



การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี

APOS ของนักศึกษาครู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

A STUDY OF PRESERVICE TEACHERS' MATHEMATICAL UNDERSTANDING LEVELS

ON SET OPERATIONS BASE ON THE APOS THEORY FRAMEWORK IN THE

SOUTHERN REGION OF LAO PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC

MANIVANH MINGKEO

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2567

การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี
APOS ของนักศึกษาครู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ปีการศึกษา 2567
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

A STUDY OF PRESERVICE TEACHERS' MATHEMATICAL UNDERSTANDING LEVELS
ON SET OPERATIONS BASE ON THE APOS THEORY FRAMEWORK IN THE
SOUTHERN REGION OF LAO PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC



MANIVANH MINGKEO

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of MASTER OF EDUCATION
(Mathematics)

Faculty of Science, Srinakharinwirot University

2024

Copyright of Srinakharinwirot University

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี

APOS ของนักศึกษาครู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

ของ

MANIVANH MINGKEO

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

คณะกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์

ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย)

ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์ศรีมี เพ็ญฟู)

ที่ปรึกษาร่วม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสถาและ)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศุทธวรรณศรี
ภิรมย์ สิรินิลกุล)

ชื่อเรื่อง	การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาครู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว
ผู้วิจัย	MANIVANH MINGKEO
ปริญญา	การศึกษามหาบัณฑิต
ปีการศึกษา	2567
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ขวัญ เพียชัย
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุกัญญา หะยีสและ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท ของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตย ประชาชนลาว กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย คือ นักศึกษาครูสาขาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 3 ที่ศึกษาในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย (ฉบับปรับปรุง 2019) ประจำภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567 ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว จำนวนทั้งหมด 16 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ งานปฏิบัติ (Task) เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต จำนวน 7 ข้อ มีค่าความสอดคล้องเชิงเนื้อหา (IOC) 1.00 โดยงานปฏิบัติแบ่งคำถามออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่ คำถามประเภทที่ 1 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต คำถามประเภทที่ 2 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด คำถามประเภทที่ 3 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซต และคำถามประเภทที่ 4 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้ การวิจัยนี้ใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหา และใช้สถิติร้อยละ ผลการวิจัย พบว่า 1) ในคำถามประเภทที่ 1 มีนักศึกษาครูจำนวน 16 คน (คิดเป็น 100%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน (A1) มีนักศึกษาครูจำนวน 13 คน (คิดเป็น 81.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชัน (A2) มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากผลต่างระหว่างเซต (A3) มีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการคอมพลีเมนต์ (A4) มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) มีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบการอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่างระหว่างเซต (A6) และมีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7) 2) ในคำถามประเภทที่ 2 มีนักศึกษาครูจำนวน 8 คน (คิดเป็น 50%) ที่แสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) และมีนักศึกษาครูจำนวน 3 คน (คิดเป็น 18.75%) ที่แสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1) 3) ในคำถามประเภทที่ 3 มีนักศึกษาครูจำนวน 4 คน (คิดเป็น 25%) ที่แสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2) และมีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) และไม่มีนักศึกษาครูคนใดเลยแสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2) 4) ในคำถามประเภทที่ 4 มีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2)

คำสำคัญ : ทฤษฎี APOS, การดำเนินการระหว่างเซต, ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์, นักศึกษาครู

Title	A STUDY OF PRESERVICE TEACHERS' MATHEMATICAL UNDERSTANDING LEVELS ON SET OPERATIONS BASE ON THE APOS THEORY FRAMEWORK IN THE SOUTHERN REGION OF LAO PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC
Author	MANIVANH MINGKEO
Degree	MASTER OF EDUCATION
Academic Year	2024
Thesis Advisor	Assistant Professor Doctorate degree Khawn Piasai
Co Advisor	Assistant Professor Doctorate degree Sukanya Hajisalah

This research aims to study the level of mathematical understanding regarding set operations, based on the APOS theory framework, across different question types among preservice teachers in the southern Lao People's Democratic Republic. The target group consists of 16 third-year mathematics preservice teachers enrolled in the Bachelor of Secondary Education program (revised 2019) during the first semester of the academic year 2024 in southern Lao PDR. The research instrument was a set operations task comprising 7 items, with a content validity index (IOC) of 1.00. The tasks were divided into four question types: 1) Type 1 questions involved finding sets based on the definition of set operations 2) Type 2 questions involved finding sets based on given conditions 3) Type 3 questions involved demonstrating set equality and 4) Type 4 questions involved solving set operation problems in given scenarios. The research employed content analysis and percentage statistics. The findings are as follows: 1) For Type 1 questions, 16 preservice teachers (100%) could find the set resulting from union (A1); 13 (81.25%) from intersection (A2); 12 (75%) from set difference (A3); 7 (43.75%) from complement (A4); 12 (75%) from union combined with intersection (A5); 7 (43.75%) from intersection combined with set difference (A6); and 1 (6.25%) from the combination of all four set operations (A7). 2) For Type 2 questions, 8 preservice teachers (50%) could find sets based on given conditions (P1), and 3 (18.75%) could find sets by linking properties related to set operations (O1). 3) For Type 3 questions, 4 preservice teachers (25%) demonstrated set operation properties through examples consistent with those properties (P2); 1 (6.25%) proved properties related to set operations (S1); and none demonstrated properties through examples reflecting general cases (O2). 4) For Type 4 questions, 1 preservice teacher (6.25%) applied set operation properties to solve problems in given scenarios (S2).

Keyword : APOS Theory, Operations Set, level of mathematics understanding, Preservice Teacher

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสถาและ อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ที่ได้กรุณาใช้เวลาให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะอันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการดำเนินงานวิจัย รวมถึงการตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ จนทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ข้าพเจ้ารู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและความเอาใจใส่ของอาจารย์ทั้งสองเป็นอย่างยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์ศรี มีเฟื่องฟู ที่กรุณาให้เกียรติเป็นประธานกรรมการสอบปากเปล่าและผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล ที่ร่วมเป็นกรรมการสอบ ทั้งสองท่านได้กรุณาตรวจสอบและให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงปริญญานิพนธ์ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอนก จันทระจัญญ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณานิน กองทิพย์ อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันทจักรภรณ์ ที่ให้คำแนะนำในทุกด้านอย่างดียิ่ง ตลอดจนคณาจารย์ทุกท่านในภาควิชาคณิตศาสตร์ และเจ้าหน้าที่บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกตลอดระยะเวลาการทำปริญญานิพนธ์

ขอกราบขอบพระคุณ กระทรวงการต่างประเทศ โดยเฉพาะกรมความร่วมมือระหว่างประเทศ (Thailand International Cooperation Agency – TICA) ที่ให้ทุนสนับสนุนการศึกษาและวิจัย รวมถึงค่าใช้จ่ายตลอดระยะเวลาศึกษาในระดับปริญญาโท เป็นเวลา 2 ปี 6 เดือน ขอกราบขอบพระคุณ ผู้อำนวยการวิทยาลัยครูทั้งสามแห่งและนักศึกษาครูที่ให้ความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลอย่างดียิ่ง

ท้ายที่สุดนี้ ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ พ่อ แม่ ครอบครัว ที่เป็นแรงสนับสนุนในทุกด้าน และขอขอบคุณทั้งสองคนที่คอยเป็นกำลังใจที่มั่นคงเสมอมา และขอขอบคุณ ดร.นันทชัย นวลสะอาด ที่คอยให้ความช่วยเหลือเสมอมา รวมถึง เพื่อน ๆ น้อง ๆ ทุกคน ที่ให้คำปรึกษา และอยู่เคียงข้างกันมาตลอด จนกระทั่งปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

MANIVANH MINGKEO

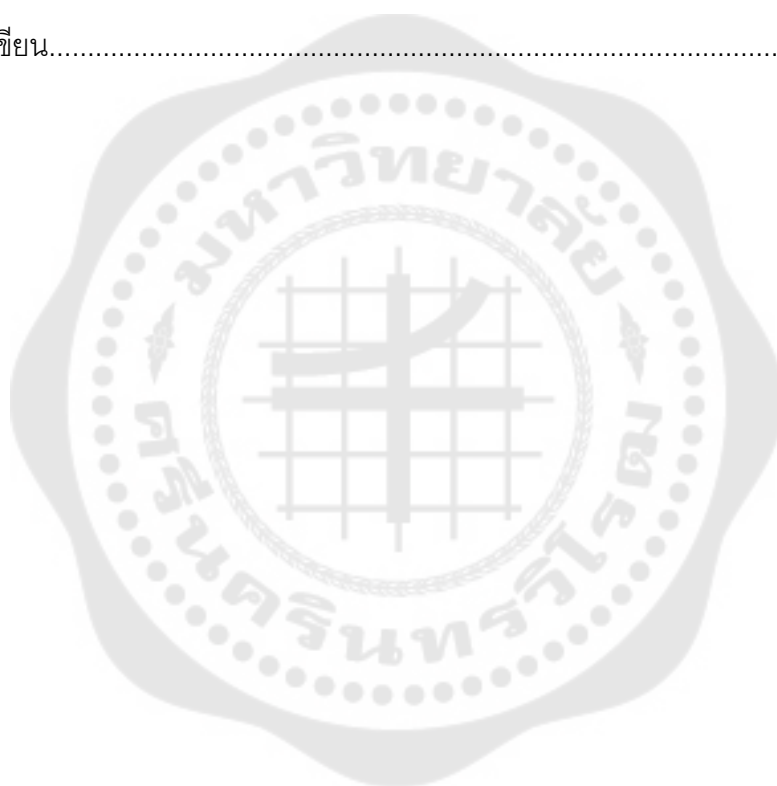
สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญรูปภาพ	ฎ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
ความสำคัญของการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย	4
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
1. เอกสารที่เกี่ยวกับหลักสูตรสร้างक्रमัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ใน สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว.....	8
1.1 เอกสารที่เกี่ยวกับหลักสูตรสร้างक्रमัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) สาขาวิชาครุคณิตศาสตร์.....	8
1.2 เอกสารเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรื่องเซต(การดำเนินการระหว่างเซต)	10
2. แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS.....	15
2.1 แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์.....	15
2.2 ทฤษฎี APOS (APOS Theory)	16
2.3 คำอธิบายโครงสร้างและกลไกเกี่ยวกับทฤษฎี APOS	17

2.4 แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS	29
2.5 ลักษณะความเข้าใจของผู้เรียนที่แสดงออกตามกรอบทฤษฎี APOS	30
2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ ทฤษฎี APOS.....	41
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	47
กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย	47
กรอบแนวคิดของการวิจัย	47
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	48
การเก็บรวบรวมข้อมูล	50
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	51
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	51
บทที่ 4 ผลการศึกษา	52
ตอนที่ 1 จำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการ ระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท.....	53
ตอนที่ 2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของ นักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท	55
2.1 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของ นักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 1	58
2.2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของ นักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 2	66
2.3 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของ นักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 3	70
2.4 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของ นักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 4	74
บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	77

ความมุ่งหมายและวิธีการดำเนินการวิจัย.....	77
สรุปผลการวิจัย.....	79
อภิปรายผลการวิจัย	80
ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป.....	82
บรรณานุกรม	83
ภาคผนวก.....	88
ประวัติผู้เขียน.....	118



สารบัญตาราง

	หน้า
ตาราง 1 ระบบการให้คะแนนแบบมีค่าระดับขั้น	10
ตาราง 2 แผนการสอนรายวิชา ปีการศึกษา 2566 - 2567 (Course Syllabus)	11
ตาราง 3 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องลอการิทึม	30
ตาราง 4 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการคิดเชิงพีชคณิต	31
ตาราง 5 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องความหมายของอนุพันธ์	33
ตาราง 6 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องแกนสมมาตร	34
ตาราง 7 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องความน่าจะเป็น	36
ตาราง 8 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องเซตโดยใช้ภาษาไพธอน	37
ตาราง 9 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการวัดการกระจาย	38
ตาราง 10 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต	39
ตาราง 11 คำถามในงานปฏิบัติที่ใช้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการ ระหว่างเซต	49
ตาราง 12 จำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการ ระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท	53
ตาราง 13 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครูแต่ละ คน ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท	56

สารบัญรูปภาพ

หน้า

ภาพประกอบ 1 โครงสร้างทางความคิด และกลไกในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์	18
ภาพประกอบ 2 กระบวนการสร้างความเข้าใจ 3 กระบวนการ	20
ภาพประกอบ 3 โครงสร้างทางปัญญาและการสร้างความหมาย	23
ภาพประกอบ 4 การสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์	26
ภาพประกอบ 5 ร้อยละของจำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS	54
ภาพประกอบ 6 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของนะโม	59
ภาพประกอบ 7 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของเท็น	59
ภาพประกอบ 8 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของกันต์	60
ภาพประกอบ 9 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของคิม	61
ภาพประกอบ 10 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของมาวิน	62
ภาพประกอบ 11 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของตั้ม	63
ภาพประกอบ 12 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของแซมปี	64
ภาพประกอบ 13 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของปรีนซ์	64
ภาพประกอบ 14 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของเดวา	65
ภาพประกอบ 15 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของข้าวหอม	66
ภาพประกอบ 16 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 2 ของมาวิน	67
ภาพประกอบ 17 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 2 ของคิม	68
ภาพประกอบ 18 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 2 ของตั้ม	69
ภาพประกอบ 19 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 3 ของคิม	70
ภาพประกอบ 20 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 4 ของคิม	71

ภาพประกอบ 21 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 5 ของคิม	72
ภาพประกอบ 22 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 5 ของเจได	73
ภาพประกอบ 23 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 5 ของตั้ม	74
ภาพประกอบ 24 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 4 คำถามข้อที่ 6 ของเจได	76



