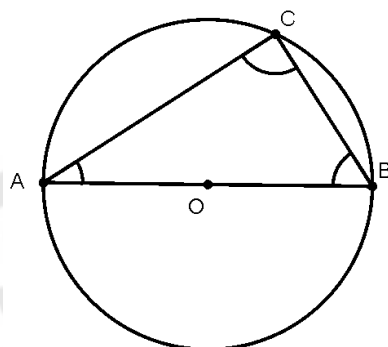
.....

.....

2. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาสมบัติเกี่ยวกับ มุมในครึ่งวงกลม

ขั้นสำรวจปัญหา

ให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act1a.ggb สำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน ดังรูป แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ

วงกลมมีจุดศูนย์กลางคือจุด มีรัศมียาวเท่ากับ
และมีจุด เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม

2. สิ่งที่ต้องการทราบ คือ

3. ในแฟ้ม Act1a.ggb ให้นักเรียนปรับความยาวของรัศมีวงกลม เลื่อนจุด A เพื่อปรับตำแหน่งของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม เลื่อนจุด C เพื่อปรับตำแหน่งของจุดบนวงกลม และเลื่อนจุด r เพื่อปรับความยาวรัศมีของวงกลมตามต้องการ แล้วบันทึกผลในตารางต่อไปนี้

ครั้งที่	ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม
1	
2	
3	
4	
5	

ชั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

จากตารางในข้อที่ 3 ของชั้นสำรวจปัญหา ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับ
ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม
ข้อความคาดการณ์

.....

.....

ชั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาผลจากการสำรวจแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของนักเรียนเป็นจริง

ตอบ

2. ให้นักเรียนสำรวจเกี่ยวกับองค์ประกอบอื่น ๆ ในรูปเพิ่มเติมแล้วบันทึกผลลงในตาราง

ครั้งที่	ขนาดของมุม (องศา)				ความยาวของส่วนของเส้นตรง		
	<i>ACO</i>	<i>BCO</i>	<i>OAC</i>	<i>OBC</i>	<i>AO</i>	<i>BO</i>	<i>CO</i>
1							
2							
3							
4							
5							

3. ความยาวของส่วนของเส้นตรง *AO*, *BO* และ *CO* มีความสัมพันธ์กันอย่างไร
เพราะเหตุใด

ตอบ

4. $\triangle AOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด

ตอบ

5. $\triangle BOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด

ตอบ

6. ขนาดของมุม OAC กับ ACO และขนาดของมุม OBC กับ BCO มีความสัมพันธ์กันอย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

7. ขนาดของมุม ACB มีความสัมพันธ์กับขนาดของมุม ACO และ BCO อย่างไร

ตอบ

8. $BAC + ABC + ACB$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา เพราะเหตุใด

ตอบ

9. จากข้อ 8 $OAC + ACO + BCO + OBC$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา

ตอบ

10. ให้นักเรียนแสดงแนวคิดโดยใช้ผลที่ได้จากข้อที่ 3 – 9 ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง

แนวคิด

.....

.....

.....

.....

ขั้นการพิสูจน์

ให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ดังนี้
รูปภาพประกอบการพิสูจน์

สิ่งที่กำหนดให้

.....

.....

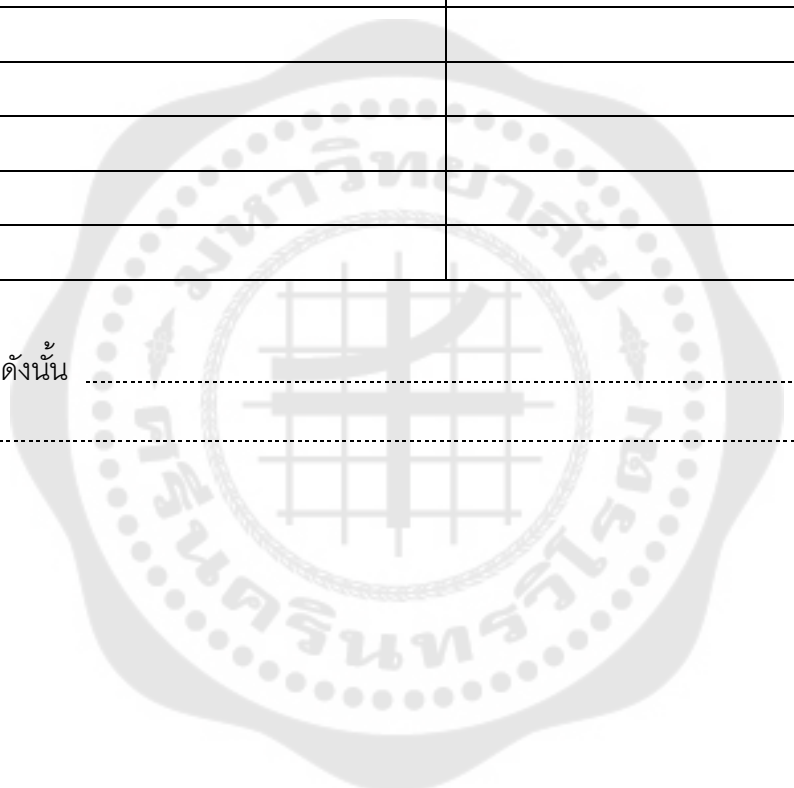
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

.....

สร้างเพื่อพิสูจน์
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น



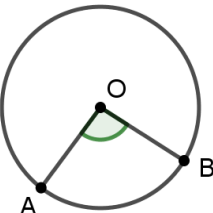
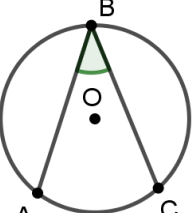
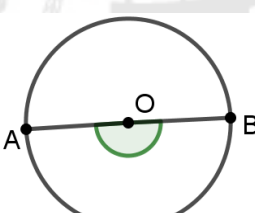
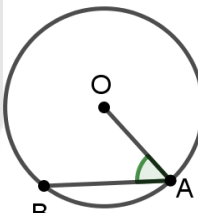
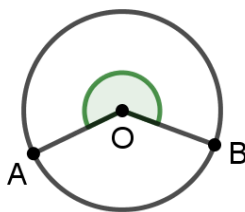
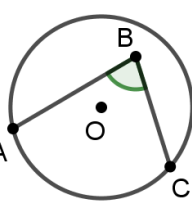
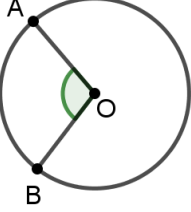
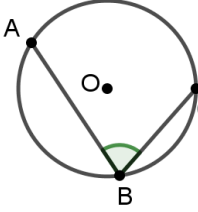
ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาพินัยมเกี่ยวกับ มุมที่จุดศูนย์กลาง

ขั้นสำรวจปัญหา

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างรูปต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A และ B เป็นจุดบนวงกลม แล้วเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 และสิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

รูปภาพ	
เป็นตัวอย่างของ "มุมที่จุดศูนย์กลาง"	เป็นตัวอย่างของมุมที่ไม่ใช่ "มุมที่จุดศูนย์กลาง"
 <p>รูปที่ 1</p>	 <p>รูปที่ 5</p>
 <p>รูปที่ 2</p>	 <p>รูปที่ 6</p>
 <p>รูปที่ 3</p>	 <p>รูปที่ 7</p>
 <p>รูปที่ 4</p>	 <p>รูปที่ 8</p>

สิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4	สิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทยาม

2. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 1 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความเชิงบทยาม” เพื่อคาดการณ์ว่าบทยามของมุมที่จุดศูนย์กลาง คืออะไร

ข้อความเชิงบทยาม

มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ

.....

.....

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทยาม

3. เมื่อตรวจสอบและปรับปรุงข้อความเชิงบทยามแล้ว จะได้บทยามของมุมที่จุดศูนย์กลาง เป็นดังนี้

บทยาม

มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ

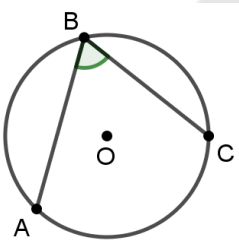
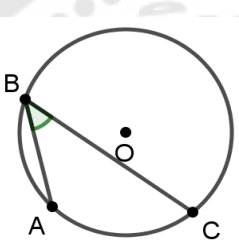
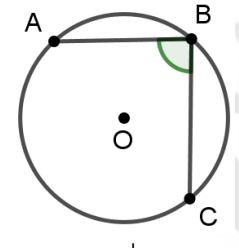
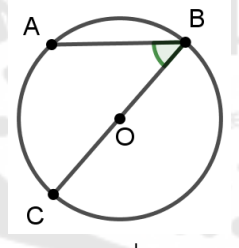
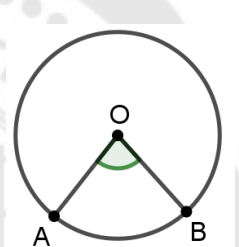
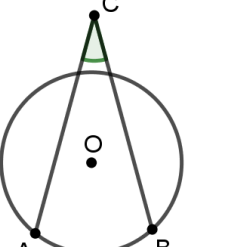
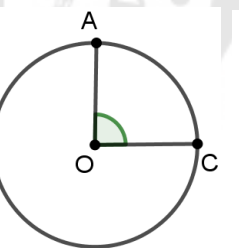
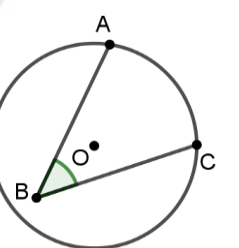
.....

.....

2. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาทฤษฎีเกี่ยวกับ มุมในส่วนโค้งของวงกลม

ขั้นสำรวจปัญหา

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างรูปต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A และ B เป็นจุดบนวงกลม แล้วเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันระหว่างรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 และสิ่งที่แตกต่างกันระหว่างรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

รูปภาพ	
เป็นตัวอย่างของ "มุมในส่วนโค้งของวงกลม"	เป็นตัวอย่างของมุมที่ไม่ใช่ "มุมในส่วนโค้งของวงกลม"
 รูปที่ 1	 รูปที่ 2
 รูปที่ 3	 รูปที่ 4
 รูปที่ 5	 รูปที่ 6
 รูปที่ 7	 รูปที่ 8

สิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4	สิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทยาม

2. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 1 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความเชิงบทยาม” เพื่อคาดการณ์ว่าบทยามของมุมในส่วนโค้งของวงกลม คืออะไร

ข้อความเชิงบทยาม

มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ

.....

.....

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทยาม

3. เมื่อตรวจสอบและปรับปรุงข้อความเชิงบทยามแล้ว จะได้บทยามของมุมในส่วนโค้งของวงกลม เป็นดังนี้

บทยาม

มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ

.....

.....

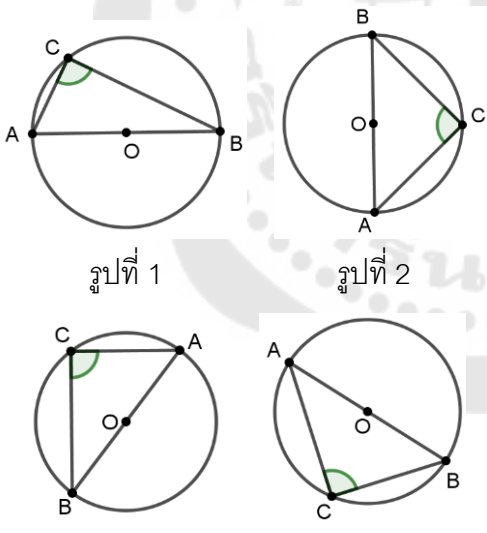
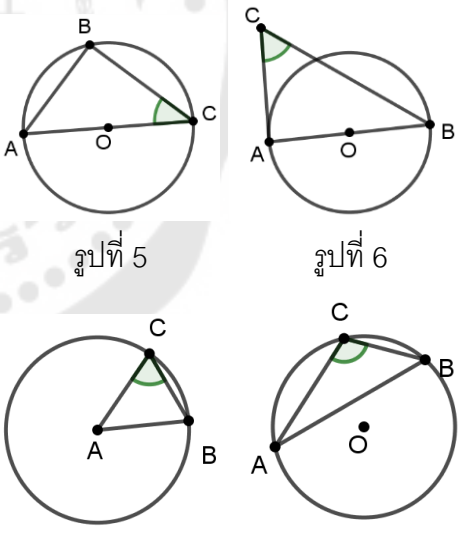
เฉลย ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาทฤษฎีเกี่ยวกับ **มุมในครึ่งวงกลม**

ขั้นสำรวจปัญหา

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างรูปต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A, B และ C เป็นจุดบนวงกลม แล้วเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 และสิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

รูปภาพ	
เป็นตัวอย่างของ "มุมในครึ่งวงกลม"	เป็นตัวอย่างของมุมที่ไม่ใช่ "มุมในครึ่งวงกลม"
 <p>รูปที่ 1 รูปที่ 2</p> <p>รูปที่ 3 รูปที่ 4</p>	 <p>รูปที่ 5 รูปที่ 6</p> <p>รูปที่ 7 รูปที่ 8</p>
สิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4	สิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8
<ul style="list-style-type: none"> - O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม - A, B และ C เป็นจุดบนวงกลม - \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม 	<ul style="list-style-type: none"> - ในรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 ACB ในแต่ละรูปไม่ได้มีแกนของมุมทั้งสองผ่านจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม

2. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 1 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความเชิงบทนิยาม” เพื่อคาดการณ์ว่าบทนิยามของมุมในครึ่งวงกลม คืออะไร

ข้อความเชิงบทนิยาม

มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม

3. เมื่อตรวจสอบและปรับปรุงข้อความเชิงบทนิยามแล้ว จะได้บทนิยามของมุมในครึ่งวงกลม เป็นดังนี้

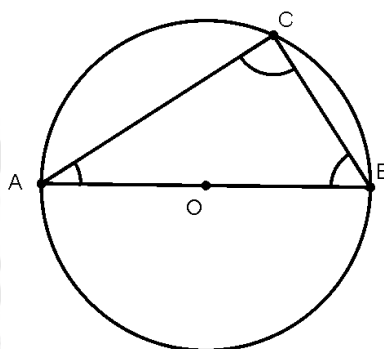
บทนิยาม

มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง

2. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาสมบัติเกี่ยวกับ มุมในครึ่งวงกลม

ขั้นสำรวจปัญหา

ให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act1a.ggb สำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน ดังรูป แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ

วงกลมมีจุดศูนย์กลางคือจุด O มีรัศมียาวเท่ากับ r และมีจุด C เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม

2. สิ่งที่ต้องการทราบ คือ สมบัติของมุมในครึ่งวงกลม หรือ ACB

3. ในแฟ้ม Act1a.ggb ให้นักเรียนปรับความยาวของรัศมีวงกลม เลื่อนจุด A เพื่อปรับตำแหน่งของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม เลื่อนจุด C เพื่อปรับตำแหน่งของจุดบนวงกลม และเลื่อนจุด r เพื่อปรับความยาวรัศมีของวงกลมตามต้องการ แล้วบันทึกผลในตารางต่อไปนี้

ครั้งที่	ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม ACB
1	90°
2	90°
3	90°
4	90°
5	90°

ชั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

จากตารางในข้อที่ 3 ของชั้นสำรวจปัญหา ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับ
ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม

ข้อความคาดการณ์

มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือ หนึ่งมุมฉาก

ชั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาผลจากการสำรวจแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของนักเรียนเป็นจริง

ตอบ ลาก \overline{OC}

2. ให้นักเรียนสำรวจเกี่ยวกับองค์ประกอบอื่น ๆ ในรูปเพิ่มเติมแล้วบันทึกผลลงในตาราง

ครั้งที่	ขนาดของมุม (องศา)				ความยาวของส่วนของเส้นตรง		
	ACO	BCO	OAC	OBC	AO	BO	CO
1	50.22	39.78	50.22	39.78	3	3	3
2	28.41	61.59	28.41	61.59	2	2	2
3	52.48	37.52	52.48	37.52	4	4	4
4	17.90	72.10	17.90	72.10	2.5	2.5	2.5
5	51.64	38.36	51.64	38.36	3.5	3.5	3.5

3. ความยาวของส่วนของเส้นตรง AO , BO และ CO มีความสัมพันธ์กันอย่างไร
เพราะเหตุใด

ตอบ มีความยาวเท่ากัน เพราะ เป็นความยาวของรัศมีวงกลมวงเดียวกัน

4. $\triangle AOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด

ตอบ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $AO = CO$

5. $\triangle BOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด

ตอบ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $BO = CO$

6. ขนาดของมุม OAC กับ ACO และขนาดของมุม OBC กับ BCO มีความสัมพันธ์กันอย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ มีขนาดเท่ากัน เพราะ เป็นขนาดของมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

7. ขนาดของมุม ACB มีความสัมพันธ์กับขนาดของมุม ACO และ BCO อย่างไร

ตอบ ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม $ACB = ACO + BCO$

8. $BAC + ABC + ACB$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา เพราะเหตุใด

ตอบ มีขนาดเท่ากับ 180 องศา เพราะ เป็นผลรวมของมุมภายในของ $\triangle ABC$

9. จากข้อ 8 $OAC + ACO + BCO + OBC$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา

ตอบ 180 องศา

10. ให้นักเรียนแสดงแนวคิดโดยใช้ผลที่ได้จากข้อที่ 3 – 9 ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง