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

การพัฒนาประเทศไม่ว่าจะเป็นการพัฒนาทางด้านเศรษฐกิจ การเมือง หรือสังคมจะดำเนินไปได้จำเป็นต้องมีการพัฒนาทางการศึกษาควบคู่ไปด้วย ทั้งนี้เพราะการศึกษาเป็นปัจจัยหนึ่งที่สำคัญในการพัฒนาด้านต่าง ๆ ที่ช่วยเตรียมกำลังคนเพื่อนำพาประเทศไปสู่เป้าหมายตามที่กำหนดไว้ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งในการที่จะต้องทุ่มเทการพัฒนาทางการศึกษา เพราะเมื่อคนมีการศึกษาจะทำให้พลเมืองในประเทศเป็นพลเมืองที่มีคุณภาพและสมรรถภาพสามารถเข้าใจวิทยาการใหม่ ๆ ทำให้การดำเนินงานในด้านต่าง ๆ เป็นไปได้ด้วยดี รู้จักปรับตัวเข้ากับระบบการเมืองและสังคม ส่งผลต่อการพัฒนาทางด้านเศรษฐกิจ การเมือง และสังคม (สุขคะเสริม สิทธิเดช และ ธรสน ทราวุธ, 2555) สำหรับรัฐบาลแห่งสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาวเป็นรัฐบาลหนึ่งที่เห็นถึงความสำคัญของการศึกษา จึงได้กำหนดให้มีการเร่งดำเนินการปฏิรูประบบการศึกษาแห่งชาติให้มีคุณภาพและมีมาตรฐานสากลโดยมุ่งเน้นสร้างมนุษย์ให้เป็นพลเมืองดีมีการศึกษา มีความรู้ความสามารถ มีวิชาชีพ มีงานทำ มีความสามารถในการประดิษฐ์คิดค้น เป็นคนที่มีศีลธรรม และมีความกระตือรือร้นต่อการพัฒนาประเทศชาติให้มีความเจริญรุ่งเรืองก้าวหน้า (สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว, 2551) นอกจากนี้กระทรวงศึกษาธิการและกีฬาได้กำหนดมาตรฐานของนักเรียน โดยนักเรียนต้องมีความสามารถในการแก้ปัญหา คิดวิเคราะห์ คิดสังเคราะห์ คิดวิจารณ์ญาณ คิดไตร่ตรอง และคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และครูต้องมีการเปลี่ยนบทบาทจากครูผู้สอนต้องปรับเปลี่ยนมาเป็นผู้จัดประสบการณ์ในการเรียนรู้ที่หลากหลายและเหมาะสมให้กับนักเรียน (สถาบันค้นคว้าวิทยาศาสตร์การศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ และการกีฬา, 2553)

คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยแห่งการคิดและเป็นเครื่องมือสำคัญต่อการพัฒนาศักยภาพของสมองด้านการคิด ทักษะ กระบวนการเรียนรู้ และการใช้เหตุผลที่เป็นระบบ อีกทั้งยังเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้วิทยาการหลายสาขา รวมทั้งสามารถนำไปบูรณาการได้กับทุกวิชา คณิตศาสตร์จึงมีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความสามารถของมนุษย์ ช่วยเสริมสร้างความคิดสร้างสรรค์คิดอย่างมีเหตุผลเป็นระบบแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ตัดสินใจแก้ปัญหาและนำไปใช้ในชีวิตรประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552) นอกจากนี้ ยังใช้คณิตศาสตร์พิสูจน์อย่างมีเหตุผลว่าสิ่งที่คิดนั้น เป็นความจริงหรือไม่ ด้วยวิธีคิดเราก็สามารถนำ

คณิตศาสตร์ไปแก้ไขปัญหาทางวิทยาศาสตร์ได้ คณิตศาสตร์ยังช่วยให้เราเป็นคนใฝ่รู้ ตลอดจนพยายามคิดหาสิ่งแปลกใหม่ คณิตศาสตร์จึงเป็นรากฐานแห่งความเจริญของเทคโนโลยีด้านต่างๆ (สมวงศ์ แปลงประสพโชค, 2549)

ปัจจุบันเป้าหมายหนึ่งของการสอนคณิตศาสตร์ของครูคณิตศาสตร์ คือ การทำให้ผู้เรียนเข้าใจในสิ่งที่ตนเองเรียน ตั้งแต่ช่วงปลายคริสต์ศตวรรษที่ 20 มีกระแสปฏิรูปโรงเรียนและการปฏิรูปการเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ (วินัย คำสุวรรณ, 2558) Hiebert and Carpenter (1992) กล่าวว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Understanding) เกี่ยวข้องกับการสร้างการเชื่อมโยงระหว่าง ความคิด ความจริง และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการนำความรู้เดิมที่มีอยู่นั้น มาสัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาใหม่หรือโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทำให้สามารถแปลความ บรรยายเรื่องเดิมโดยใช้ถ้อยคำใหม่หรือภาษาใหม่ ส่วนสุกัญญา ธรรมบุญรักษ์ และคณะ (2558) กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญที่สุดที่ผลักดันให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้อย่างเต็มศักยภาพ นอกจากนี้ National Council of Teachers of Mathematics (2000) ได้เสนอหลักการเรียนรู้นักเรียนต้องเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ นักเรียนที่เรียนโดยการท่องจำสูตร กฎ ทฤษฎี หรือกระบวนการต่าง ๆ โดยปราศจากความเข้าใจนั้นมักไม่สามารถนำความรู้ไปใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ในช่วงหลายปีที่ผ่านมา นักการศึกษาหลายท่านได้ศึกษาเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ Dubinsky เป็นนักการศึกษาท่านหนึ่งที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ในปี ค.ศ. 1984 เขาได้เสนอทฤษฎี APOS ซึ่งเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยทฤษฎีดังกล่าวนี้ได้พัฒนาจากแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการสะท้อนนามธรรม (Reflection Abstraction) ของ Piaget (Encyclopedia of Mathematics Education, 2014) โดยทฤษฎี APOS ดังกล่าว Dubinsky ได้แบ่งความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็น 4 ระดับได้แก่ 1) ระดับการกระทำ (Action) 2) ระดับกระบวนการ (Process) 3) ระดับวัตถุ (Object) และ 4) ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ทั้งนี้ความเข้าใจจะระดับกระบวนการและระดับวัตถุจะเชื่อมโยงกันเพื่อสร้างเป็นโครงสร้างทางปัญญา สำหรับรายละเอียดเบื้องต้นเกี่ยวกับความเข้าใจแต่ละระดับ Dubinsky ได้อธิบายดังนี้ ระดับการกระทำ เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการตอบสนองต่อสิ่งเร้าภายนอกโดยตัวผู้รับเอง นักเรียนที่มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่จำกัดอยู่ในระดับการกระทำ นักเรียนจะมีความสามารถในการปฏิบัติตามเงื่อนไขหรือขั้นตอนการคิดคำนวณที่กำหนดอย่างเป็นลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่อง ดังนั้นนักเรียนที่มีความเข้าใจในระดับนี้สามารถจัดกระทำกับวัตถุที่

เป็นทั้งเชิงกายภาพหรือเชิงนามธรรมตามรายการขั้นตอนที่กำหนด ระดับกระบวนการ เป็นความเข้าใจที่เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจระดับการกระทำหรือทำการคิดคำนวณหลาย ๆ ครั้ง จนกระทั่งสามารถใช้ความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวข้องมาสร้างความหมายที่ได้จากการคำนวณหรือการจัดกระทำที่เป็นลำดับขั้นตอนในรูปของมโนภาพโดยไม่จำเป็นต้องจัดกระทำหรือคิดคำนวณอย่างเป็นลำดับขั้นตอน นอกจากนี้ นักเรียนยังสามารถอธิบาย สะท้อน หรือคิดย้อนกลับวิธีการจัดกระทำนั้นโดยไม่จำเป็นต้องแสดง การกระทำในแต่ละขั้นตอนออกมา ส่วนระดับวัตถุ เป็นความเข้าใจที่เกิดจากความเข้าใจระดับกระบวนการหลาย ๆ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกันถูกนำมาเชื่อมโยงอย่างเหมาะสมเพื่อใช้เป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างทางปัญญาสามารถนำไปสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นหรือนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้นได้ (Karama, 2021; Reed, 2007; พัชรี เรืองสวัสดิ์, 2562; ศราวุฒิ จำวัน, 2559)

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่สำคัญมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งครูผู้สอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากครูเป็นตัวขับเคลื่อนระบบการจัดการเรียนการสอนที่ส่งผลโดยตรงกับคุณภาพของการศึกษาในสถานศึกษา รวมทั้งครูยังต้องปลูกฝังความรู้ ความคิดในเชิงวิชาการที่ถูกต้องให้แก่เยาวชนในชาติ (กระทรวงศึกษาธิการและกีฬา, 2562) นอกจากนี้ครูจะต้องเป็นต้นแบบที่ดี สร้างคนในสังคมให้เป็นคนที่มีคุณภาพ ดังนั้นสถาบันที่ผลิตครูจะต้องตระหนักถึงคุณภาพในการผลิตครูเพื่อออกมารับใช้สังคม เพื่อให้ครูที่ผลิตออกมานั้นสามารถจัดการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ พร้อมกับมีคุณธรรมและจริยธรรมในวิชาชีพ ซึ่งจะส่งผลดีต่อตัวนักเรียน ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้ความรู้ทางวิชาการได้อย่างถูกต้องและมีความสุข

มหาวิทยาลัยจำปาสัก วิทยาลัยครูปากเซ และวิทยาลัยครูสาละวัน เป็นสถาบันการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการผลิตครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาวมาอย่างยาวนาน ซึ่งทั้งสามสถาบันใช้หลักสูตรในการผลิตครู คือ หลักสูตรครูมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ของกรมสร้างครู กระทรวงศึกษาธิการและกีฬา โดยเป้าหมายที่สำคัญของหลักสูตรดังกล่าวคือ ต้องการให้นักศึกษาครูมีความพร้อมและมีความรู้ความสามารถทางด้านวิชาชีพครูก่อนจะไปเป็นครูประจำการ ดังนั้นเพื่อเป็นการตอบสนองต่อเป้าหมายดังกล่าว ประกอบกับผู้วิจัยได้ศึกษาทฤษฎี APOS ซึ่งเป็นทฤษฎีหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และในสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาวเอง มีการศึกษาเกี่ยวกับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎี APOS น้อยมาก หรือแทบไม่มีเลย ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS เหตุผล

ที่ผู้วิจัยเลือกเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องเซต เนื่องจากเรื่องเซตเป็นรากฐานและเครื่องมือที่สำคัญในการพัฒนาองค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์สมัยใหม่ ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับสูง ถือว่า “เซต” เป็นมูลฐาน (fundamental) เพราะว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ล้วนมีเซตเข้ามาเกี่ยวข้องเป็นพื้นฐานเกือบทั้งหมด (ธนชัยศ จำปาหวาย, 2559; สถาบันค้นคว้าวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560) ซึ่งผลที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้จะทำให้ทราบระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภทของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาวว่าเป็นอย่างไร นอกจากนี้ผลการวิจัยสามารถ นำไปใช้เป็นข้อมูลวางแผนในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของอาจารย์ผู้สอนในระดับอุดมศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการดำเนินการระหว่างเซตหรือประเด็นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องเซต รวมทั้งเป็นข้อมูลในการนำไปใช้ปรับปรุงหลักสูตรที่เกี่ยวข้องกับการผลิตครูคณิตศาสตร์ต่อไปในอนาคต

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภทของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยในครั้งนี้ทำให้ทราบระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภทของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว และเป็นข้อมูลเพื่อใช้ในการกำหนดแนวทาง และวางแผนในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของอาจารย์ผู้สอนในระดับอุดมศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการดำเนินการระหว่างเซตหรือประเด็นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องเซต รวมทั้งเป็นข้อมูลในการนำไปใช้ปรับปรุงหลักสูตรที่เกี่ยวข้องกับการผลิตครูคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาครูสาขาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 3 จำนวน 16 คนที่ศึกษาในหลักสูตรครุมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ประจำภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567 ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ซึ่งได้แก่มหาวิทยาลัยจำปาสัก วิทยาลัยครูปากเซ และวิทยาลัยครูสาละวัน โดยนักศึกษาครูดังกล่าวได้

ผ่านการเรียนเนื้อหาทฤษฎีเซตซึ่งอยู่ในรายวิชา Discrete Mathematics มาแล้ว สำหรับจำนวน นักศึกษาครูในแต่ละสถาบันซึ่งเป็นกลุ่มเป้าหมายมีรายละเอียดดังนี้

มหาวิทยาลัยจำปาสัก	นักศึกษาครูจำนวน	7	คน
วิทยาลัยครูปากเซ	นักศึกษาครูจำนวน	3	คน
วิทยาลัยครูสาละวัน	นักศึกษาครูจำนวน	6	คน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้อยู่ในภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567 ตั้งแต่เดือน ธันวาคม 2567 ถึงเดือนมกราคม 2568

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้เป็นเรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ซึ่งอยู่ในรายวิชา Discrete Mathematics ของหลักสูตรครุมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ของกรมสร้าง ครู กระทรวงศึกษาธิการและกีฬา สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยกำหนดคำถามในงานปฏิบัติเรื่อง การดำเนินการระหว่างเซตเป็น 4 ประเภท เพื่อใช้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซต ดังนี้

คำถามประเภทที่ 1 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามบทนิยามของการดำเนินการ ระหว่างเซต ใช้ศึกษาความเข้าใจระดับการกระทำ (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7)

คำถามประเภทที่ 2 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด ใช้ศึกษาความ เข้าใจระดับกระบวนการ (P1) และความเข้าใจระดับวัตถุ (O1)

คำถามประเภทที่ 3 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซต ใช้ศึกษาความ เข้าใจระดับกระบวนการ (P2) ความเข้าใจระดับวัตถุ (O2) และความเข้าใจระดับโครงสร้างทาง ปัญญา (S1)

คำถามประเภทที่ 4 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาการดำเนินการระหว่างเซตใน สถานการณ์ที่กำหนดให้ ใช้ศึกษาความเข้าใจระดับโครงสร้างทางปัญญา (S2)

นิยามศัพท์เฉพาะ

ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS หมายถึง ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Dubinsky (1991) และ Chiew Leng and Cheng Meng (2023) ซึ่งแบ่งเป็น 4 ระดับ ได้แก่ 1) ระดับการกระทำ 2) ระดับ กระบวนการ 3) ระดับวัตถุ และ 4) ระดับโครงสร้างทางปัญญา โดยแต่ละระดับมีรายละเอียดดังนี้

ระดับการกระทำ (Action) เป็นระดับที่นักศึกษาสามารถหาเขตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเขตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเขต ได้แก่ ยูเนียน (A1) อินเตอร์เซกชัน (A2) ผลต่าง (A3) และคอมพลีเมนต์(A4) รวมทั้งการดำเนินการระหว่างเขตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) การดำเนินการระหว่างเขตแบบอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง (A6) และการดำเนินการระหว่างเขตร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7)

ระดับกระบวนการ (Process) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเขตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเขต ผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2)

ระดับวัตถุ (Object) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเขตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเขต (O1) หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเขตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2)

ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเขต (S1) หรือแสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเขตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2)

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาคูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในประเด็นต่าง ๆ ต่อไปนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวกับหลักสูตรสร้างक्रमมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ใน สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

1.1 เอกสารที่เกี่ยวกับหลักสูตรสร้างक्रमมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) สาขาวิชาครูคณิตศาสตร์