แนวคิด พิจารณา $OAC + ACO + BCO + OBC = 180^\circ$ (จากข้อ 9)

$$ACO + ACO + BCO + BCO = 180^\circ \quad (\text{แทนค่าจากข้อ 6})$$

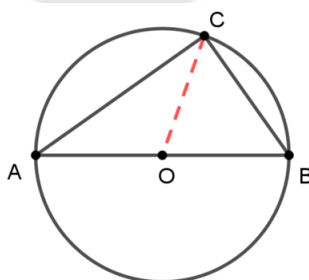
$$2(ACO) + 2(BCO) = 180^\circ$$

$$ACO + BCO = 90^\circ$$

$$ACB = 90^\circ \quad (\text{จากข้อ 7})$$

ขั้นการพิสูจน์

ให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ดังนี้
รูปภาพประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้

จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

\overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ

ACB เป็นมุมในครึ่งวงกลม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$ACB = 90^\circ$$

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก \overline{OC} ซึ่งเป็นรัศมีของวงกลม
 พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AO = BO = CO$	รัศมีของวงกลมเดียวกัน มีความยาวเท่ากัน
2. $\triangle AOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	$AO = CO$
3. $\triangle BOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	$BO = CO$
4. $OAC = ACO$ และ $OBC = BCO$	เป็นมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
5. $BAC + ABC + ACB = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC
6. $OAC + ACO + BCO + OBC = 180^\circ$	จากข้อ 5
7. $ACO + ACO + BCO + BCO = 180^\circ$	แทนค่าจากข้อ 4 ในข้อ 6
8. $ACO + BCO = 90^\circ$	จากข้อ 7 โดยสมบัติของการเท่ากัน
9. $ACB = 90^\circ$	จากข้อ 8

ดังนั้น ACB มีขนาด 90° หรือหนึ่งมุมฉาก

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 2

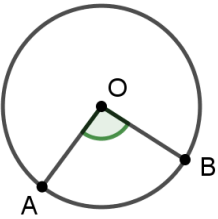
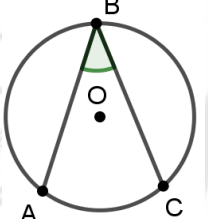
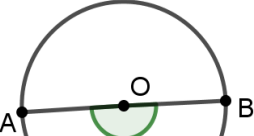
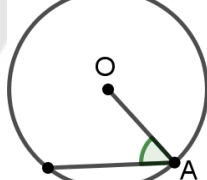
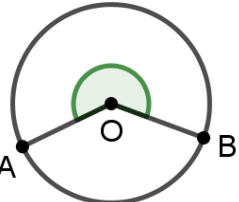
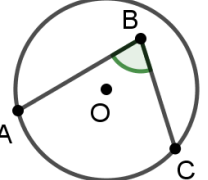
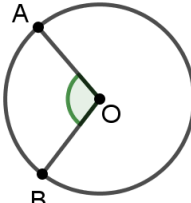
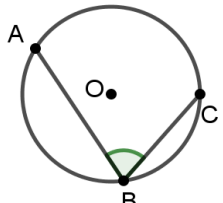
เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาพินัยัมเกี่ยวกับ มุมที่จุดศูนย์กลาง

ขั้นสำรวจปัญหา

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างรูปต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A และ B เป็นจุดบนวงกลม แล้วเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 และสิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

รูปภาพ	
เป็นตัวอย่างของ "มุมที่จุดศูนย์กลาง"	เป็นตัวอย่างของมุมที่ไม่ใช่ "มุมที่จุดศูนย์กลาง"
 รูปที่ 1	 รูปที่ 5
 รูปที่ 2	 รูปที่ 6
 รูปที่ 3	 รูปที่ 7
 รูปที่ 4	 รูปที่ 8
<p>สิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4</p>	<p>สิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8</p>
<ul style="list-style-type: none"> - O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม - จุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุม - แขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม 	<ul style="list-style-type: none"> - ในรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 จุดศูนย์กลางของวงกลมไม่ได้เป็นจุดยอดมุม

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม

2. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 1 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความเชิงบทนิยาม” เพื่อคาดการณ์ว่าบทนิยามของมุมที่จุดศูนย์กลาง คืออะไร

ข้อความเชิงบทนิยาม

มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม

3. เมื่อตรวจสอบและปรับปรุงข้อความเชิงบทนิยามแล้ว จะได้บทนิยามของมุมที่จุดศูนย์กลาง เป็นดังนี้

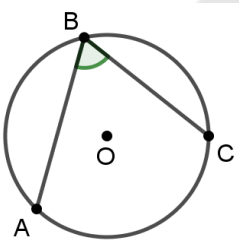
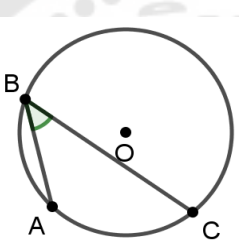
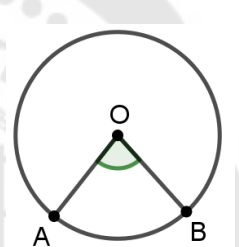
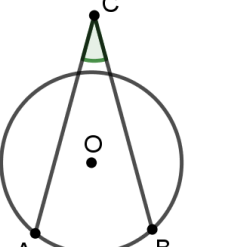
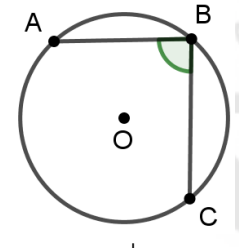
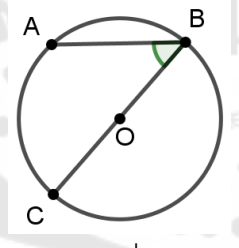
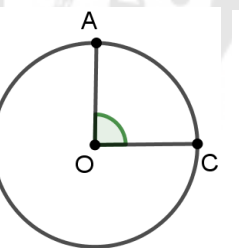
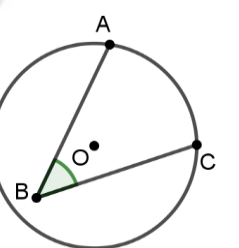
บทนิยาม

มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

2. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาทฤษฎีเกี่ยวกับ มุมในส่วนโค้งของวงกลม

ขั้นสำรวจปัญหา

1. ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างรูปต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A และ B เป็นจุดบนวงกลม แล้วเปรียบเทียบสิ่งที่เหมือนกันระหว่างรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 และสิ่งที่แตกต่างกันระหว่างรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8

รูปภาพ	
เป็นตัวอย่างของ "มุมในส่วนโค้งของวงกลม"	เป็นตัวอย่างของมุมที่ไม่ใช่ "มุมในส่วนโค้งของวงกลม"
 <p>รูปที่ 1</p>  <p>รูปที่ 2</p>	 <p>รูปที่ 5</p>  <p>รูปที่ 6</p>
 <p>รูปที่ 3</p>  <p>รูปที่ 4</p>	 <p>รูปที่ 7</p>  <p>รูปที่ 8</p>

สิ่งที่เหมือนกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4	สิ่งที่แตกต่างกันในรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 กับรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8
<ul style="list-style-type: none"> - O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม - จุดยอดมุมอยู่บนวงกลม - แขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม 	<ul style="list-style-type: none"> - ในรูปที่ 5 ถึงรูปที่ 8 จุดบนวงกลมไม่ได้เป็นจุดยอดมุม

ขั้นการเขียนข้อความเชิงบทนิยาม

2. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 1 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความเชิงบทนิยาม” เพื่อคาดการณ์ว่าบทนิยามของมุมในส่วนโค้งของวงกลม คืออะไร

ข้อความเชิงบทนิยาม

มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

ขั้นตรวจสอบข้อความเชิงบทนิยาม

3. เมื่อตรวจสอบและปรับปรุงข้อความเชิงบทนิยามแล้ว จะได้บทนิยามของมุมในส่วนโค้งของวงกลม เป็นดังนี้

บทนิยาม

มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยการเรียนรู้ วงกลม

หัวข้อเรื่อง คอร์ด (2)

ปีการศึกษา 2561

ภาคเรียนที่ 2

เวลา 90 นาที

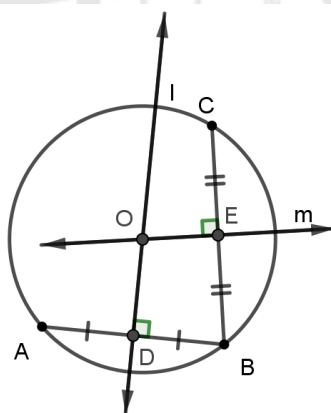
1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียน

1. เขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติของคอร์ดได้
2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ดได้

2. สาระการเรียนรู้

การหาจุดศูนย์กลางของวงกลม



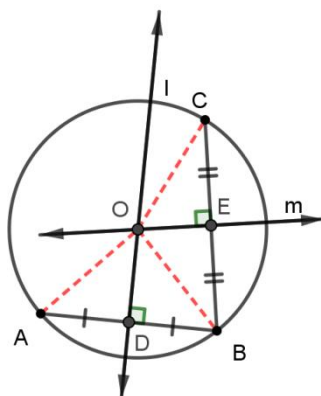
สิ่งที่กำหนดให้ \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง

สิ่งที่ต้องสร้าง สร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้

สร้าง

1. สร้างเส้นตรง l ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{AB}
2. สร้างเส้นตรง m ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}
3. ให้เส้นตรง l และ m ตัดกันที่จุด O

จะได้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



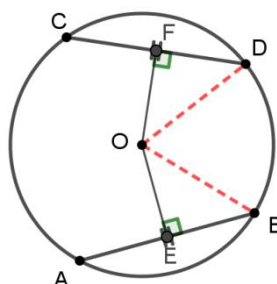
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก \overline{AO} , \overline{BO} และ \overline{CO}

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AD = BD$	1. จากการสร้าง
2. $ADO = BDO$	2. จากการสร้าง
3. $DO = DO$	3. เป็นด้านร่วม
4. $\triangle ADO \cong \triangle BDO$	4. ด.ม.ด.
5. $OA = OB$	5. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน
6. $BE = CE$	6. จากการสร้าง
7. $BEO = CEO$	7. จากการสร้าง
8. $EO = EO$	8. เป็นด้านร่วม
9. $\triangle BEO \cong \triangle CEO$	9. ด.ม.ด.
10. $OB = OC$	10. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน
11. $OA = OB = OC$	11. จากข้อ 5 และ 10 โดยสมบัติการเท่ากัน
12. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม	12. จากข้อ 11 จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ห่างจากจุดบนวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 14 ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้น จะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน



สิ่งที่กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{CD}
เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E และ
 $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ที่จุด F

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $OE = OF$

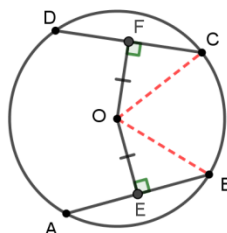
สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก \overline{OB} และ \overline{OC}

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AE = BE$	1. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
2. $DF = CF$	2. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
3. $BE = \frac{AB}{2}$	3. จากข้อ 1
4. $CF = \frac{CD}{2}$	4. จากข้อ 2
5. $AB = CD$	5. โจทย์กำหนด
6. $BE = CF$	6. จากข้อ 3 – 5
7. $OEB = OFC$	7. โจทย์กำหนด
8. $OB = OC$	8. รัศมีของวงกลมวงเดียวกัน จะยาวเท่ากัน
9. $\triangle OEB \cong \triangle OFC$	9. อ.ด.ด.
10. $OE = OF$	10. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน

ดังนั้น $OE = OF$ หรือ คอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 15 ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน



สิ่งที่กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{CD} เป็นคอร์ด
 $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E และ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ที่จุด F
 และ $OE = OF$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AB = CD$

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก \overline{OB} และ \overline{OC}

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $OEB = OFC$	1. โจทย์กำหนด
2. $OE = OF$	2. โจทย์กำหนด
3. $OB = OC$	3. รัศมีของวงกลมวงเดียวกัน จะยาวเท่ากัน
4. $\triangle OEB \cong \triangle OFC$	4. จ.ด.ด.
5. $BE = CF$	5. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากัน ทุกประการจะยาวเท่ากัน
6. $2(BE) = 2(CF)$	6. จากข้อ 5 โดยสมบัติการเท่ากัน
7. $AE = BE$	7. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและ ตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
8. $DF = CF$	8. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและ ตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
9. $AB = CD$	9. จากข้อ 6 – 9

ดังนั้น $AB = CD$ หรือ คอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

3. สื่อการเรียนรู้/ แหล่งการเรียนรู้

3.1 ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอรีด (2)

3.2 แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติในโปรแกรม GeoGebra เรื่อง คอรีด

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ (10 นาที)

4.1.1 ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมบางทฤษฎีบทที่ได้เรียนมาแล้วดังนี้

1) ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเท่ากับกึ่งของศา
[นักเรียนควรตอบว่า: 180 องศา]

2) ในวงกลมวงเดียวกัน คอรีดสองคอรีดยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ คอรีดทั้งสองตัดวงกลมแล้วได้ความยาวของส่วนโค้งน้อยและส่วนโค้งใหญ่เป็นอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: เท่ากัน]

3) เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับคอรีดของวงกลม

[นักเรียนควรตอบว่า: ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอรีดนั้น]

4.2 ขั้นสอน (75 นาที)

4.2.1 ครูแจกใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอรีด (2) ให้นักเรียนพร้อมทั้งชี้แจงการทำกิจกรรม

4.2.2 เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้วิธีการหาจุดศูนย์กลางของวงกลม ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในข้อที่ 1 ของใบกิจกรรมที่ 5 ดังนี้

ขั้นสำรวจปัญหา

1) ครูให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act5a.ggb แล้วสำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน แล้วใช้คำถามกระตุ้นดังนี้

(1) ในแฟ้มงาน Act5a.ggb สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า: \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอรีดของวงกลมวงหนึ่ง]

(2) สิ่งที่ต้องการทราบคืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: สร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้]

2) ครูให้นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อหาแนวคิดในการสร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดคอรีดมาให้สองคอรีด และสังเกตการทำกิจกรรมของนักเรียน

3) ครูสุ่มนักเรียนนำเสนอแนวคิดในการสร้าง และร่วมกันตรวจสอบวิธีการสร้าง จากนั้นจึง ปรับปรุง และเรียบเรียงเป็นแนวคิดในการสร้างที่ถูกต้อง

ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

4) ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตผลที่ได้จากการสำรวจปัญหา ค้นหาวิธีการสร้าง แล้วถามว่านักเรียนสามารถคาดการณ์วิธีการสร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: กำหนดให้ \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง จะสามารถสร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมได้ดังนี้

(1) สร้างเส้นตรง l ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{AB}

(2) สร้างเส้นตรง m ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}

(3) ให้เส้นตรง l และ m ตัดกันที่จุด O

จะได้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม]

ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

5) ครูถามนักเรียนว่า นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของนักเรียนเป็นจริง

[นักเรียนควรตอบว่า: ลาก \overline{OA} , \overline{OB} และ \overline{OC}]

6) ครูให้นักเรียนสร้าง \overline{OA} , \overline{OB} และ \overline{OC} ในแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra

7) ครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนหาเหตุผลที่ทำให้ข้อความคาดการณ์เป็นจริง ดังนี้

(1) $\triangle AOB$ และ $\triangle AOC$ มีความสัมพันธ์อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $\triangle AOB \cong \triangle AOC$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.]

(2) \overline{OA} และ \overline{OB} มีความสัมพันธ์อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $OA = OB$ เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน]

(3) $\triangle BEO$ และ $\triangle CEO$ มีความสัมพันธ์อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $\triangle BEO \cong \triangle CEO$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.]

(4) \overline{OB} และ \overline{OC} มีความสัมพันธ์อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $OB = OC$ เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน]

(5) จาก $OA = OB$ และ $OB = OC$ สามารถสรุปได้ว่าอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $OA = OB = OC$]

(6) เพราะเหตุใดจากผลที่ได้ จึงสามารถสรุปได้ว่า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

[นักเรียนควรตอบว่า: จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ห่างจากจุดบนวงกลมเป็นระยะเท่ากัน]

ขั้นการพิสูจน์

7) ครูให้นักเรียนวาดรูปจากโปรแกรม GeoGebra เพื่อเป็นรูปที่ใช้ประกอบการพิสูจน์

8) ครูใช้คำถามกระตุ้นและให้นักเรียนทำกิจกรรมเพื่อแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ ดังนี้

(1) จากรูป สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า: \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง]

(2) การสร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลม มีขั้นตอนอย่างไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า:

1. สร้างเส้นตรง l ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{AB}
2. สร้างเส้นตรง m ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}
3. ให้เส้นตรง l และ m ตัดกันที่จุด O

จะได้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม]

(3) จากรูป สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม]

(4) ครูให้นักเรียนใช้ผลที่ได้จากขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์เขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ และสุ่มนักเรียนมาเฉลยการพิสูจน์

4.2.3 ครูสรุปผลที่ได้จากการทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เกี่ยวกับวิธีการหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

4.2.4 เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากัน ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ในข้อที่ 2 ของใบกิจกรรมที่ 5 ดังนี้

ขั้นสำรวจปัญหา

1) ครูให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act5b.ggb แล้วสำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน แล้วใช้คำถามกระตุ้นดังนี้

(1) ในแฟ้มงาน Act5b.ggb สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า: O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{CD} เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E และ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ที่จุด F]

(2) สิ่งที่ต้องการทราบคืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: ระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม]

2) ครูให้นักเรียนใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อสำรวจความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากัน แล้วบันทึกผลลงในข้อที่ 2 ของใบกิจกรรมที่ 5 ในขั้นสำรวจปัญหาข้อที่ 3

ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

3) ครูให้นักเรียนร่วมกันสังเกตผลที่ได้จากการวัดระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากันในแต่ละครั้ง และถามว่า นักเรียนสามารถสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากันได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน]

ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

4) ครูถามนักเรียนว่า นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของนักเรียนเป็นจริง

[นักเรียนควรตอบว่า: ลาก \overline{OB} และ \overline{OC}]

5) ครูให้นักเรียนสร้าง \overline{OB} และ \overline{OC} ในแฟ้มงานในโปรแกรม GeoGebra

6) ครูใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนหาเหตุผลที่ทำให้ข้อความคาดการณ์เป็นจริง ดังนี้

(1) \overline{AE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{BE} อย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $AE = BE$ เพราะ ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด]

(2) \overline{BE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{AB} อย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $BE = \frac{AB}{2}$ เพราะ $AE = BE$]

(3) ในทำนองเดียวกัน \overline{CF} มีความสัมพันธ์กับ \overline{CD} อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $CF = \frac{CD}{2}$]

(4) \overline{AB} มีความสัมพันธ์กับ \overline{CD} อย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $AB = CD$ เพราะ กำหนดให้]

(5) จากการตอบคำถาม สามารถสรุปความสัมพันธ์ของ \overline{BE} และ \overline{CF}

ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $BE = CF$]

(6) $\triangle OEB$ มีความสัมพันธ์กับ $\triangle OFC$ อย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $\triangle OEB = \triangle OFC$ เพราะ กำหนดให้]

(7) \overline{OB} มีความสัมพันธ์กับ \overline{OC} อย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $OB = OC$ เพราะ รัศมีของวงกลมวงเดียวกัน

จะยาวเท่ากัน]

(8) $\triangle OEB$ มีความสัมพันธ์กับ $\triangle OFC$ อย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ เพราะ จ.ด.ด.]

(9) \overline{OE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{OF} อย่างไร เพราะเหตุใด

[นักเรียนควรตอบว่า: $OE = OF$ เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของ

รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน]

ขั้นการพิสูจน์

7) ครูให้นักเรียนวาดรูปจากโปรแกรม GeoGebra เพื่อเป็นรูปที่ใช้ประกอบการพิสูจน์

8) ครูใช้คำถามกระตุ้นและให้นักเรียนทำกิจกรรมเพื่อแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ ดังนี้

(1) จากรูป สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า: O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{CD} เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E และ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ที่จุด F]

(2) จากรูป สิ่งที่ต้องพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า: $OE = OF$]

(3) ครูให้นักเรียนใช้ผลที่ได้จากขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์เขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ และสุ่มนักเรียนมาเฉลยการพิสูจน์

4.2.5 ครูสรุปผลที่ได้จากการทำกิจกรรมด้วยวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์ เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากัน และให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์ว่าบทกลับของทฤษฎีบทที่ได้เป็นจริงเป็นการบ้านในข้อที่ 3 ของใบกิจกรรมที่ 5

4.3 ชั้นสรุป (5 นาที)

4.3.1 เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ด นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญจากบทเรียนผ่านการตอบคำถามกระตุ้นของครู ดังต่อไปนี้

1) การสร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมสามารถทำได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า:

1. ลาก \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอร์ดของวงกลม
2. สร้างเส้นตรง l ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{AB}
3. สร้างเส้นตรง m ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}
4. ให้เส้นตรง l และ m ตัดกันที่จุด O

จะได้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม]

2) ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ดที่นักเรียนได้เรียนรู้ไปในคาบนี้กล่าวอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า: ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน]

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
1. เขียนข้อความ คาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติของคอร์ดได้	<p>วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องของการเขียนข้อความคาดการณ์ในใบกิจกรรมที่ 5</p> <p>เครื่องมือวัดผล : ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ด (2)</p>	<p>เกณฑ์การให้คะแนน : ในแต่ละข้อคำถาม</p> <ul style="list-style-type: none"> - ถ้านักเรียนเขียนข้อความ คาดการณ์ได้ถูกต้องและชัดเจนทั้งหมด จะได้ 2 คะแนน - ถ้านักเรียนเขียนข้อความ คาดการณ์ได้ถูกต้องและชัดเจนบางส่วน จะได้ 1 คะแนน - ถ้านักเรียนเขียนข้อความ คาดการณ์ไม่ถูกต้อง จะได้ 0 คะแนน <p>เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 70% ของคะแนนรวมขึ้นไป ถือว่าผ่าน</p>
2. พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ดได้	<p>วิธีวัดผล : พิจารณาจากความถูกต้องในการเขียนแสดงการพิสูจน์ในใบกิจกรรมที่ 5</p> <p>เครื่องมือวัดผล : ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ด (2)</p>	<p>เกณฑ์การให้คะแนน : พิจารณาจากเกณฑ์การให้คะแนนด้านความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ดังแนบไว้ท้ายแผนการจัดการเรียนรู้</p> <p>เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60% ของคะแนนรวมขึ้นไป ถือว่าผ่าน</p>

ตารางแสดงเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม

	ระดับคะแนน		
	2	1	0
ด้านการทำความเข้าใจในปัญหา	ระบุสิ่งที่ปัญหา กำหนดและสิ่งที่ต้อง พิสูจน์ได้ถูกต้อง ทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่ง ขึ้นไปของสิ่งที่ต้องระบุ แต่ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ระบุสิ่งที่ปัญหากำหนด และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้ ถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง หรือไม่ระบุ สิ่งทีปัญหากำหนดและ สิ่งที่ต้องพิสูจน์
ด้านการเขียน แสดงการพิสูจน์	เขียนข้อความ ประกอบการพิสูจน์ได้ อย่างเป็นลำดับ ขั้นตอน และสามารถ นำไปสู่ผลสรุปได้ อย่างถูกต้องทั้งหมด	เขียนข้อความ ประกอบการพิสูจน์ได้ อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และสามารถนำไปสู่ ผลสรุปได้อย่างถูกต้อง ตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถเขียน ข้อความประกอบการ พิสูจน์ได้อย่างเป็น ลำดับขั้นตอน จนนำไปสู่ผลสรุป หรือ ถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง
ด้านการอ้างอิง หรือการนำ เครื่องมือมาใช้ในการ พิสูจน์	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติ ต่าง ๆ หรือข้อมูลที่ โจทย์กำหนดให้ ประกอบแต่ละ ข้อความได้ถูกต้อง ทั้งหมด	อ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์ กำหนดให้ประกอบแต่ ละข้อความได้ถูกต้อง ตั้งแต่ครั้งหนึ่งขึ้นไป แต่ ไม่ถูกต้องทั้งหมด	ไม่สามารถอ้าง บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท สมบัติต่าง ๆ หรือข้อมูลที่โจทย์ กำหนดให้ประกอบ แต่ละข้อความได้ หรือ ถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง
ด้านการใช้ภาษา หรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ ในการพิสูจน์	ใช้ภาษาหรือ สัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ได้ ถูกต้องทั้งหมด	ใช้ภาษาหรือสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ได้ ถูกต้องตั้งแต่ครั้งหนึ่ง ขึ้นไป แต่ไม่ถูกต้อง ทั้งหมด	ไม่สามารถใช้ภาษา หรือสัญลักษณ์ทาง คณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง หรือถูกต้องน้อยกว่า ครั้งหนึ่ง

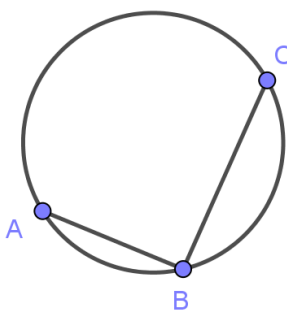
ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ด (2)

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาวิธีการหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

ขั้นสำรวจปัญหา

ให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act5a.ggb ซึ่งจะปรากฏดังรูป สำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ

.....

2. สิ่งที่ต้องการสร้าง คือ

.....

3. แนวคิดในการสร้าง

.....

.....

.....

.....

.....

4. ให้นักเรียนปรับความยาวของรัศมีวงกลม เลื่อนจุด A , B และ C แล้วสำรวจว่าการสร้างของนักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลางของวงกลมได้หรือไม่

ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

จากผลที่ได้ในขั้นสำรวจปัญหา ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับ การสร้าง
เพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

ข้อความคาดการณ์

กำหนดให้ จะสามารถสร้างเพื่อหา
จุดศูนย์กลางของวงกลมได้ดังนี้

.....

.....

.....

.....

ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาผลจากการสำรวจแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของ
นักเรียนเป็นจริง

ตอบ

2. $\triangle ADO$ และ $\triangle BDO$ มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ

3. \overline{OA} และ \overline{OB} มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ

4. $\triangle BEO$ และ $\triangle CEO$ มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ

5. \overline{OB} และ \overline{OC} มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ

6. จากข้อ 3 และข้อ 5 สามารถสรุปได้ว่าอย่างไร

ตอบ

7. จากข้อ 6 เพราะเหตุใดจุด O ที่ได้เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ตอบ

ชั้นการพิสูจน์

ให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ดังนี้
รูปภาพประกอบการพิสูจน์

สิ่งที่กำหนดให้
สร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

.....
.....
.....
.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์
สร้างเพื่อพิสูจน์

.....
.....