1.2 เอกสารเนื้อหาที่เกี่ยวกับ เรื่อง เซต (การดำเนินการระหว่างเซต)

2. แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

2.2 ทฤษฎี APOS (APOS Theory)

2.3 คำอธิบายโครงสร้างและกลไกเกี่ยวกับทฤษฎี APOS

2.4 แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี APOS

2.5 ลักษณะความเข้าใจของผู้เรียนที่แสดงออกตามกรอบทฤษฎี APOS

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎี APOS

1. เอกสารที่เกี่ยวกับหลักสูตรสร้างครูมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ใน สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

1.1 เอกสารที่เกี่ยวกับหลักสูตรสร้างครูมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) สาขาวิชาครุคณิตศาสตร์

ชื่อของหลักสูตร

ชื่อหลักสูตร (เขียนเป็นภาษาลาว) ບັດສູດສ້າງຄູມັດທະຍົມ ລະດັບປະລິນຍາຕີ

ชื่อหลักสูตร (เขียนเป็นภาษาอังกฤษ) Secondary Teacher education Program, Bachelor Degree

ชื่อหลักสูตร (เขียนเป็นภาษาไทย) หลักสูตรสร้างครูมัธยมระดับปริญญาตรี

ชื่อประกาศนียบัตร

ชื่อ (เขียนเป็นภาษาลาว) ປະກາສະນີຍະບັດປະລິນຍາຕີ ຄູມັດທະຍົມ ສາຂາວິຊາ ຄູຄະນິດສາດ

ชื่อ (เขียนเป็นภาษาอังกฤษ) Bachelor of Secondary Teacher Education, majoring in Mathematics

ชื่อ (เขียนเป็นภาษาไทย) ประกาศนียบัตรปริญญาตรี ครูมัธยม สาขาวิชา ครุคณิตศาสตร์

หน่วยงานรับผิดชอบ

กรมสร้างครู กระทรวงศึกษาธิการและกีฬา

ปรัชญาของหลักสูตร

ครูมีแนวคิดหลักมั่นในชนชั้น มีความเข้าใจต่ออุดมการณ์ และแนวทางนโยบายของ พรรค-รัฐ และปกป้องระบอบประชาธิปไตยประชาชน มีสติ เคารพต่อระเบียบวินัย และกฎหมาย มีความกล้าหาญในการต่อสู้ด้านปรากฏการณ์ย่อท้อต่าง ๆ ครูต้องมีแนวคิดที่ดี และแบบแผนการดำรงชีวิตที่โปร่งใส บุคลิกภาพสง่า มีคุณธรรม มีจริยธรรม มีความรับผิดชอบ และความสามัคคี รักในอาชีพครู รักเด็ก นำใช้ความรู้และทักษะที่ก้าวหน้า อุทิศตัวเองเพื่อการศึกษา และเป็นนักพัฒนาที่ดี

จุดประสงค์ของหลักสูตร

หลักสูตรสร้างคุณวุฒิระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์มีจุดประสงค์เพื่อเน้นการสร้างให้นักศึกษามี

1. ความพร้อมในความเป็นครู มีวิสัยทัศน์ที่กว้างไกล มีจรรยาบรรณทางด้านวิชาชีพครู สอดคล้องกับ 3 ลักษณะ 5 หลักมูลการศึกษา
2. ความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างมีความคิดสร้างสรรค์ มีความรับผิดชอบ พัฒนาความรู้และความสามารถของตนเองในอนาคต
3. ความรู้ความสามารถทางด้านวิชาชีพครู สามารถสอนได้ทุกระดับชั้นมัธยมศึกษา (สอนได้ตั้งแต่ ม.1 – ม.7) และประสานงานช่วยเหลือครูสอนในโรงเรียน พร้อมทั้งเป็นหลักแหล่งทางด้านวิชาการ
4. ความรู้ทางด้าน ICT และสามารถใช้ ICT ในกระบวนการเรียนรู้ สามารถทำงานวิจัย หาวิธีการ และเทคนิคการสอนใหม่ ๆ เพื่อปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีคุณภาพ

โครงสร้างหลักสูตรสร้างคุณวุฒิ สาขาวิชาคณิตศาสตร์

จำนวนหน่วยกิตรวมตลอดหลักสูตร 142 หน่วยกิต ประกอบด้วย

- หมวดวิชาความรู้ทั่วไป 15 หน่วยกิต (10.56%)
- หมวดวิชาพื้นฐานวิชาเฉพาะ 42 หน่วยกิต (29.58%)
- หมวดวิชาเฉพาะ 83 หน่วยกิต (58.45%)
 - วิชาเฉพาะ 47 หน่วยกิต
 - วิชาบังคับ 25 หน่วยกิต
 - วิทยานิพนธ์ 11 หน่วยกิต
- วิชาเอกเลือก 2 หน่วยกิต (1.41%)

หลักเกณฑ์ในการประเมินผลนักศึกษา

- | | |
|-------------------------|------|
| 1. การเข้าชั้นเรียน | 10% |
| 2. การทำกิจกรรมกลุ่ม | 10% |
| 3. การทำกิจกรรมรายบุคคล | 25% |
| 4. สอบกลางภาค | 25% |
| 5. สอบจบหน่วยกิต | 30% |
| รวมทั้งหมด | 100% |

โดยหลักสูตรสร้างคุณสมรรถนะระดับปริญญาตรี กำหนดการให้คะแนนแบบมีค่าระดับชั้น ซึ่งมีรายละเอียดของข้อมูลดังตาราง 1 ต่อไปนี้

ตาราง 1 ระบบการให้คะแนนแบบมีค่าระดับชั้น

ระดับคะแนน		ความหมาย		ค่าระดับ	คะแนน (%)
สัญลักษณ์ ภาษาลาว	สัญลักษณ์ ภาษาอังกฤษ	ภาษาลาว	ภาษาอังกฤษ		
ກ	A	ດີເລີດ	Excellent	4	85-100
ຂ⁺	B ⁺	ດີຫຼາຍ	Very Good	3.5	80-84
ຂ	B	ດີ	Good	3	75-79
ຄ⁺	C ⁺	ບາງ ກາງ	Fairly good	2.5	70-74
ຄ	C	ພໍໃຊ້	Fair	2	65-69
ງ⁺	D ⁺	ອ່ອນ	Poor	1.5	60-64
ງ	D	ອ່ອນ ຫຼາຍ (ບໍ່ຜ່ານ)	Very Poor	1	50-59
ຕ	F	ບໍ່ຜ່ານ	Fail	0	<49

ที่มา:กระทรวงศึกษาธิการและกีฬา (2557). คำสั่งแนะนำเกี่ยวกับหลักการประเมินและการสอบ (ฉบับปรับปรุง).

1.2 เอกสารเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรื่องเซต(การดำเนินการระหว่างเซต)

แผนการสอนรายวิชา ปีการศึกษา 2566 - 2567 (Course Syllabus) ที่มีการเรียนการสอนเกี่ยวกับเรื่องเซต โดยเฉพาะการดำเนินการระหว่างเซต ในวิชา Discrete Mathematics ของหลักสูตรสร้างคุณสมรรถนะระดับปริญญาตรี มีเนื้อหาเกี่ยวข้องในแผนการสอนรายวิชา ปีการศึกษา 2566 - 2567 รายละเอียดดังตาราง 2 ต่อไปนี้

ตาราง 2 แผนการสอนรายวิชา ปีการศึกษา 2566 - 2567 (Course Syllabus)

ชื่อ	หลักสูตรสร้างครูมัธยม ระดับปริญญาตรี	
หลักสูตร	(Secondary Teacher Education Program, bachelor's degree)	
ชื่อวิชา	Discrete Mathematics	
หมวดวิชา	หมวดวิชาเฉพาะ	
ปี	ปีการศึกษาที่ 2	ภาคเรียนที่ 1
การศึกษา		
คำอธิบาย เบื้องต้น เกี่ยวกับ รายวิชานี้	รายวิชานี้จะศึกษาเกี่ยวกับ ความรู้เบื้องต้นในระบบจำนวนพื้นฐานต่าง ๆ (Number Bases/Number System) ตรรกศาสตร์ (Logic) ทฤษฎีเซต (Sets Theory) ทฤษฎีการนับ (Counting Theory) ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) และพีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) เป็นต้น	
เนื้อหา	ทฤษฎีเซต(Sets Theory) 1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเซต - ความหมายของเซต - การนำเสนอเซต (สมาชิก จำนวนสมาชิก สัญลักษณ์) - วิธีการเขียนเซต - การเท่ากันของเซต และเซตที่เทียบเท่ากัน - สับเซต (Subset) และพาวเวอร์เซต (Power set) 2. การดำเนินการระหว่างเซต - ยูเนียน (Union) - อินเตอร์เซกชัน (Intersection) - ผลต่าง (Difference) - คอมพลีเมนต์ (Complement)	

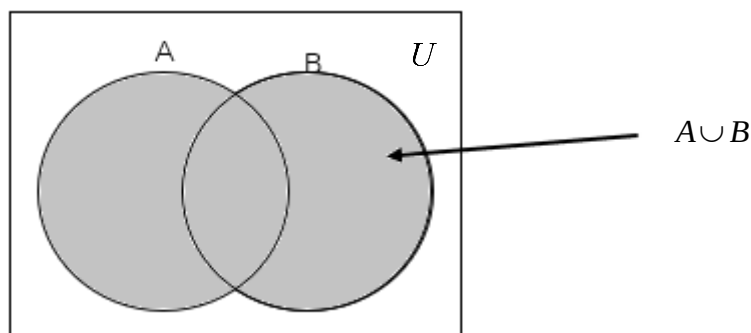
เนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต

การดำเนินการระหว่างเซต (Operations on Set)

การดำเนินการระหว่างเซต คือ การนำเซตต่าง ๆ มากระทำเพื่อให้เกิดเป็นเซตใหม่มี 4 วิธี ได้แก่ ยูเนียน (Union) อินเตอร์เซกชัน (Intersection) ผลต่าง (Difference) และคอมพลีเมนต์ (Complement)

ยูเนียน (Union)

ยูเนียนของเซต A และเซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A หรือ เซต B หรือ ทั้งสองเซต เขียนแทนด้วย $A \cup B$ ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$ จะได้ว่า $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



บทนิยาม 1

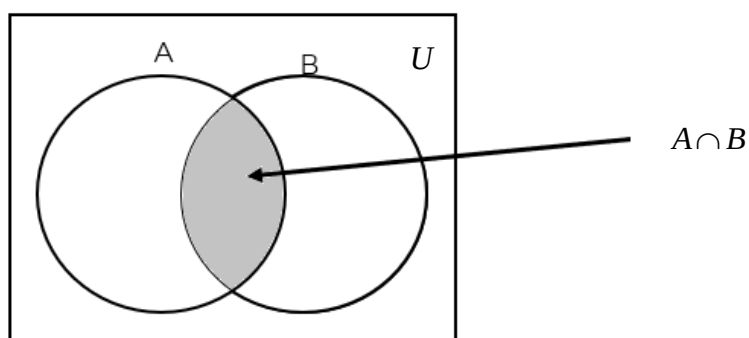
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

สมบัติของยูเนียน

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup U = U \cup A = U$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $A \subseteq (A \cup B)$

อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B คือ เซตที่เป็นประกอบด้วยสมาชิกทั้งของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ จะได้ว่า $A \cap B = \{1, 3\}$



บทนิยาม 2

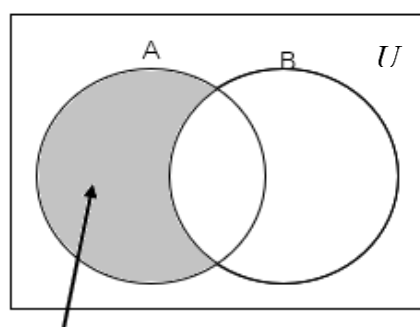
$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

สมบัติของอินเตอร์เซกชัน

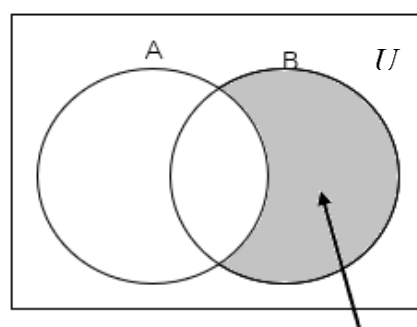
1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap U = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap A = A$
5. $A \cap U = A$
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
8. $(A \cap B) \subseteq A$

ผลต่าง (Difference)

ผลต่างระหว่างเซต A และเซต B คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B เขียนแทนด้วย $A - B$ ตัวอย่างเช่น $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ จะได้ว่า $A - B = \{8, 10\}$



$A - B$



$B - A$

บทนิยาม 3

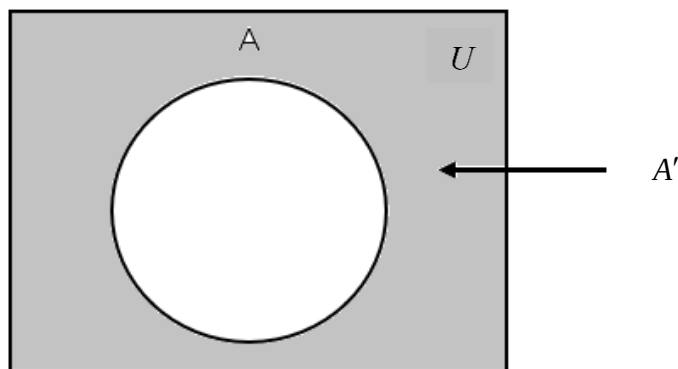
$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

สมบัติของผลต่าง

1. $A - A = \emptyset$
2. $(A - B) \cap C = (A \cap B) = (B \cap C)$
3. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
4. $A - \emptyset = A$
5. $\emptyset - A = \emptyset$
6. $A - B = A - (A \cap B)$
7. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

คอมพลีเมนต์ (Complement)

คอมพลีเมนต์ของเซต A คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย A' ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ จะได้ว่า $A' = \{7, 8, 9, 10\}$



บทนิยาม 4

$$A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

สมบัติของคอมพลีเมนต์

1. $(A')' = A$
2. $\emptyset' = U$
3. $U' = \emptyset$
4. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
5. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

2. แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

คำว่าความเข้าใจถูกนำมาใช้ทั้งในชีวิตประจำวัน การทำงาน และการเรียนรู้อย่างกว้างขวางและมีความหมายหลายอย่าง ในศาสตร์การสอน แม้คำว่าความเข้าใจจะใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในสาขาคณิตศาสตร์ศึกษา ในช่วงหลังปี ค.ศ 1978 พบว่า มีนักวิจัยหลายท่านได้ให้ความหมายคำนี้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Hiebert James (1997) ได้ให้ความหมายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นการสร้างเชื่อมโยงระหว่างความคิด ความจริง และ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นั้น เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในจิตใจของแต่ละบุคคลซึ่งสร้างขึ้นจากความคิดหรือประสบการณ์ที่ได้เข้ามาเชื่อมโยงกับโครงสร้างของความรู้ที่มีอยู่แล้ว

ธวัตรชัย เดนชา และคณะ (2558) ได้ให้ความหมายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นความรู้แจ้ง หรือกระทำในข้อความรู้นั้น ๆ ซึ่งนักเรียนตอบสนองหรือแสดงออกมาผ่านการลงมือแก้ปัญหา การแสดงแนวคิด การแสดงแทน และการให้เหตุผล รวมทั้งการอธิบายเป็นคำพูด ทำทาง ตลอดจนสามารถเชื่อมโยง ความรู้และสร้างความคิดรวบยอดหรือ นิยามทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายต่อตนเองได้

ชานันท์ ขำขันมะลี (2559) ได้ให้ความหมายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นการเชื่อมโยงระหว่าง ความจริง ความคิด ความสามารถ หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการนำความรู้เดิมมาสัมพันธ์กับความรู้ใหม่แล้วสามารถแก้สถานการณ์ปัญหานั้น ๆ โดยมีการแปลความของตนเอง ตีความจากเรื่องราวต่าง ๆ สรุปความหรือการขยายความคิด โดยอาศัยความสัมพันธ์เกี่ยวกับสถานการณ์ต่าง ๆ หรือนำไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ปัญหาที่ซับซ้อนได้ถูกต้อง และสมเหตุสมผล

ยุภารณ์ ชาญญานนท์ (2562) กล่าวว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถสร้างการเชื่อมโยงระหว่าง ความคิด ความจริง และสามารถในการแปลความตีความ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จนสามารถนำความรู้เดิมที่มีอยู่มาสัมพันธ์กับสถานการณ์ใหม่ จนสามารถแก้สถานการณ์ปัญหานั้น ๆ ได้ และสามารถสรุปความหรือขยายความคิดและโดยอาศัยความสัมพันธ์เกี่ยวกับสถานการณ์ต่าง ๆ แล้วนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง และสมเหตุสมผล

จากการให้ความหมายเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักการศึกษาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เป็นการเชื่อมโยงระหว่างความจริง ความคิด และความสามารถเพื่อที่จะแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กำลังเผชิญอยู่ได้ และ

สามารถนำความรู้มาประยุกต์เพื่อการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ รวมทั้งสามารถอธิบายที่มาของผลลัพธ์ที่ถูกต้องได้

2.2 ทฤษฎี APOS (APOS Theory)

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามทัศนะปัจจุบัน แม่ว่านักวิจัยในช่วงหลัง ค.ศ 1978 จะแยกความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ออกจากความรู้ แต่การให้ความหมายความเข้าใจที่ชัดเจนให้ เป็นที่ยอมรับอย่างเดียวยังไม่เกี่ยวข้องกับความรู้ก็ยังไม่บรรลุผล ทั้งที่นักคิดนักเขียน เสนอ ทัศนะไว้อย่างหลากหลายก่อนหน้านี้ โดยเฉพาะการสร้างมโนทัศน์เรื่องความเข้าใจทาง คณิตศาสตร์ที่เสนอโดยทฤษฎี APOS ของ Dubinsky ซึ่งมโนทัศน์เรื่องความเข้าใจทาง คณิตศาสตร์นี้จะมักจะถูกอยู่ในกรอบความคิดเชิงญาณวิทยาหรือการรู้คิด (cognitive) นอกจากนี้ ทฤษฎี APOS เป็นอีกทฤษฎีการรู้คิด (cognitive) ที่นักวิจัยด้านคณิตศาสตร์ศึกษานำมาใช้เป็น กรอบในการศึกษาและอธิบายพัฒนาการ ด้านความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง ซึ่ง ทฤษฎีนี้ยังไม่มีเอกสารงานวิจัยในประเทศให้ชื่อเป็นภาษาไทย จึงใช้ทับศัพท์ว่าทฤษฎี APOS ทฤษฎีนี้เสนอโดย Dubinsky (1991) ซึ่งตีพิมพ์บทความเรื่อง Reflective abstraction in advanced mathematical thinking ลงในหนังสือ Advanced mathematical thinking ฐาน ความคิดเชิงทฤษฎีของ Dubinsky จึงมาจากมโนทัศน์เรื่องภาวะนามธรรมเชิงไตร่ตรอง ของ Piaget (วินัย คำสุวรรณ, 2558)

ทฤษฎี APOS เป็นโมเดลที่ใช้เสมือนเป็นกรอบสำหรับการอธิบายว่า แนวคิดทาง คณิตศาสตร์สามารถเรียนรู้ได้ เป็นกรอบที่ใช้ในการอธิบายว่าบุคคลสร้างความเข้าใจของพวกเขา ในทิศทางการถ่ายทอด ส่งต่อ ได้อย่างไรในจิตใจพวกเขา ซึ่งเป็นการอธิบายว่าแนวคิดนั้นสามารถ เกิดขึ้นในจิตใจของบุคคลได้ ซึ่งได้รับการจัดวางที่มีทิศทางทางคณิตศาสตร์ บทบาทของทฤษฎี เป็นแนวคิดทางการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ สำหรับทางคณิตศาสตร์ คำว่าแนวคิดที่เรียกว่า conception หรือ concept สองคำนี้เป็นคำที่แตกต่างกันโดยคำว่า conception พัฒนาขึ้นมาจาก กิจกรรมที่ทำให้เกิดการสะท้อนการกระทำ หรือเรียกว่า reflective activity ส่วนคำว่า concept เป็นการนำไปสู่ความเข้าใจร่วมกันของเนื้อหานั้น ๆ (Asiala Mark et al., 1997)

แนวคิดเกี่ยวกับการสะท้อนนามธรรมของ Piaget (Piaget' Notion of Reflective Abstraction) เป็นแนวคิดหลักของ Piaget กล่าวคือ “นามธรรมเชิงไตร่ตรอง (Reflective Abstraction)” เป็นกลไกสำคัญในกระบวนการสร้างความคิดของบุคคลในการพัฒนาตนเอง ซึ่ง ไม่เพียงเป็นกลไกหลักที่สนับสนุนการพัฒนาความคิด แต่ยังเป็นกลไกที่สำคัญในการพัฒนา โครงสร้างทางปัญญาทางตรรกะและคณิตศาสตร์ในจิตใจของแต่ละบุคคล Piaget ได้ให้

ความหมายของนามธรรมเชิงไตร่ตรอง ซึ่งแบ่งออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกเกี่ยวข้องกับการใช้การไตร่ตรองในทางทฤษฎีของการรับรู้และความคิด โดยเน้นที่แง่ด้านเนื้อหาและกระบวนการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหานั้น ๆ ซึ่งช่วยให้เข้าใจกระบวนการคัดกรองจากระดับความรู้พื้นฐานไปสู่ระดับความเข้าใจที่ลึกซึ้งมากขึ้น ตั้งแต่การทำความเข้าใจเบื้องต้นไปจนถึงการนำความรู้มาประยุกต์ใช้ในระดับที่สูงขึ้น และส่วนที่สองเกี่ยวข้องกับการสร้างขึ้นมาใหม่และการปรับโครงสร้างใหม่ โดยมีผลทำให้เนื้อหาและการปฏิบัติการเกิดขึ้นในระดับที่สูงขึ้น ซึ่งนำไปสู่การปฏิบัติการเองที่สามารถปรับให้เข้ากับสถานการณ์ใหม่ ๆ ได้ (Piaget, 1973)

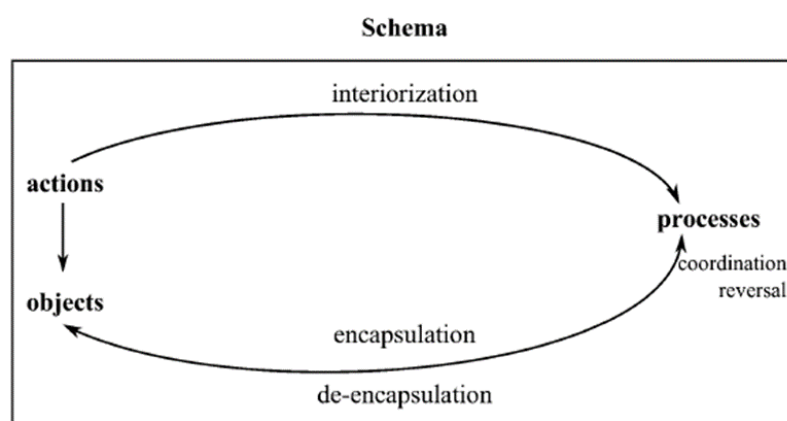
ต่อมาประมาณปี 1984 Dubinsky ได้ให้ความสนใจเกี่ยวกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน ด้วยเหตุนี้ Dubinsky จึงหันมาให้ความสนใจแนวคิดของ Piaget เกี่ยวกับการสะท้อน นามธรรม และการประยุกต์ใช้การคิดทางคณิตศาสตร์ โดย Dubinsky ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับความคิดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนหลาย ๆ ประเด็นของเนื้อหาคณิตศาสตร์ พบว่าความคิดของ Piaget นี้ยิ่งเข้าใจโครงสร้างทางปัญญาทางคณิตศาสตร์ จนทำให้เขาเชื่อว่านามธรรมเชิงไตร่ตรอง อาจเป็นเครื่องมืออันทรงพลังในการอธิบายการพัฒนาจิตใจของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงยิ่งขึ้น (Dubinsky, 1984)

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าทฤษฎี APOS เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการวัดความเข้าใจและวิเคราะห์กระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของบุคคลในแต่ละระดับของการพัฒนาแนวคิด บนพื้นฐานของแนวคิดเกี่ยวกับการสะท้อนนามธรรมเชิงไตร่ตรองของ Piaget

2.3 คำอธิบายโครงสร้างและกลไกเกี่ยวกับทฤษฎี APOS

จากที่กล่าวมาข้างต้นเกี่ยวกับทฤษฎี APOS ซึ่งมีฐานมาจากมโนทัศน์เรื่องภาวนามธรรมเชิงไตร่ตรอง ทำให้ทฤษฎี APOS มีโครงสร้างและกลไกของกระบวนการคิด ที่สามารถอธิบายพัฒนาการด้านความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้รวบรวมคำอธิบายโครงสร้างและกลไกเกี่ยวกับทฤษฎี APOS ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Dubinsky (1991) ได้กล่าวว่านามธรรมเชิงไตร่ตรอง (reflective abstraction) หรือกลไกทางความคิด (mental mechanisms) มี 5 องค์ประกอบด้วยกัน ได้แก่ 1) การตกแต่งภายใน (interiorization) 2) การประสานงาน (coordination) 3) การกลับรายการ (reversal) 4) การห่อหุ้ม (encapsulation) และ 5) ลักษณะทั่วไป (generalization) ซึ่งองค์ประกอบดังกล่าวนี้จะนำไปสู่การสร้างโครงสร้างทางความคิด ได้แก่ การกระทำ (Action) กระบวนการ (Process) วัตถุ (Object) และโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวแสดงดังภาพประกอบ 1 (Amon et al., 2014)



ภาพประกอบ 1 โครงสร้างทางความคิด และกลไกในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์

ที่ ม า : Dubinsky (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer

ระดับการกระทำ (Action) ระดับนี้เป็นการกระทำที่อยู่ภายในและเป็นสิ่งภายนอกที่ว่าแต่ละขั้นตอนของการเปลี่ยนแปลงจะต้องดำเนินการอย่างชัดเจน และถูกชี้นำ หรือได้รับคำแนะนำจากภายนอก นอกจากนี้แต่ละขั้นตอน จะแจ้งขั้นตอนต่อไป นั่นคือ ขั้นตอนการกระทำ ไม่สามารถเป็นจินตนาการได้ และไม่สามารถข้ามขั้นตอนนี้ได้ การกระทำ จำเป็นต่อการพัฒนาโครงสร้างอื่น โดยเฉพาะกระบวนการ เพราะการประยุกต์การกระทำ แนวคิดของการกระทำ เราต้องทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างแท้จริง ทั้งทางร่างกายหรือจิตใจ ซึ่งการกระทำใหม่ จะนำไปสู่การพัฒนาโครงสร้างลำดับที่สูงขึ้นนั่นคือ ระดับกระบวนการ

ระดับกระบวนการ (Process) ระดับนี้ถูกสร้างขึ้นโดยใช้ 1 ใน 2 กลไกทางความคิดนั่นคือ การตกแต่งภายใน หรือการประสานงาน กล่าวคือ เมื่อการกระทำถูกทำซ้ำและไตร่ตรอง บุคคลจะย้ายจากการพึ่งพาสัญญาณภายนอกที่นำไปสู่การมีการควบคุมภายใน คือ ลักษณะโดยความสามารถในการจินตนาการถึงการทำตามขั้นตอนต่าง ๆ โดยไม่จำเป็นต้องดำเนินการแต่ละขั้นตอนอย่างชัดเจน สามารถข้ามขั้นตอน และย้อนกลับได้ แนวคิดของกระบวนการเราสามารถดำเนินการเปลี่ยนแปลงได้โดยไม่จำเป็นต้องผ่านแต่ละขั้นตอน

ระดับวัตถุ (Object) ระดับนี้เป็นการรวบรวมข้อมูลจากระดับการกระทำและกระบวนการ โดยผ่านกลไกทางความคิดนั่นคือ การห่อหุ้มและการกลับรายการ โดยการห่อหุ้มจะเกิดขึ้นเมื่อบุคคลใช้การกระทำกับกระบวนการ ทำให้เราจะเห็นโครงสร้างเชิงพลวัตเป็นโครงสร้างคงที่ซึ่งสามารถดำเนินการได้ เมื่อกระบวนการถูกห่อหุ้มไว้ในวัตถุทางความคิดแล้วมันสามารถ

เกิดการห่อหุ้มขึ้นอีก(de-encapsulation)ได้ เมื่อมีความจำเป็นเกิดขึ้น ให้กลับไปกระบวนการพื้นฐาน กล่าวคือ สามารถใช้กลไกการห่อหุ้ม ทำให้บุคคลสามารถย้อนกลับไปสู่กระบวนการที่ก่อให้เกิดวัตถุได้

ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ระดับนี้มีลักษณะเฉพาะด้วยพลวัตของมัน และการต่อเนื่องของโครงสร้างใหม่โดยกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์เฉพาะ นอกจากนี้ ความสอดคล้องของโครงสร้างทางปัญญาคือกำหนดโดยความสามารถของแต่ละบุคคลในการตรวจสอบว่าสามารถใช้เพื่อจัดการกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้หรือไม่ เมื่อโครงสร้างทางปัญญา ถูกสร้างขึ้น เป็นการรวบรวมโครงสร้างที่สอดคล้องกัน(การกระทำ กระบวนการ วัตถุ และโครงสร้างทางปัญญา) และการเชื่อมต่อที่เกิดขึ้นระหว่างโครงสร้างเหล่านั้น มันสามารถแปลงเป็นโครงสร้างคงที่ (static structure) หรือใช้เป็นโครงสร้างพลวัต (dynamic structure) ที่ถูกนำเข้ามาระหว่างวัตถุและโครงสร้างทางปัญญา

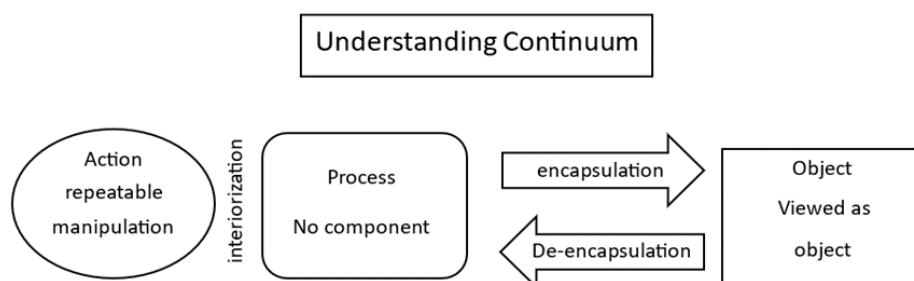
ส่วน นิติวุฒิ ศรีคลังไพร (2549) ได้ทำการศึกษาเพื่อวัดความเข้าใจของนักเรียน ใช้กรอบทฤษฎี APOS ในการวิเคราะห์ โดยได้นำเสนอกรอบตามแนวคิดของ Asiala et al. (1996) & Dubinsky (2000) เพื่อใช้อธิบายถึงธรรมชาติของโครงสร้างทางปัญญาที่จำเป็นต่อการสร้างความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน รวมถึงแนวทางของการสร้างโครงสร้างทางปัญญานั้น สำหรับกรอบทฤษฎีนี้ได้พัฒนาจากแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการสะท้อนเชิงนามธรรม โดยกรอบทฤษฎีได้จัดระดับความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ออกเป็น 3 ระดับ ได้แก่ ระดับการกระทำ ระดับกระบวนการ และระดับวัตถุ โดยในแต่ละระดับ มีรายละเอียดดังนี้

ความเข้าใจระดับการกระทำ หมายถึง ความเข้าใจที่เกิดจากกระบวนการตอบสนองต่อสิ่งเร้าจากภายนอก ในระดับนี้ผู้เรียนสามารถปฏิบัติตามเงื่อนไขหรือขั้นตอนการคำนวณที่กำหนดให้ได้อย่างเป็นลำดับ

ความเข้าใจระดับกระบวนการ หมายถึง ความเข้าใจที่เกิดจากการพัฒนาความเข้าใจในระดับการกระทำ โดยผ่านกระบวนการปรับเปลี่ยน ซึ่งเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในของผู้เรียน โดยที่ผู้เรียนสามารถสร้างภาพความคิดในใจขึ้นได้ ทั้งยังสามารถอธิบาย สะท้อน หรือคิดย้อนกลับกระบวนการเปลี่ยนแปลงนั้น โดยไม่จำเป็นต้องแสดงการกระทำในแต่ละขั้นตอน

ความเข้าใจในระดับวัตถุ หมายถึง ความเข้าใจที่เกิดขึ้นโดยผ่านกระบวนการห่อหุ้ม ซึ่งกระบวนการนี้จะเกิดขึ้นได้ ก็ต่อเมื่อผู้เรียนตระหนักเกี่ยวกับความเข้าใจในระดับกระบวนการในรูปองค์รวม และระลึกว่ากระบวนการเปลี่ยนแปลงสามารถเกิดขึ้นได้

นอกจากนี้ นิติวุฒิ ศรีคลังไพร ยังได้กำหนดกระบวนการสร้างความเข้าใจภายใต้กรอบทฤษฎี APOS ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2 กระบวนการสร้างความเข้าใจ 3 กระบวนการ

ที่มา: นิติวุฒิ ศรีคลังไพร (2549) การศึกษาความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลโดยใช้เครื่องคิดเลขกราฟฟิกเป็นฐานในการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยขอนแก่น

กระบวนการสร้างความเข้าใจภายใต้กรอบทฤษฎี เป็นกระบวนการที่อยู่ระหว่างความเข้าใจ มี 3 กระบวนการ คือ กระบวนการ interiorization encapsulation และกระบวนการ de-encapsulation ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

กระบวนการ interiorization เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเมื่อมีการปรับเปลี่ยนความเข้าใจในระดับการกระทำ ไปเป็นความเข้าใจในระดับกระบวนการ ซึ่งกระบวนการนี้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อมีการกระทำซ้ำ ๆ ในระดับการกระทำ เกิดการสร้างภาพขึ้นในใจ หรือเห็นการเปลี่ยนแปลงเหล่านั้นในภาพรวม หรือสามารถมองกระบวนการในรูปข้อมูลป้อนเข้าและผลลัพธ์ที่ได้ออกมา

กระบวนการ encapsulation เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเมื่อมีการปรับเปลี่ยนความเข้าใจในระดับกระบวนการไปเป็นความเข้าใจในระดับวัตถุ กระบวนการนี้เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ มีการเชื่อมโยงกระบวนการหลาย ๆ กระบวนการที่มีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน เชื่อมโยงกันเป็นวัตถุหนึ่ง

กระบวนการ de-encapsulation เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเมื่อมีการปรับเปลี่ยนความเข้าใจในระดับวัตถุไปสู่ความเข้าใจระดับกระบวนการ โดยจะแยกกระบวนการออกจากวัตถุเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหา หรือเพื่อให้เห็นองค์ประกอบที่เป็นกระบวนการของวัตถุ

วินัย คำสุวรรณ (2558) ได้กล่าวถึงเรื่องภาวะนามธรรมเชิงไตร่ตรองดังนี้ ภาวะนามธรรมเชิงไตร่ตรอง คือผลของกระบวนการคิด เมื่อได้สัมผัสหรือรับรู้สิ่งที่ไม่มีความเฉพาะหรือไม่มีรูป หรือสิ่งที่ไม่ได้ด้วยประสาทสัมผัสทั้งห้า คำว่าสิ่งในที่นี้ เป็นได้ทั้งความคิด ความรู้สึก พฤติกรรม ปฏิสัมพันธ์ และการกระทำของตนเองและผู้อื่น ในสถานการณ์และบริบทต่าง ๆ ผลของกระบวนการคิดที่กล่าวข้างต้น ได้มาโดยการย้อนคิดทบทวน การวิเคราะห์พิจารณาถึงเหตุผล ความรู้ ความเชื่อ หลักฐานเชื่อมโยงกับประสบการณ์ แล้วสรุปเป็นภาพรวม ตามทัศนะเชิงจิตวิทยาของ Piaget (1980) ภาวะนามธรรมเชิงไตร่ตรองเป็นวิธีการ (method) ที่บุคคลนำมาใช้ส่งเสริมสนับสนุนการสร้างความหมายที่เป็นตรรกะทางคณิตศาสตร์ ให้กระจ่างชัดมีชีวิตชีวา ทั้งนี้ Piaget (1980) ได้จำแนกการสร้างความหมาย (construction) ภายใต้มุมมองภาวะนามธรรมเชิงไตร่ตรองที่เป็นวิธีการออกเป็น 4 ชนิดได้แก่

1. กระบวนการสร้างความหมายจากภายใน (interiorization) เป็นวิธีทำความเข้าใจสิ่งที่อยู่นอกเหนือการรับรู้ในสถานการณ์ปกติ โดยการแปลสิ่งที่เรียกว่าปฏิบัติการ (operation) ให้เป็นจริง เข้าไปในระบบการสร้างความหมาย การสร้างความหมายประเภทนี้จึงเกี่ยวข้องกับปฏิบัติการ ซึ่งในทางจิตวิทยา คำว่า ปฏิบัติการ คือการทำงานของสมอง ที่เกี่ยวกับการปรับเปลี่ยน การแปลง การแปร มี 3 ด้าน คือ 1) ด้านปฏิบัติการเชิงประจักษ์ (empirical operation) เป็นการทำงานของสมองโดยการแปรผลจากการรับรู้ที่ผ่านมา ทางประสาทสัมผัส ในลักษณะการจัดกระทำ หรือดำเนินการกับสิ่งที่ป็นวัตถุการรู้ 2) ด้านปฏิบัติการตรรกะเชิงคณิตศาสตร์ (logical or mathematical operation) เป็นการทำงานของสมองที่แปรความสัมพันธ์ระหว่างสัญลักษณ์ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และ 3) ด้านปฏิบัติการทางการรู้คิด (cognitive or mental operation) เป็นการทำงานของสมองที่จะแปรสภาวะทางจิตใจ ความคิด และจินตนาการ

2. การสร้างความหมายจากการประสานกัน (coordination) โดยทั่วไป การประสานกันในทางจิตวิทยาเป็นระบบการทำงานของกลไก หรือกล้ามเนื้อร่วมกัน ทำให้งานเหล่านั้นทำงานที่ซับซ้อนขึ้นได้ แต่ในความหมายของภาวะนามธรรมเชิงไตร่ตรอง การสร้างความหมายจากการประสานกันคล้ายกับความคิดแบบทวิองค์ของนักภาษาศาสตร์ ซึ่งการสร้าง ความหมายของภาษาตามความรู้คิด ต้องร้อยเรียงกระบวนการ หรือระบบสองอย่างเข้าด้วยกัน ระบบสองอย่างที่ประสานกันเช่น ระบบของภาษากับคำพูด โดยระบบของภาษาเป็นความรู้ที่เป็นนามธรรม ส่วนคำพูดเป็นการเปล่งเสียงหรือแสดงออกของผู้ใช้ภาษา เป็นคำ วลี หรือประโยค การประสานกันของสองระบบ ทำให้ปัจเจกบุคคลรู้จักไตร่ตรอง ย้อนคิดในสิ่งที่ป็นนามธรรม หรือระบบมวลสาร สสาร กับรูป ก็เป็นอีกสองอย่างที่ไม่ประสานกัน โดยเมื่อนำรูป (from) หรือ

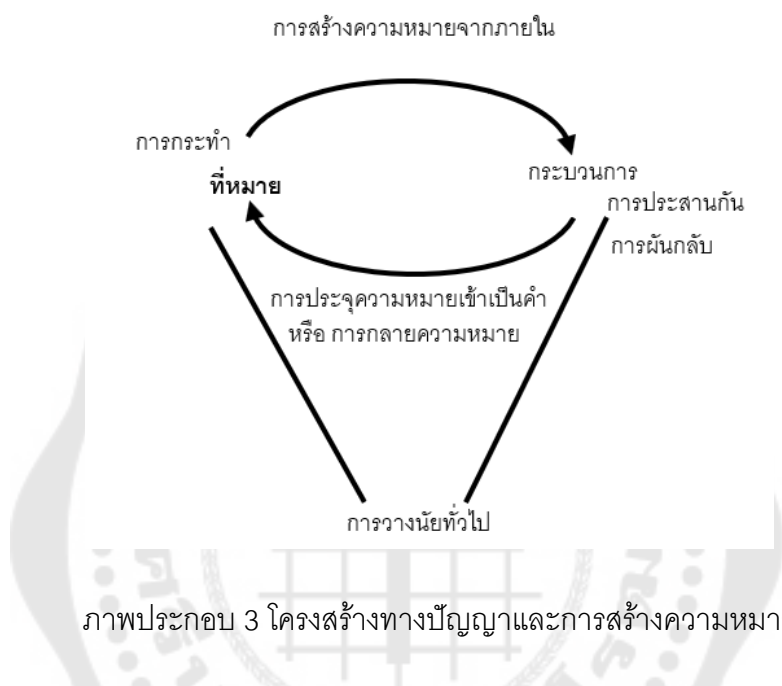
โครงสร้าง (structure) ไปประทับลงบนมวลสาร คนเราจะสามารถออกเสียงพูดได้มากมายหลายภาษาตามประสบการณ์ของแต่ละคน

3. การประจุความหมายเข้าเป็นคำ (encapsulation) หรือการกลายความหมาย (conversion) ไปตามวัตถุ หรือวัตถุที่รู้จักคุ้นเคยมาก่อน การประจุความหมายเข้าเป็นคำ เป็นไปตามแนวคิดการขยายโครงสร้าง (assimilation) ของ Piaget ที่อธิบายว่า ประสบการณ์จากสิ่งรอบตัวของปัจเจกบุคคล จะถูกประจุ หรือห่อหุ้มไว้ในโครงสร้างทางปัญญา เมื่อบุคคลเข้าไปอยู่ในสถานการณ์คล้ายกันกับประสบการณ์เดิมที่เคยเผชิญมาก่อน บุคคลจะขยายโครงสร้างทางปัญญา โดยสามารถให้ความหมายหรือสร้างคำพูด ขยายต่อจากประสบการณ์ที่มีอยู่ได้ ตัวอย่างการประจุความหมายเข้าเป็นคำในทางภาษาศาสตร์ เช่น คำว่า เข เหล่ ส่อน เหลือก มักจะมากู้กับคำว่า ตา เสมอ เรียกว่า ตา ถูกประจุความหมายเขาเป็นคำว่า ตาเข ตาเหล่ ตาส่อน ตาเหลือก ไว้ครบถ้วนมาแล้ว เวลาที่คนเราได้ยินคำทั้ง 4 ข้างต้น ก็จะนำไปรวมกับตาไว้ด้วยเสมอโดยไม่ต้องพูด ไม่ต้องออกเสียงออกมา แต่อยู่ในความคิดที่รู้ความหมายของคำเหล่านั้น การประจุความหมายเข้าเป็นคำ ช่วยให้คนเราเข้าใจความหมายของคำได้โดยไม่ต้องพูด หรือเขียนด้วยถ้อยคำเยิ่นเย้อ เช่น เรารู้ว่าในคำว่า ชก ต้องใช้หมัด หรือกำปั้น มีความหมายอยู่แล้วว่าชกด้วยหมัด เมื่อมีคนพูดว่า ถูกชก ผู้ฟังก็เข้าใจได้แล้วว่า ถูกชกด้วยหมัดหรือกำปั้น