พิสูจน์

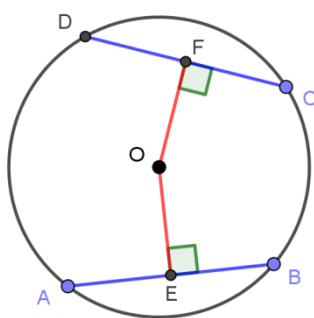
ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

2. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไป นี้ เพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากัน

ขั้นสำรวจปัญหา

ให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act5b.ggb ซึ่งจะปรากฏดังรูป สำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



- สิ่งที่กำหนดให้ คือ
.....
.....
- สิ่งที่ต้องการทราบ คือ
- ให้นักเรียนปรับความยาวของรัศมีวงกลม เลื่อนจุดต่าง ๆ ในแฟ้มงาน แล้วบันทึกผลในตารางต่อไปนี้

ครั้งที่	ระยะห่างระหว่างคอร์ดและวงกลม เมื่อคอร์ดทั้งสองยาวเท่ากัน	
	\overline{OE}	\overline{OF}
1		
2		
3		

ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

จากตารางในข้อที่ 3 ของขั้นสำรวจปัญหา ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากัน

ข้อความคาดการณ์

ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาผลจากการสำรวจแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของนักเรียนเป็นจริง

ตอบ

2. \overline{AE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{BE} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

3. \overline{BE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{AB} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

4. \overline{CF} มีความสัมพันธ์กับ \overline{CD} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

5. \overline{AB} มีความสัมพันธ์กับ \overline{CD} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

6. จากข้อ 3 – 5 สามารถสรุปได้ว่าอย่างไร

ตอบ

7. $\angle OEB$ มีความสัมพันธ์กับ $\angle OFC$ อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

8. \overline{OB} มีความสัมพันธ์กับ \overline{OC} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

9. $\triangle OEB$ มีความสัมพันธ์กับ $\triangle OFC$ อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

10. \overline{OE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{OF} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ

ชั้นการพิสูจน์

ให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ดังนี้
 รูปภาพประกอบการพิสูจน์

สิ่งที่กำหนดให้

สิ่งที่ต้องพิสูจน์
 สร้างเพื่อพิสูจน์

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

3. ให้นักเรียนเขียนบทกลับของทฤษฎีบทที่ได้จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 2 พร้อมพิสูจน์ว่า
ข้อความนั้นเป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ได้ในข้อที่ 2

บทกลับของทฤษฎีบทที่ได้ในข้อที่ 2

รูปภาพประกอบการพิสูจน์

สิ่งที่กำหนดให้

.....

.....

.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

สร้างเพื่อพิสูจน์

พิสูจน์

.....

.....

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

.....

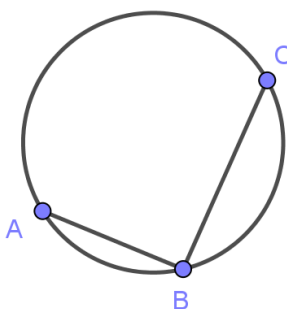
เฉลย ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่อง ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคอร์ด (2)

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้ เพื่อค้นหาวิธีการหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

ขั้นสำรวจปัญหา

ให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act5a.ggb ซึ่งจะปรากฏดังรูป สำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



1. สิ่งที่กำหนดให้ คือ \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง
2. สิ่งที่ต้องการสร้าง คือ สร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้
3. แนวคิดในการสร้าง
 1. สร้างเส้นตรง l ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{AB}
 2. สร้างเส้นตรง m ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}
 3. ให้เส้นตรง l และ m ตัดกันที่จุด O
จะได้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
4. ให้นักเรียนปรับความยาวของรัศมีวงกลม เลื่อนจุด A , B และ C แล้วสำรวจว่าการสร้างของนักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลางของวงกลมได้หรือไม่

ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

จากผลที่ได้ในขั้นสำรวจปัญหา ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับ การสร้าง
เพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

ข้อความคาดการณ์

กำหนดให้ \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง จะสามารถสร้างเพื่อหา
จุดศูนย์กลางของวงกลมได้ดังนี้

1. สร้างเส้นตรง l ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{AB}
2. สร้างเส้นตรง m ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}
3. ให้เส้นตรง l และ m ตัดกันที่จุด O
จะได้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาผลจากการสำรวจแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของ
นักเรียนเป็นจริง

ตอบ ลาก \overline{OA} , \overline{OB} และ \overline{OC}

2. $\triangle ADO$ และ $\triangle BDO$ มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ $\triangle ADO \cong \triangle BDO$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.

3. \overline{OA} และ \overline{OB} มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ $OA = OB$ เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
จะยาวเท่ากัน

4. $\triangle BEO$ และ $\triangle CEO$ มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ $\triangle BEO \cong \triangle CEO$ ด้วยความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.

5. \overline{OB} และ \overline{OC} มีความสัมพันธ์อย่างไร

ตอบ $OB = OC$ เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
จะยาวเท่ากัน

6. จากข้อ 3 และข้อ 5 สามารถสรุปได้ว่าอย่างไร

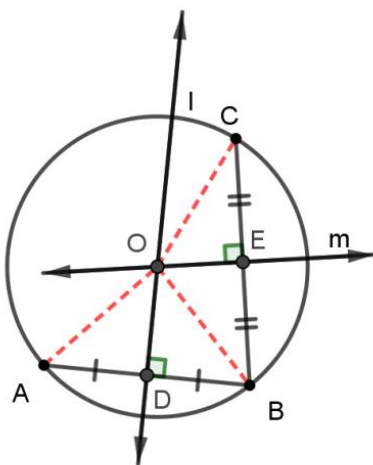
ตอบ $OA = OB = OC$

7. จากข้อ 6 เพราะเหตุใดจุด O ที่ได้เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ตอบ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ห่างจากจุดบนวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

ขั้นการพิสูจน์

ให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ดังนี้
รูปภาพประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้ \overline{AB} และ \overline{BC} เป็นคอร์ดของวงกลมวงหนึ่ง

สร้างเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

1. สร้างเส้นตรง l ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{AB}
2. สร้างเส้นตรง m ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง \overline{BC}
3. ให้เส้นตรง l และ m ตัดกันที่จุด O

จะได้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก \overline{OA} , \overline{OB} และ \overline{OC}

พิสูจน์

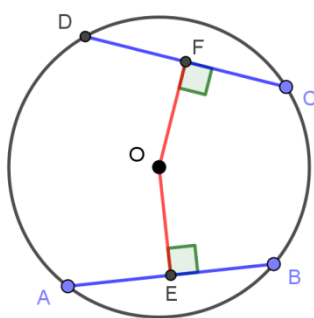
ข้อความ	เหตุผล
1. $AD = BD$	1. จากการสร้าง
2. $ADO = BDO$	2. จากการสร้าง
3. $DO = DO$	3. เป็นด้านร่วม
4. $\triangle ADO \cong \triangle BDO$	4. ด.ม.ด.
5. $OA = OB$	5. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน
6. $BE = CE$	6. จากการสร้าง
7. $BEO = CEO$	7. จากการสร้าง
8. $EO = EO$	8. เป็นด้านร่วม
9. $\triangle BEO \cong \triangle CEO$	9. ด.ม.ด.
10. $OB = OC$	10. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน
11. $OA = OB = OC$	11. จากข้อ 5 และ 10 โดยสมบัติการเท่ากัน
12. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม	12. จากข้อ 11 จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ห่างจากจุดบนวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

ดังนั้น จากการสร้างข้างต้น จะได้ว่า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

2. ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไป นี้ เพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากัน

ขั้นสำรวจปัญหา

ให้นักเรียนเปิดแฟ้ม Act5b.ggb ซึ่งจะปรากฏดังรูป สำรวจองค์ประกอบต่าง ๆ ในชิ้นงาน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



- สิ่งที่กำหนดให้ คือ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{CD} เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E และ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ที่จุด F
- สิ่งที่ต้องการทราบ คือ ระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม
- ให้นักเรียนปรับความยาวของรัศมีวงกลม เลื่อนจุดต่าง ๆ ในแฟ้มงาน แล้วบันทึกผลในตารางต่อไปนี้

ครั้งที่	ระยะห่างระหว่างคอร์ดและวงกลม เมื่อคอร์ดทั้งสองยาวเท่ากัน	
	\overline{OE}	\overline{OF}
1	1	1
2	2	2
3	4	4

ขั้นการเขียนข้อความคาดการณ์

จากตารางในข้อที่ 3 ของขั้นสำรวจปัญหา ให้นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อกำหนดให้คอร์ดมีความยาวเท่ากัน