4. การวางนัยทั่วไป (generalization) เป็นการถ่ายโยง (transfer) หรือตอบสนองในทำนองเดียวกัน ที่เคยตอบสนองต่อสิ่งเร้าเดิม กับสิ่งเร้าใหม่ ในสถานการณ์ที่คล้ายกัน การวางนัยทั่วไปเป็นการสร้างความหมายทางภาษาชนิดหนึ่ง การสร้างความหมายโดยการวางนัยทั่วไปจึงได้มาจากการประยุกต์ การกลับกลายความหมาย หรือการประจุความหมายเข้าเป็นคำ และการสร้างความหมายจากการประสานกัน เข้าด้วยกันให้เป็นโครงสร้างทางปัญญา ซึ่งตามแนวคิดของ Piaget การสร้างความหมายทางภาษาลักษณะนี้ คือ ภาวะนามธรรม (abstraction)

องค์ประกอบของทฤษฎี APOS ทฤษฎีนี้มีลักษณะเป็นทฤษฎีเชิงชั้น (hierarchical theory) ตรงตามชื่อทฤษฎีได้แก่ การกระทำ (Action) กระบวนการ (Process) วัตถุ (Object) และโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ซึ่งแต่ละองค์ประกอบ มีเค้าโครงความคิดรวบยอดเฉพาะ โดย Dubinsky (1991) ได้จำแนกการสร้าง ความหมายที่ต่างจากการสร้างความหมายแนวคิดของ Piaget ไว้ 5 ชนิดได้แก่ การวางนัยทั่วไป (generalization) การสร้างความหมายจากภายใน (interiorization) การประจุความหมายเข้าเป็นคำ (encapsulation) การประสานกัน (coordination) และการผันกลับ (reversal) การสร้างความหมายทั้งห้าชนิดนี้มีความสำคัญยิ่ง ต่อการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม สอดคล้องกับแนวคิด

ของ Piaget แต่ความต่างอยู่ที่ การสร้างความหมายชนิดที่ห้า คือ การผันกลับ ซึ่งเป็นการสร้างความหมายสำหรับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ขั้นสูง มีภาพประกอบแสดงโครงสร้างของโครงสร้างทางปัญญา (Schema) และการสร้างความหมายทั้งห้าชนิดนี้ Dubinsky (1991) นำเสนอว่า โครงสร้างทางปัญญาเป็นมากกว่าตัวคงที่ ที่แยกจากกันไม่ได้กลับสภาพเดิมที่เป็นพลวัต แต่โครงสร้างทางปัญญามีวิวัฒนาการต่อเนื่อง



ที่มา: วินัย คำสุวรรณ (2558) มโนทัศน์และการวิจัย ความเข้าใจคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

คำอธิบายของทฤษฎี APOS เริ่มต้นที่ ระดับการกระทำ และเคลื่อนไปที่ระดับ กระบวนการ จนถึงระดับวัตถุ การดำเนินการเช่นนี้ถูกประสานหรือบูรณาการเข้าสู่โครงสร้างทาง ปัญญา ดังนั้นโครงสร้างทางปัญญาก็คือ สิ่งประกอบขึ้นด้วย การกระทำ กระบวนการ และวัตถุ นั้นเอง องค์ประกอบตามทฤษฎี มีบทบาทสำคัญในการอธิบายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

ระดับการกระทำ ตามแนวคิดเรื่องภาวะนามธรรมเชิงไตร่ตรอง ถือว่าเป็นการ กระทำ เป็นปฏิบัติการทางการรู้คิด (cognitive action) ที่มีความซับซ้อนและหลากหลาย การ กล่าวถึงหรือยกตัวอย่างลักษณะที่เรียกว่าการกระทำ จึงต้องอธิบายโดยอ้อม ถึงกิริยาการกระทำ (action verbs) เช่น จัดประเภท (classify) อธิบาย (explain) ชี้หรือระบุตัว (identify) ถอด ข้อความ (paraphrase) เป็นต้น แม้ว่าในโครงสร้างทางปัญญาจะมีมโนภาพของการกระทำอยู่ใน

ขอบเขตจำกัด แต่การกระทำก็เป็นองค์ประกอบที่จำเป็นต่อการสร้างความหมายให้แก่ความเข้าใจ เนื่องจากการกระทำจะกลายเป็นการสร้างความหมายจากภายใน (interiorized) โดยผ่านการลำดับความคิดที่ทำซ้ำเกี่ยวกับการกระทำนั้น การสร้างความหมายจากภายในสำหรับการกระทำแต่ละอย่าง จะกลายเป็นโครงสร้างภายในที่เรียกว่า กระบวนการ

ระดับกระบวนการ คล้ายกับปฏิบัติการ (operations) ของ Piaget ผลสำเร็จของกระบวนการที่มาจากการสร้างความหมายจากภายใน เป็นเครื่องชี้ว่าผู้เรียนสามารถสะท้อนความคิดต่อกระบวนการหรือปฏิบัติการนั้นได้อธิบายได้ และมองย้อนกลับถึงขั้นตอนการปรับเปลี่ยนมาเป็นกระบวนการได้โดยไม่ต้องใช้สิ่งเร้าภายนอก โดยเฉพาะเมื่อมาถึงขณะนี้ ผู้เรียนจะใช้กระบวนการนี้ให้ได้มาซึ่งกระบวนการใหม่ ด้วยการใช้การประสานกัน หรือไม่ก็การผันกลับสำหรับการประสานกันมีความสัมพันธ์กับกระบวนการหลาย ๆ อย่างในการสร้างความหมายให้กับกระบวนการใหม่ ส่วนการผันกลับเป็นการสร้างความหมายให้กับกระบวนการที่ยังไม่มีการให้ความหมาย ในช่วงการสร้างความหมายจากภายใน ตัวอย่างเช่น เมื่อนึกถึงมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชัน ผู้เรียนจะสามารถเชื่อมโยงกระบวนการ ตั้งแต่สองอย่างขึ้นไป ในการหาคำตอบของฟังก์ชัน โดยใช้วิธีประสานหลายกระบวนการนั้นเข้าสู่กระบวนการเดียว ขั้นที่เป็นกระบวนการเดียวกันนั้นคือ การผันกลับ

ระดับวัตถุ เนื่องจากทฤษฎี APOS เป็นทฤษฎีการรู้คิด (cognitive action) วัตถุในกรอบความคิดของทฤษฎีนี้จึงถูกจัดให้เป็น วัตถุทางความคิด (mental objects) ที่เป็นเค้าโครงความคิดรวบยอด (construct) ของปัจเจกบุคคล ในการเรียนรู้เรื่องราวหรือวัตถุทางคณิตศาสตร์ (mathematical objects) ในทางทฤษฎีมีความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุทางความคิดกับวัตถุทางคณิตศาสตร์ แต่ที่ผ่านมายังไม่ได้รับความสนใจในประเด็นนี้มากนัก วัตถุตามนิยามคือ สิ่งใดสิ่งหนึ่งที่บุคคลให้ความตระหนัก ให้ความสนใจ วัตถุทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นหัวข้อประเด็นสาระสำคัญ ทักษะกระบวนการ ที่เคยกล่าวถึงกันมาก่อน โดยชุมชนทางคณิตศาสตร์ วัตถุตามแนวคิดในทฤษฎี APOS เป็นผลมาจากกลไก การประจุความหมายเข้าเป็นคำ (encapsulation) ซึ่งปัจเจกบุคคลต้องสะท้อนหรือใคร่ครวญ สิ่งที่เป็นนามธรรมจากประสบการณ์หล่อหลอมเข้าสู่กระบวนการรู้คิด จนกลายเป็นวัตถุการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

ระดับโครงสร้างทางปัญญา เป็นองค์ประกอบสุดท้ายของทฤษฎี APOS โครงสร้างทางปัญญาเป็นที่รวมของกระบวนการ และวัตถุหลายอย่าง สิ่งที่เกิดขึ้นรวบรวมเข้าด้วยกัน (collection) นี้อาจเกาะเกี่ยวกันมากบ้างน้อยบ้าง แต่ผู้เรียนนำมาใช้ในการทำความเข้าใจใช้ประโยชน์ในการสังเกตปรากฏการณ์และเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คำว่าโครงสร้างทาง

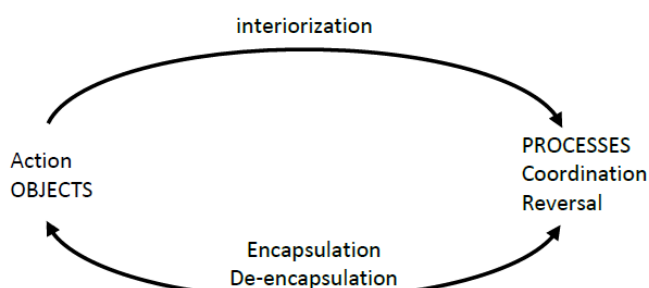
ปัญญาตามทฤษฎี มีความสัมพันธ์กับคำว่า Schema ของ Piaget และคล้ายกับคำว่ารูปมโนทัศน์ (concept image) ที่เสนอโดย Tall and Vinner (1981) จุดเน้นของทฤษฎี APOS อยู่ที่โครงสร้างทางความคิดทั้งหลาย คือ การนิรูปรูปทางความคิด หรือการสื่อแทนความคิด (mental representation) ให้แก่มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีอยู่ในใจ หรือตามที่ถูกผู้เรียนเข้าใจ ดังนั้น ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องใช้โครงสร้างทางปัญญา และโครงสร้างทางปัญญา อาจแสดงออกมาในรูปของวัตถุทางความคิด หรือวัตถุทางคณิตศาสตร์ที่เป็นองค์ประกอบอื่นเช่นการกระทำและกระบวนการ ซึ่งจะนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ต่อไป

การสร้างความหมายในเรื่องความเข้าใจคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของทฤษฎี APOS ต้องผ่านกระบวนการหลายขั้นตอน ตั้งแต่ขับเคลื่อนประสบการณ์จากภายนอกของผู้เรียน ให้กลายเป็นภาพความคิดแล้วไตร่ตรอง ย้อนคิดทบทวนและนำมาจัดเรียงร้อยในขั้นสุดท้าย คำโครงสร้างความคิดรวบยอดที่สำคัญของทฤษฎี APOS จึงอยู่ที่การไตร่ตรอง (reflection) ผู้เรียน ต้องใช้จิตสำนึก (conscious) ของตนเอง ในการก่อรูปปฏิบัติการให้เกิดขึ้นในลักษณะสะท้อนความคิด การไตร่ตรองหรือสะท้อนความคิด มีความสำคัญในฐานะที่มีบทบาทจำเป็นต่อการทำให้การเรียนรู้และความรู้มีความสมบูรณ์ โดยเฉพาะการไตร่ตรองที่มาจากการตระหนักของผู้เรียน ว่าขั้นตอนวิธีดำเนินการในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างไร การไตร่ตรองที่มาจากความสามารถที่จะวิเคราะห์ และมองหาขั้นตอนวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์กับประสบการณ์การเรียนรู้ที่มีมาแต่เดิมอย่างไร การไตร่ตรองลักษณะนี้เป็นส่วนหนึ่งของภาวธรรมเชิงไตร่ตรอง ซึ่งต้องประกอบขึ้นด้วยความตั้งใจ ที่จะใช้จิตสำนึกในการกระทำ (action) การสร้างความหมายจากภายใน เข้าสู่กระบวนการ มีการประจักษ์ความหมายเข้าเป็นคำ หรือทำให้กระบวนการกลับกลายเป็นวัตถุ และสุดท้ายมีการเชื่อมโยงเข้าด้วยกันระหว่าง การกระทำ กระบวนการ วัตถุ เข้าสู่ความเป็นตัวตนทางความคิด (mental entities) ที่เรียกว่า โครงสร้างทางปัญญา ดังนั้น ทฤษฎี APOS จึงเป็นทฤษฎีที่ใช้อธิบายโครงสร้างของวัตถุจากแหล่งที่มาซึ่งแตกต่างกันสองแหล่ง คือ การประจักษ์ความหมายเข้าเป็นคำหรือการกลับกลายเป็นกระบวนการ และการย้อนคิดทบทวนบนโครงสร้างทางปัญญา อย่างไรก็ตามคำว่าวัตถุ ที่ใช้ในทฤษฎี APOS ก็คือความรู้ทางคณิตศาสตร์ (mathematical knowledge) ซึ่งทฤษฎีนี้ยังอธิบายว่า ผู้เรียนจะเข้าใจความรู้เหล่านั้นได้อย่างไร โครงสร้างของความรู้คณิตศาสตร์ และการสร้างความหมายในแต่ละเรื่อง ผู้เรียนต้องได้ทำกิจกรรมที่มีภาวะงานเฉพาะ สอดคล้องกับแหล่งที่มาทั้งสองแหล่งดังกล่าว

Suwanto et al. (2017) ได้ให้คำอธิบายเกี่ยวกับ ทฤษฎี APOS ไว้ว่า APOS (การกระทำ กระบวนการ วัตถุ และโครงสร้างทางปัญญา) เป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิธีการเรียนรู้

แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นของ Dubinsky เป็นรูปแบบหนึ่งของการสะท้อนนามธรรมของ Piaget ในรูปแบบของแผนผังเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาที่ดำเนินการตั้งแต่ประมาณปี ค.ศ.1983 การพัฒนาทฤษฎีนี้มีพื้นฐานอยู่บนการพัฒนาความรู้ความเข้าใจที่มุ่งช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ และวิธีที่ครูแนะนำนักเรียนในการเรียนรู้ โดยพื้นฐานแล้ว ทฤษฎีนี้เป็นทฤษฎีเชิงญาณวิทยาและจิตวิทยา เนื่องจากมีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดกับธรรมชาติของแนวคิดทางคณิตศาสตร์และการพัฒนาแนวคิดในจิตใจของนักเรียน สิ่งนี้นำไปสู่การนำทฤษฎี APOS ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไปใช้ในทฤษฎีแผนการพัฒนาที่ต้องการให้นักเรียนคิดอย่างมีตรรกะและคณิตศาสตร์ ทฤษฎีของ APOS นำเสนอเป็นวิธีหนึ่งที่จะแสดงความสามารถในการคิดเชิงตรรกะของเด็ก และพัฒนาให้เป็นแนวคิดที่ซับซ้อนมากขึ้นของแนวคิดทางคณิตศาสตร์

กรอบของทฤษฎี APOS ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หมายถึง กิจกรรมทางกายภาพและจิตใจ ในรายละเอียดอีกมากที่อธิบายผังกระบวนการของคุณลักษณะทางจิตของโครงสร้าง APOS ตามการกระทำ กระบวนการ วัตถุ และโครงสร้างทางปัญญา และ กลไกต่าง ๆ เช่น การแทรกซึม การห่อหุ้ม การประสานงาน การผันกลับ การยกเลิกการห่อหุ้ม แผนผัง (schematization) และลักษณะทั่วไปของกิจกรรมผ่านแผนภาพต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4 การสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์

ที่มา: Suwanto et al. (2017). APOS theory towards algebraic thinking skill. Proceeding of Ahmad Dahlan International Conference on Mathematics and Mathematics Education

ระดับการกระทำ เป็นภายนอกในทุกระยะของการเปลี่ยนแปลง ต้องทำโดยชัดเจน และมีคำแนะนำจากภายนอก (external) เป็นผู้แนะนำ อีกทั้งแต่ละขั้นตอนจะเรียกใช้ขั้นตอนถัดไป กล่าวคือ ขั้นตอนการกระทำไม่สามารถนึกภาพได้ และไม่สามารถข้ามขั้นตอนได้

ระดับกระบวนการ กระบวนการถูกสร้างขึ้นโดยใช้หนึ่งในสองกลไกทางจิต การตกแต่งภายในหรือการประสานงาน แต่ละกลไกเหล่านี้ก่อให้เกิดกระบวนการใหม่ การห่อหุ้มเกิดขึ้นเมื่อบุคคลใช้การดำเนินการกับกระบวนการ กล่าวคือ เห็นโครงสร้างพลวัต เป็นโครงสร้างคงที่ที่สามารถใช้การดำเนินการได้

ระดับวัตถุ เมื่อกระบวนการถูกห่อหุ้มไว้ในวัตถุทางจิตแล้ว ก็สามารถยกเลิกการห่อหุ้มได้เมื่อมีความจำเป็นเกิดขึ้น กลับไปสู่กระบวนการที่เป็นรากฐานของมัน กล่าวอีกนัยหนึ่ง โดยการใช้กลไกของการห่อหุ้ม บุคคลสามารถกลับไปสู่กระบวนการที่ก่อให้เกิดวัตถุได้ กลไกการประสานงานเป็นสิ่งที่ขาดไม่ได้ในการสร้างวัตถุบางอย่าง วัตถุสองชิ้นสามารถยกเลิกการห่อหุ้มได้ กระบวนการของพวกมันประสานกัน และกระบวนการที่ประสานกันห่อหุ้มเพื่อสร้างวัตถุใหม่

โครงสร้างทางปัญญา การเชื่อมโยงกันของโครงสร้างทางปัญญานั้นพิจารณาจากความสามารถของแต่ละบุคคลในการตรวจสอบว่าสามารถใช้เพื่อจัดการกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์โดยเฉพาะหรือไม่ เมื่อโครงสร้างทางปัญญาถูกสร้างขึ้นเป็นคอลเลกชัน ที่สอดคล้องกันของโครงสร้าง (การกระทำ กระบวนการ วัตถุ) และการเชื่อมต่อที่สร้างขึ้นระหว่างโครงสร้างเหล่านั้น ก็สามารถแปลงเป็นโครงสร้างคงที่ และ/หรือใช้เป็นโครงสร้างพลวัตที่ดูดซับ วัตถุ หรือโครงสร้างทางปัญญาที่เกี่ยวข้องอื่น ๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปโครงสร้างและกลไกเกี่ยวกับทฤษฎี APOS มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ทฤษฎี APOS ประกอบด้วย 4 กลไกหลักตามแนวคิดนามธรรมเชิงไตร่ตรองของ Piaget ได้แก่ 1) การตกแต่งภายใน (interiorization) วิธีที่จะเข้าใจสิ่งที่ยูนอกเหนือจากการรับรู้ในสถานการณ์ปกติ คือการนำปฏิบัติการที่เกิดขึ้นมาเป็นสิ่งจริง ๆ แล้วนำมาใช้ในการสร้างความหมายในระบบความคิดของเรา การสร้างความหมายในลักษณะนี้เกี่ยวข้องกับการใช้ปฏิบัติการ ซึ่งในภาคจิตวิทยาคำว่า "ปฏิบัติการ" หมายถึงการทำงานของสมอง 2) การประสานงาน (coordination) การสร้างความหมายของภาษาตามความรู้คิด ต้องร้อยเรียงกระบวนการ หรือระบบสองอย่างเข้าด้วยกัน เช่น ระบบของภาษากับคำพูด โดยระบบภาษาเป็นความรู้นามธรรม ส่วนคำพูดเป็นการเปล่งเสียงของผู้ใช้ภาษา การประสานงานของสองระบบทำให้บุคคลรู้จักไตร่ตรอง ย้อนคิดในสิ่งที่ป็นนามธรรม 3) การประจุความหมายเข้าเป็นคำ (encapsulation) เป็นเสมือนการกลายความหมายไปตามวัตถุหรือวัตถุที่รู้จักคุ้นเคยมาก่อน กล่าวคือ เมื่อประสบการณ์จากสิ่งรอบตัวของบุคคล จะถูกประจุไว้ในโครงสร้างทางปัญญา เมื่อบุคคลเข้าไปอยู่ในสถานการณ์คล้ายกันกับประสบการณ์เดิมที่เคยเผชิญมาก่อน บุคคลจะขยาย

โครงสร้างทางปัญญา โดยสามารถให้ความหมายหรือสร้างคำพูด ขยายต่อจากประสบการณ์ที่มีอยู่ได้ และ 4) ลักษณะทั่วไป (generation) เป็นการโอนย้ายสิ่งที่เคยตอบสนองต่อสิ่งเร้าเดิมกับสิ่งเร้าใหม่ การวางนัยทั่วไปเป็นการสร้างความหมายทางภาษาชนิดหนึ่ง ซึ่งการสร้างความหมายโดยการวางนัยทั่วไปได้มาจากการประยุกต์ การกลับกลายความหมาย หรือการประจุความหมายเข้าเป็นคำ และการสร้างความหมายจากการประสานกันเข้าด้วยกันให้เป็นโครงสร้างทางความคิด และนอกจากนี้แล้ว ทฤษฎี APOS เป็นทฤษฎีที่วัดระดับความเข้าใจของผู้เรียน กล่าวคือ เป็นทฤษฎีที่มีองค์ประกอบตรงตามชื่อ A (Action) คือความเข้าใจระดับการกระทำ P (Process) คือความเข้าใจระดับกระบวนการ O (Object) คือความเข้าใจระดับวัตถุและ S (Schema) คือความเข้าใจระดับโครงสร้างทางปัญญา และผู้วิจัยสามารถสรุปความหมายขององค์ประกอบทฤษฎี APOS ได้ดังต่อไปนี้

ความเข้าใจระดับการกระทำ เป็นการกระทำที่อยู่ภายนอกที่เกิดขึ้นเมื่อบุคคลสามารถปฏิบัติตามเงื่อนไขที่เรากำหนดให้ได้ โดยที่ยังต้องการคำแนะนำจากภายนอก (external เช่น ครูผู้สอน ผู้รอบรู้เรื่องนั้น ๆ หนังสือ ตำรา สื่อเทคโนโลยี คำสั่ง และอื่น ๆ)

ความเข้าใจระดับกระบวนการ เป็นการกระทำระดับที่ผ่านหนึ่งหรือสองกลไก นั่นคือ การตกแต่งภายใน (interiorization) หรือการประสานงาน (coordination) นั้นหมายความว่า บุคคลสามารถแสดงความสามารถเมื่อบุคคลพัฒนาความเข้าใจในระดับที่สูงขึ้นจากการที่ได้ได้รับคำแนะนำจากภายนอก จนกระทั่งสามารถใช้ความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวข้องคาดการณ์ผลของการดำเนินการ และสามารถสร้างกระบวนการใหม่ของการดำเนินการได้ หรือกล่าวได้อีกว่า ระดับกระบวนการ เป็นการกระทำที่ผ่านการลำดับความคิดที่ทำซ้ำ ๆ เกี่ยวกับการกระทำในเรื่องนั้น ๆ

ความเข้าใจระดับวัตถุ เป็นการกระทำที่ผ่านหลาย ๆ กระบวนการที่ถูกจัดให้เป็นวัตถุทางความคิด ที่เป็นเค้าโครงความคิดรวบยอดของกระบวนการทางความคิดของบุคคล เป็นผลมาจากกลไกการประจุความหมายเข้าเป็นคำ (encapsulation) ซึ่งบุคคลต้องสะท้อนหรือใคร่ครวญ สิ่งที่เป็นนามธรรมจากประสบการณ์ หล่อหลอมเข้าสู่กระบวนการรู้คิด จนกลายเป็นวัตถุการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ หรือบุคคลสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้นได้

ความเข้าใจระดับโครงสร้างทางปัญญา เป็นการกระทำของแต่ละบุคคลในการตรวจสอบว่าสามารถใช้เพื่อจัดการกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์โดยเฉพาะได้ เมื่อโครงสร้างทางปัญญา ถูกสร้างขึ้นจะต้องสอดคล้องกับโครงสร้างระดับความเข้าใจ (การกระทำ กระบวนการ วัตถุ) อาจเกาะเกี่ยวกันมากบ้าง น้อยบ้าง แต่ผู้เรียนนำมาใช้ในการทำความเข้าใจได้

ซึ่งโครงสร้างทางปัญญานี้ จะเป็นเสมือนสื่อตัวแทนทางความคิด (mental representation) ให้แก่นักวิทยาศาสตร์ ซึ่งมีอยู่ในใจ หรือตามที่บุคคลเข้าใจ

2.4 แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS

Asiala Mark et al. (1997) ได้กล่าวไว้ว่า การทำความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เริ่มต้นด้วยการบิดเบือนวัตถุทางความคิด (mental) หรือทางกายภาพ (physical) ที่สร้างขึ้นก่อนหน้านี้ เพื่อสร้างการกระทำ การกระทำต่าง ๆ จะถูกทำให้เป็นรูปเป็นร่างภายในกระบวนการ ซึ่งถูกห่อหุ้มไว้ เพื่อสร้างวัตถุ วัตถุสามารถยกเลิกการห่อหุ้มกลับไปยังกระบวนการได้ ซึ่งถูกสร้างขึ้นมา สุดท้าย การกระทำ กระบวนการ และวัตถุ สามารถจัดระเบียบในรูปแบบเป็นโครงสร้างทางปัญญาได้

Heingraj (2006) ได้พัฒนากรอบทฤษฎีในการวิเคราะห์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ จำแนกความเข้าใจเป็น 3 ระดับดังนี้ ความเข้าใจในระดับการกระทำ (action conceptual understanding) ความเข้าใจในระดับกระบวนการ (process conceptual understanding) ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง (structural conceptual understanding) ซึ่งเป็นการอธิบายความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนโดยพิจารณาการเชื่อมโยงระหว่างความเข้าใจในแต่ละระดับ เมื่อผู้เรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของตนเองถึงระดับโครงสร้างทางปัญญา ผู้เรียนจะสามารถพัฒนาไปจนเกิดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ

Dubinsky and McDonald (2001) (อ้างถึงใน สัญลักษณ์ นักร้อง (2559)) ได้ศึกษากระบวนการสร้างความเข้าใจ ทางคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการสร้างความเข้าใจในโมโนมิติ ทางคณิตศาสตร์ โดยกล่าวว่า เป็นกระบวนการที่เป็นผลมาจากการปรับเปลี่ยนโครงสร้างทางปัญญาที่เกิดจากกระบวนการนามธรรมเชิงสะท้อน (reflective abstraction) ตามแนวคิดของนักปรัชญา และนักจิตวิทยาชาวสวิสชื่อ Piaget ซึ่งได้อธิบายว่ากระบวนการนามธรรมเชิงสะท้อนมีความสัมพันธ์ต่อกระบวนการในการสร้างความเข้าใจในโมโนมิติทางคณิตศาสตร์ในแง่วิธีการที่ว่า ผู้เรียนจะสามารถเกิดความเข้าใจได้ ก็ต่อเมื่อเผชิญอยู่กับสถานการณ์ปัญหาบางอย่างแล้วนำไปสู่สภาวะที่เรียกว่า อสมดุล สภาวะอสมดุลนี้ จะทำให้ผู้เรียนเกิดการปรับสภาวะ เพื่อให้สามารถเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่กำลังประสบอยู่ได้ และ สภาวะอสมดุลดังกล่าว จะทำให้ผู้เรียนมีการปรับโครงสร้างทางปัญญาด้วยกระบวนการดูดซึม กล่าวคือเป็นกระบวนการที่ทำให้ความรู้ที่มีอยู่เดิมถูกเสริมเข้าไปด้วยความรู้ใหม่ จนนำไปสู่กระบวนการที่เรียกว่ากระบวนการปรับเปลี่ยน (accommodation) อันเป็นกระบวนการของการปรับโครงสร้างใหม่ให้เข้ากับสถานการณ์ปัญหาที่เผชิญอยู่

จากที่ได้กล่าวมาทำให้ผู้วิจัยสามารถสรุปความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี APOS ว่าเป็นการวิเคราะห์กระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของบุคคลในแต่ละระดับของการพัฒนาแนวคิด โดยเน้นการเริ่มต้นจากการกระทำ จากนั้นมีกระบวนการในการเรียนรู้ขึ้นมา ซึ่งจะสร้างเป็นวัตถุที่นำไปใช้ในการเรียนรู้เพิ่มเติม สุดท้ายจะเป็นการสร้างโครงสร้างทางปัญญา หรือโครงสร้างทางความคิดที่เป็นโครงสร้างที่เชื่อมโยงส่วนต่าง ๆ ของความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้เข้ากันอย่างมีประสิทธิภาพ

2.5 ลักษณะความเข้าใจของผู้เรียนที่แสดงออกตามกรอบทฤษฎี APOS

ผู้วิจัยได้ทำการรวบรวมลักษณะความเข้าใจของผู้เรียนที่แสดงออกในแต่ละระดับตามกรอบทฤษฎี APOS จากนักการศึกษา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Gol Tabaghi (2007) ได้จำแนกลักษณะความเข้าใจของผู้เรียนเรื่องลอการิทึมตามกรอบทฤษฎี APOS เป็น 4 ลักษณะ ดังตาราง 3

ตาราง 3 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องลอการิทึม

ทฤษฎี APOS	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS	เรื่อง ลอการิทึม
การกระทำ	บุคคลอ้างอิงตามคำสั่งและปฏิบัติตามขั้นตอนเพื่อดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดนั้น	การเดาค่า ลอการิทึม a ฐาน b ($\log_b a$) โดยการนำฐาน b ของลอการิทึมมายกกำลัง n นั้นคือ $b^n = a$ เช่นสามารถช่วยเดาค่าของลอการิทึมนั้นได้
กระบวนการ	นักเรียนทำการกระทำซ้ำ ๆ จนสามารถพัฒนาเป็นกฎทั่วไปในการดำเนินการหาค่าของลอการิทึม	นักเรียนสามารถอธิบายวิธีการของการกระทำและให้เหตุผลของการประเมินค่าลอการิทึมของตนเอง โดยกล่าวว่า เลขชี้กำลังของฐานคือจำนวนที่เป็นค่าของลอการิทึม

ต่อตาราง (3)

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจ	เรื่อง ลอการิทึม
APOS	ตามกรอบทฤษฎี APOS	
กระบวนการ		นักเรียนอาจหาค่าของ $\log_x x$ และให้เหตุผลว่า $x^1 = x$
วัตถุ	จากผลของกระบวนการ แล้วมองว่าเป็นวัตถุ เมื่อมีการได้รับการห่อหุ้ม บางอย่าง ซึ่งสามารถนำมาดำเนินการได้	นักเรียนสามารถทำ การบวก การลบ หรือการเปรียบเทียบได้ เช่น การคำนวณ $\log_4 7 + \log_4 5$ หรือ เปรียบเทียบกับวัตถุอื่น ๆ เช่น $\log_4 12$
โครงสร้างทางปัญญา	เข้าใจวัตถุทางคณิตศาสตร์ในระดับวัตถุว่าเป็นระบบ ซึ่งองค์ประกอบถูกสร้างขึ้นผ่านความสัมพันธ์เชิงแนวคิด	สามารถหาสมบัติของลอการิทึมจากสมบัติของเลขยกกำลัง

ที่ ม า : Gol Tabaghi (2007). APOS analysis of students' understanding of logarithms [Concordia University].