ข้อความคาดการณ์

ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

ขั้นสำรวจข้อความคาดการณ์

ให้นักเรียนพิจารณาผลจากการสำรวจแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. นักเรียนคิดว่าควรสร้างสิ่งใดเพิ่มเติม เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์ของนักเรียนเป็นจริง

ตอบ ลาก \overline{OB} และ \overline{OC}

2. \overline{AE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{BE} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ $AE = BE$ เพราะ ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด

3. \overline{BE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{AB} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ $BE = \frac{AB}{2}$ เพราะ จากข้อ 2

4. \overline{CF} มีความสัมพันธ์กับ \overline{CD} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ $CF = \frac{CD}{2}$ เพราะ เหตุผลในการทำงานเดียวกันกับข้อ 2 – 3

5. \overline{AB} มีความสัมพันธ์กับ \overline{CD} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ $AB = CD$ เพราะ กำหนดให้

6. จากข้อ 3 – 5 สามารถสรุปได้ว่าอย่างไร

ตอบ $BE = CF$

7. $\triangle OEB$ มีความสัมพันธ์กับ $\triangle OFC$ อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ $\triangle OEB = \triangle OFC$ เพราะ กำหนดให้

8. \overline{OB} มีความสัมพันธ์กับ \overline{OC} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ $OB = OC$ เพราะ รัศมีของวงกลมวงเดียวกัน จะยาวเท่ากัน

9. $\triangle OEB$ มีความสัมพันธ์กับ $\triangle OFC$ อย่างไร เพราะเหตุใด

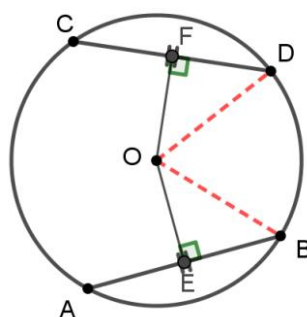
ตอบ $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ เพราะ อ.ด.ด.

10. \overline{OE} มีความสัมพันธ์กับ \overline{OF} อย่างไร เพราะเหตุใด

ตอบ $OE = OF$ เพราะ ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน

ขั้นการพิสูจน์

ให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ข้างต้น ดังนี้
รูปภาพประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{CD}
เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E และ
 $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ที่จุด F

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$OE = OF$

สร้างเพื่อพิสูจน์

ลาก \overline{OB} และ \overline{OC}

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AE = BE$	1. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
2. $DF = CF$	2. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
3. $BE = \frac{AB}{2}$	3. จากข้อ 1
4. $CF = \frac{CD}{2}$	4. จากข้อ 2
5. $AB = CD$	5. โจทย์กำหนด
6. $BE = CF$	6. จากข้อ 3 – 5
7. $OE = OF$	7. โจทย์กำหนด
8. $OB = OC$	8. รัศมีของวงกลมวงเดียวกัน จะยาวเท่ากัน
9. $\triangle OEB \cong \triangle OFC$	9. ค.ด.ด.
10. $OE = OF$	10. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน

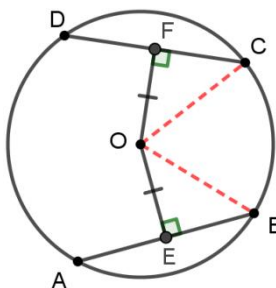
ดังนั้น $OE = OF$ หรือ คอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

3. ให้นักเรียนเขียนบทกลับของทฤษฎีบทที่ได้จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 2 พร้อมพิสูจน์ว่าข้อความนั้นเป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ได้ในข้อที่ 2 ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

บทกลับของทฤษฎีบทที่ได้ในข้อที่ 2 ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

รูปภาพประกอบการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} และ \overline{CD} เป็นคอร์ด
 $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E และ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ที่จุด F
 และ $OE = OF$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$AB = CD$


สร้างเพื่อพิสูจน์

ลาก \overline{OB} และ \overline{OC}

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle OEB = \angle OFC$	1. โจทย์กำหนด
2. $OE = OF$	2. โจทย์กำหนด
3. $OB = OC$	3. รัศมีของวงกลมวงเดียวกัน จะยาวเท่ากัน
4. $\triangle OEB \cong \triangle OFC$	4. จ.ค.ด.
5. $BE = CF$	5. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน
6. $2(BE) = 2(CF)$	6. จากข้อ 5 โดยสมบัติการเท่ากัน
7. $AE = BE$	7. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
8. $DF = CF$	8. ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด
9. $AB = CD$	9. จากข้อ 6 – 9

ดังนั้น $AB = CD$ หรือ คอร์ดทั้งสองนั้นมีความยาวเท่ากัน



ภาคผนวก ง
แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์
เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

**แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์
เรื่องวงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 3 ตอน ใช้เวลาในการทำ 90 นาที

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำ จำนวน 7 ข้อ

ตอนที่ 3 ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ

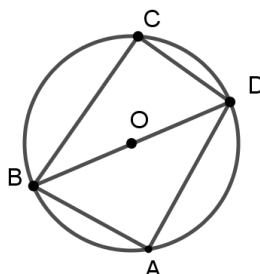
คำสั่ง ในการทำแบบทดสอบให้นักเรียนดำเนินการ ดังนี้

1. ให้นักเรียนเขียนชื่อ – สกุล ชั้น และเลขที่ ลงใน แบบทดสอบและกระดาษคำตอบ ให้ชัดเจน
2. สำหรับข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว แล้วทำเครื่องหมาย (X) ลงในช่องสี่เหลี่ยมของกระดาษคำตอบ ให้ตรงกับตัวอักษรข้อที่เป็นคำตอบที่เลือก
3. สำหรับข้อสอบแบบเติมคำ ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่าง ของกระดาษคำตอบ ที่กำหนดให้ถูกต้อง
4. สำหรับข้อสอบแบบอัตนัย ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียดใน กระดาษคำตอบ ให้ถูกต้อง
5. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบให้ครบทุกข้อ

ชื่อ – สกุล ชั้น เลขที่

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 16 ข้อ (ข้อละ 1 คะแนน)

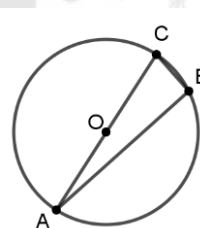
1. จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{BD} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม มีมุมที่สามารถสรุปได้แน่นอนว่ามีขนาดเท่ากับ 90 องศา จำนวนกี่มุม



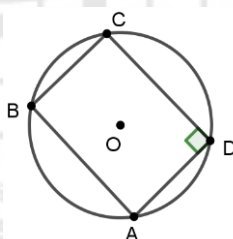
- ก. ไม่มีมุมใดที่มีขนาดเท่ากับ 90 องศา ข. 1 มุม
ค. 2 มุม ง. 4 มุม

2. ในแต่ละรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มีกี่รูปที่สามารถสรุปได้แน่นอนว่า ABC มีขนาดเท่ากับ 90 องศา

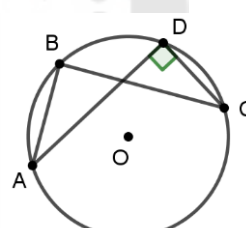
1)



2)

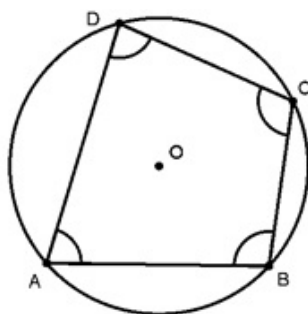


3)



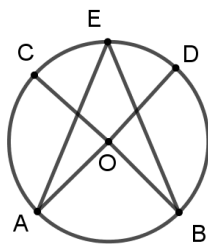
- ก. ไม่มีรูปใดที่ $ABC = 90^\circ$ ข. 1 รูป
ค. 2 รูป ง. 3 รูป

3. จากรูป ตัวเลือกใดถูกต้อง



- ก. $ADC = 90^\circ$ ข. $ABC + ADC = 180^\circ$
ค. $ABC + BCD = 180^\circ$ ง. $ABC = ADC$

4. จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$



พิจารณาข้อความต่อไปนี้

1) $\angle AOB = \angle COD$

2) $\angle AOB = 2(\angle AEB)$

ตัวเลือกใดกล่าวถูกต้อง

ก. ข้อ 1) และข้อ 2) ถูก

ข. ข้อ 1) ถูก แต่ข้อ 2) ผิด

ค. ข้อ 1) ผิด แต่ข้อ 2) ถูก

ง. ข้อ 1) และข้อ 2) ผิด

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

1) รัศมีของวงกลมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายจุดหนึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุดปลายอีกจุดหนึ่งอยู่บนเส้นรอบวง

2) เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม เป็นคอร์ดที่ยาวที่สุด

ตัวเลือกใดกล่าวถูกต้อง

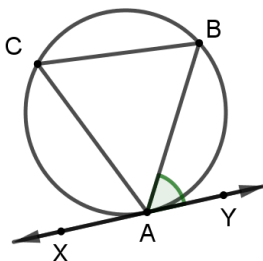
ก. ข้อ 1) และข้อ 2) ถูก

ข. ข้อ 1) ถูก แต่ข้อ 2) ผิด

ค. ข้อ 1) ผิด แต่ข้อ 2) ถูก

ง. ข้อ 1) และข้อ 2) ผิด

6. จากรูป กำหนดให้ \overline{XY} สัมผัสวงกลมที่จุด A อยากทราบว่า $\angle BAY$ มีขนาดเท่ากับมุมใด



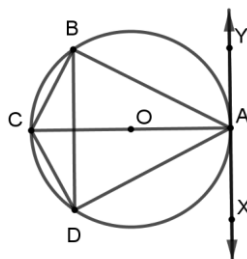
ก. $\angle BAC$

ข. $\angle ABC$

ค. $\angle ACB$

ง. $\angle CAX$

7. จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง \overline{AC} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ \overline{XY} สัมผัสกับวงกลมที่จุด A



ตัวเลือกใดสรุปได้ถูกต้อง

ก. $BAC = DAC$

ข. $ACB = ACD$

ค. $BAY = DAX$

ง. $BAY = BDA$

**กระดาษคำตอบ แบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์
และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่องวงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**

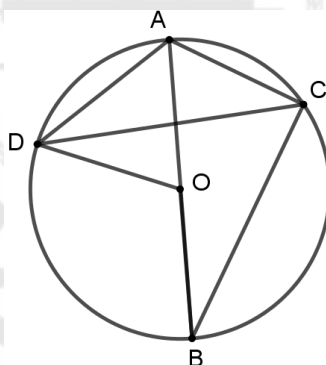
ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 7 ข้อ (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อ	1	2	3	4	5	6	7
ก							
ข							
ค							
ง							

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ จำนวน 7 ข้อ (ข้อละ 1 คะแนน)

จากรูป ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม จงใช้รูปต่อไปนี้ ตอบคำถามข้อที่ 8 – 9



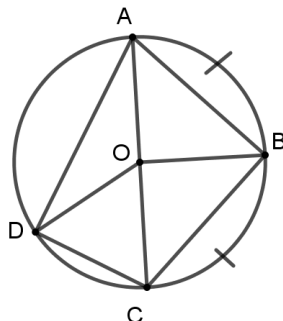
8. จงระบุมุมในครึ่งวงกลม จำนวน 1 มุม

ตอบ

9. จงระบุมุมที่จุดศูนย์กลาง จำนวน 2 มุม

ตอบ

จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC})$ จงใช้รูปต่อไปนี้อย่างเหมาะสมเพื่อตอบคำถามข้อที่ 10 – 13



10. มุมที่มีขนาดเท่ากับ $\angle AOB$ คือมุมใด เพราะเหตุใด

ตอบ

11. คอร์ดที่มีความยาวเท่ากับ \overline{AB} คือส่วนของเส้นตรงใด เพราะเหตุใด

ตอบ

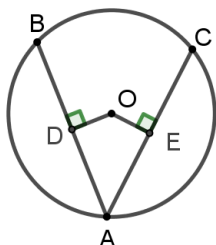
12. $\angle BAD + \angle BCD$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา เพราะเหตุใด

ตอบ

13. มุมที่มีขนาดเป็นสองเท่าของ $\angle BAD$ คือมุมใด เพราะเหตุใด

ตอบ

14. จากรูป ถ้า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{OD} และ \overline{OE} ตั้งฉากกับคอร์ด \overline{AB} และ \overline{AC} ที่จุด D และ E ตามลำดับ และ $AB = AC$ แล้ว $OD = OE$ หรือไม่ เพราะเหตุใด



ตอบ

ตอนที่ 3 ข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 7 ข้อ

15. จงวาดรูปวงกลม 1 รูปที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (4 คะแนน)

- 1) O เป็นจุดศูนย์กลาง
- 2) ACB เป็นมุมในครึ่งวงกลม
- 3) COD เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
- 4) CED เป็นมุมที่มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของ COD
- 5) \overline{XY} เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด E

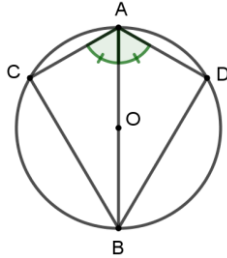
วิธีทำ

16. จงวาดรูปวงกลม 1 รูปที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (4 คะแนน)

- 1) O เป็นจุดศูนย์กลาง
- 2) ABC เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม
- 3) ลากส่วนของเส้นตรงแสดงแขนของมุมที่มีขนาดเป็นสองเท่าของ ABC
- 4) X เป็นจุดใด ๆ นอกวงกลม ลากเส้นสัมผัสวงกลม ซึ่งผ่านจุด X ไปยังวงกลม

วิธีทำ

17. จากรูป กำหนดให้ \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $\angle BAC = \angle BAD$ จงพิสูจน์ว่า $\angle ABC = \angle ABD$ (8 คะแนน)



สิ่งที่กำหนดให้

.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

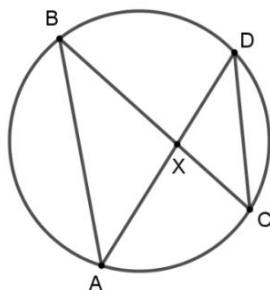
.....

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

18. จากรูป กำหนดให้ \widehat{ABC} และ \widehat{ADC} เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย AC ให้ \overline{AD} และ \overline{BC} ตัดกันที่จุด X จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABX \sim \triangle CDX$ (8 คะแนน)



สิ่งที่กำหนดให้

.....

.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

.....

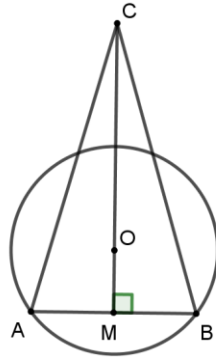
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

.....

19. จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{AB} เป็นคอร์ด และ \overline{CO} ตั้งฉากกับ \overline{AB} ที่จุด M จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (8 คะแนน)



สิ่งที่กำหนดให้

.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

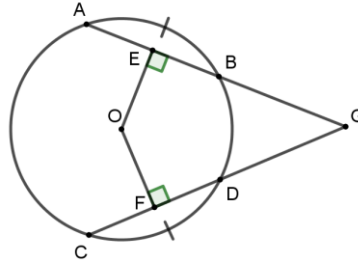
.....

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

20. จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ \overline{OE} และ \overline{OF} ตั้งฉากกับ \overline{AB} และ \overline{CD} ที่จุด E และ F ตามลำดับ ต่อกับ \overline{AB} และ \overline{CD} ตัดกันที่จุด G จงพิสูจน์ว่า $EG = FG$ (8 คะแนน)



สิ่งที่กำหนดให้

.....

.....

.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

.....

สร้างเพื่อพิสูจน์

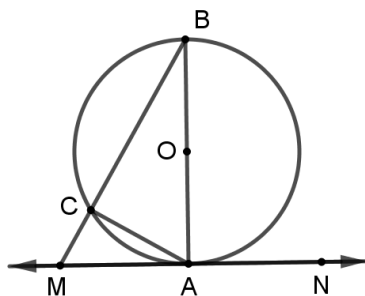
.....

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

21. จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{MN} สัมผัสกับวงกลมที่จุด A โดยที่ \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ \overline{BM} ตัดวงกลมที่จุด C จงพิสูจน์ว่า $\angle BAC = \angle BMA$ (8 คะแนน)



สิ่งที่กำหนดให้

.....

.....

.....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

พิสูจน์

.....

ข้อความ	เหตุผล

ดังนั้น

.....



รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้และเพิ่มคำสั่งในโปรแกรม GeoGebra ตามวิธีการสร้างข้อความคาดการณ์ และพิสูจน์ และแบบทดสอบวัดความรู้เชิงมโนทัศน์และความสามารถในการพิสูจน์ เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีดังนี้

1. อาจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสานและ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. อาจารย์ เอนก จันทจรูญ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. อาจารย์ สิทธิกร เรืองศรี
โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม)

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายวีรศ กิตติวรากุล
วัน เดือน ปี เกิด	22 กรกฎาคม 2536
สถานที่เกิด	จังหวัดชุมพร
วุฒิการศึกษา	พ.ศ. 2555 มัธยมศึกษาตอนปลาย จาก โรงเรียนศรีวิทยาภัย จังหวัดชุมพร พ.ศ. 2560 ปริญญาการศึกษาบัณฑิต (กศ.บ.) เกียรตินิยมอันดับ 1 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พ.ศ. 2562 ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ที่อยู่ปัจจุบัน	165/6 หมู่ 5 ตำบลศรีสุนทร อำเภอถลาง จังหวัดภูเก็ต 83110