Suwanto et al. (2017) ได้สรุปคุณลักษณะความเข้าใจตามกรอบ APOS เรื่อง การคิดเชิงพีชคณิต ดังตาราง 4

ตาราง 4 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการคิดเชิงพีชคณิต

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการคิดเชิงพีชคณิต
APOS	
การกระทำ	-ขั้นนี้เกี่ยวข้องกับความเข้าใจวิธีดำเนินการ (procedural matters) -มุ่งเน้นไปที่การลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหา

ต่อตาราง (4)

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการคิดเชิงพีชคณิต APOS
การกระทำ	-มีแนวโน้มที่จะแก้ปัญหาตามตัวอย่างที่ให้มา -ใช้เฉพาะแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของสูตรที่เป็นทางการตามตัวอย่างเท่านั้น -ต้องการคำแนะนำอย่างละเอียดเพื่อแก้ปัญหา(จำเป็นต้องได้รับคำแนะนำอย่างละเอียดในการแก้ปัญหา)
กระบวนการ	-ขั้นตอนนี้ไม่จำเป็นต้องมีคำแนะนำในการดำเนินการ -สามารถอธิบายขั้นตอนโครงสร้างการดำเนินการได้โดยไม่ต้องลงมือทำจริง -ขั้นตอนนี้เป็นความเข้าใจเชิงขั้นตอน (procedural understanding)
วัตถุ	-สามารถดำเนินการกระทำ (Action) และกระบวนการ (Process) กับวัตถุทางคณิตศาสตร์ที่พบได้ -กระบวนการนี้เป็นความเข้าใจเชิงแนวคิด (conceptual understanding) -สามารถอธิบายการดำเนินการจนเสร็จสิ้นได้ในเชิงตรรกะและเชิงโครงสร้าง -สามารถอธิบายสมบัติของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้
โครงสร้างทางปัญญา	-สามารถเชื่อมโยงแนวคิดต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์ หรือการเปลี่ยนแปลงของแนวคิด ในขั้นการกระทำขั้นกระบวนการและขั้นวัตถุได้ -สามารถเชื่อมโยงการกระทำ กระบวนการ และวัตถุ กับคุณสมบัติที่เคยรู้มาก่อนได้ -ทำความเข้าใจสูตรที่จำเป็นในการแก้ปัญหา

ที่ ม า : Suwanto et al. (2017). APOS theory towards algebraic thinking skill. Proceedings of Ahmad Dahlan International Conference on Mathematics and Mathematics Education

Karama (2021)ได้จำแนกลักษณะความเข้าใจของผู้เรียนเรื่องความหมายของอนุพันธ์ตามกรอบทฤษฎี APOS เป็น 4 ลักษณะดังตาราง 5

ตาราง 5 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องความหมายของอนุพันธ์

ทฤษฎี APOS	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS	เรื่องความหมายของอนุพันธ์
การกระทำ	เป็นขั้นตอนแรกในการเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์จากสิ่งแวดล้อมภายนอก	ผู้เรียนที่สะท้อนการคอนจูเกตของตัวเลขได้ เช่น $3^2 - 2^2 = (3-2)(3+2)$ (คอนจูเกตของ $3-2$ คือ $3+2$) หรือผู้เรียนสามารถใช้ความรู้ผลต่างกำลังสามได้เช่น $3-2 = \left(3^{1/3} - 2^{1/3}\right)\left(3^{2/3} + (3.2)^{1/3} + 2^{2/3}\right)$
กระบวนกร	ผู้เรียนจะทำซ้ำและสะท้อนการกระทำหลายครั้งเพื่อเข้าใจและจดจำแนวคิดลงในหน่วยความจำภายใน	ผู้เรียนที่สะท้อนการคอนจูเกตของตัวเลขซึ่งมีสูตรที่ซับซ้อนมากขึ้น เช่น $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ หรือ $u-v = \left(u^{1/3} - v^{1/3}\right)\left(u^{2/3} + (uv)^{1/3} + v^{2/3}\right)$
วัตถุ	เป็นการรับรู้ถึงการเรียนรู้ของกระบวนกรที่มีการกระทำและการทำในขั้นตอนนี้ผู้เรียนจะแปลงแนวคิดอย่างชัดเจนหรือยอมรับโดยการเข้ารหัสกระบวนกรลงในวัตถุเชิงความคิด	ผู้เรียนสามารถจัดการกับชนิดของคอนจูเกตใดก็ได้ได้อย่างง่ายดาย เช่น $u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + u^2v^{n-3} + uv^{n-2} + v^{n-1})$ หรือ $u^{\frac{n}{n}} - v^{\frac{n}{n}} = \left(u^{\frac{1}{n}} - v^{\frac{1}{n}}\right)\left(u^{\frac{n-1}{n}} + u^{\frac{n-2}{n}}v^{\frac{1}{n}} + \dots + u^{\frac{2}{n}}v^{\frac{n-3}{n}} + u^{\frac{1}{n}}v^{\frac{n-2}{n}} + v^{\frac{n-1}{n}}\right)$
โครงสร้างทางปัญญา	การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสมบูรณ์ ซึ่งรวมถึงการ	ผู้เรียนจำเป็นต้องทราบขั้นตอนทั้งหมดในการหาอนุพันธ์จากบทนิยาม เช่น การหาอนุพันธ์ตามบทนิยามของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ ซึ่งผู้เรียนจะใช้

ต่อตาราง (5)

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจตาม	เรื่องความหมายของอนุพันธ์
APOS	กรอบทฤษฎี APOS	
โครงสร้าง ทางปัญญา	กระทำ กระบวนการ และ วัตถุ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นที่ จะต้องมีโครงสร้าง และ เกี่ยวข้องกับความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ อย่างชัดเจนเป็นเชิงตรรกะ และมีความหมายที่เข้าใจ ได้	วิธีการได้โดยการแทนค่า การคูณด้วยคอนจูเกตที่ ถูกต้อง ยกเลิกใช้ตัวประกอบร่วม

ที่มา: Karama (2021). Using a Definition to Find the First Derivative of Functions: Misconceptions and Remediation at the Collegiate Level. *Online Submission*, 11(12), 1613-1625.

ศราววุฒิ จำวัน (2559) ได้จำแนกลักษณะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง แขนงสมมาตร ตามกรอบทฤษฎี APOS เป็น 4 ระดับ ดังตาราง 6

ตาราง 6 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องแกนสมมาตร

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องแกนสมมาตร
APOS	
การกระทำ	ผู้เรียนสามารถปฏิบัติตามเงื่อนไข หรือขั้นตอนการคำนวณที่กำหนดอย่างเป็นลำดับ เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่ผู้เรียนใช้ความรู้เดิมมาสร้างความหมายต่อสิ่งเร้าภายนอก
กระบวนการ	-ผู้เรียนสามารถสร้างภาพความคิดในใจขึ้นได้ -ผู้เรียนได้พัฒนาความเข้าใจระดับการกระทำ หรือการคำนวณหลาย ๆ ครั้ง

ต่อตาราง (6)

ทฤษฎี APOS	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เกี่ยวกับเรื่อง แกน สมมาตร
กระบวนการ	จนกระทั่งสามารถใช้ความรู้ความเข้าใจที่เกี่ยวข้องมาสรุปเป็นกรณีทั่วไป โดยการวิเคราะห์ สังเคราะห์ หรือเปรียบเทียบผลที่ได้จากการสังเกต การวัด การคำนวณ หรือการจัดกระทำอย่างเป็นขั้นตอนในรูปของมโนภาพ (concept image) โดยไม่จำเป็น ต้องไปจัดกระทำหรือคิดคำนวณที่เป็นลำดับขั้นตอน -ผู้เรียนสามารถอธิบาย สะท้อน หรือคิดย้อนกลับกระบวนการการจัดกระทำ โดยไม่จำเป็นต้องแสดงการจัดกระทำในแต่ละขั้นตอนออกมา
วัตถุ	-ผู้เรียนรับเอาองค์ความรู้ใหม่ที่เกิดจากการเรียนรู้ จัดจำแนกให้เข้าหมวดหมู่ กับองค์ความรู้ที่มีอยู่แล้ว -ผู้เรียนตระหนักเกี่ยวกับกระบวนการต่าง ๆ ในรูปองค์รวม และระลึกได้ว่า กำลังเกิดกระบวนการเปลี่ยนแปลงขึ้น
โครงสร้าง ทางปัญญา	-ผู้เรียนสามารถเลือกเชื่อมโยงกลุ่มกระบวนการต่าง ๆ ทั้งจากระดับการกระทำ ระดับกระบวนการ และระดับวัตถุ รวมถึงจากโครงสร้างการเชื่อมโยงทาง ปัญญาอื่น ๆ เพื่อใช้ในการสร้างความเข้าใจในระดับกระบวนการใหม่ หรือ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ใหม่ในระดับที่สูงขึ้น -ผู้เรียนนำเอาความเข้าใจในระดับต่าง ๆ มาใช้ในการแก้ปัญหา กระบวนการ สร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จะเริ่มต้นจากการจัดกระทำวัตถุเชิง กายภาพ หรือเชิงมโนภาพที่มีอยู่เดิมในโครงสร้างทางปัญญาเพื่อจะสร้าง ความเข้าใจ หรือสร้างความหมายกับข้อมูลสารสนเทศ หรือประสบการณ์ใหม่ ที่รับเข้ามา

ที่มา:ศราวุฒิ จำวัน (2559).ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องแกนสมมาตรตาม กรอบทฤษฎี APOS :กรณีศึกษาชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนห้วยนาศึกษาวิทย. กองประชุม วิชาการและนำเสนอผลงานวิจัยระดับชาติ ราชธานีวิชาการ ครั้งที่1.

พัชรี เรืองสวัสดิ์ (2562) ได้จำแนกลักษณะความเข้าใจเรื่องความน่าจะเป็น ตาม กรอบ ทฤษฎี APOS เป็น 3 ระดับ ดังตาราง 7

ตาราง 7 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องความน่าจะเป็น

ทฤษฎี APOS	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบ ทฤษฎี APOS	เรื่องความน่าจะเป็น
การกระทำ	สามารถปฏิบัติตามเงื่อนไขที่กำหนด หรือดำเนินการตามขั้นตอนอย่าง ต่อเนื่องทีละลำดับขั้น	สามารถหาคำตอบโดยไม่สนใจ กระบวนการของการได้มาของ คำตอบหรือใช้การแทนค่าเพื่อหา คำตอบ
กระบวนการ	สามารถอธิบายถึงวิธีการจัดกระทำนั้น โดยไม่ต้องแสดงวิธีการในแต่ละขั้นตอน หรือคิดย้อนกลับของวิธีดำเนินการ	สามารถใช้กระบวนการเพียงหนึ่ง กระบวนการ ในการแก้ปัญหา ปัญหาของโจทย์
วัตถุ	เมื่อเกิดความเข้าใจในระดับ กระบวนการหลาย ๆ กระบวนการจน สามารถนำแต่ละกระบวนการมา เชื่อมโยงได้อย่างเหมาะสมจนนำไป สร้างเป็นองค์ความรู้ใหม่ทาง คณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นหรือนำไป แก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้น	สามารถใช้กระบวนการที่ หลากหลายอย่างน้อยสอง กระบวนการในการแก้ปัญหาของ โจทย์

ที่มา: พัชรีย์ เรืองสวัสดิ์ (2562). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดทฤษฎี
คอนสตรัคติวิสต์ที่ส่งเสริมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 5 มหาวิทยาลัยทักษิณ].

เชมจิรา เทียงอยู่ (2565) ได้จำแนกความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องเซต โดยใช้
ภาษาไพธอน ตามกรอบทฤษฎี APOS เป็น 4 ระดับ ดังตาราง 8

ตาราง 8 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องเซตโดยใช้ภาษาไพธอน

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องเซตโดยใช้ภาษาไพธอน
APOS	
การกระทำ	ความสามารถของนักเรียนในการใช้ภาษาไพธอน เพื่อสำรวจเซต เช่น - การเป็นสมาชิกของเซตหรือไม่เป็นสมาชิกของเซต - จำนวนสมาชิกของเซต - การเท่ากันและไม่เท่ากันของเซต - เพาเวอร์เซตของเซตจำกัด - ผลการดำเนินการระหว่างเซต
กระบวนการ	ระบุสมาชิกของเซต อธิบายเกี่ยวกับเซต หาผลดำเนินการระหว่างเซตสองเซต หาความสัมพันธ์ของจำนวนสมาชิกของเซตทั้งสองเซตหรือสามเซต โดยไม่ใช้ภาษาไพธอน
วัตถุ	ความสามารถของนักเรียนในการเขียนข้อสรุปเกี่ยวกับ - ลักษณะเซตและการเขียนแสดงเซต - จำแนกสิ่งที่เป็นเซต และไม่เป็นเซต - จำแนกประเภทของเซต - อธิบายสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเซต
โครงสร้างทางปัญญา	ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง เซต และ/หรือ เนื้อหาเรื่องอื่นทางคณิตศาสตร์ ร่วมกับการออกแบบโปรแกรมด้วยภาษาไพธอน เพื่อใช้สำหรับแก้สถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ หรือใช้ในความรู้อื่นทางคณิตศาสตร์ใหม่ในระดับที่สูงขึ้น

ที่มา: เขมจิรา เทียงอยู่ (2565). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่อง เซต ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยใช้ภาษาไพธอน สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ปริญญาโท (กศ.ด. (คณิตศาสตร์)) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2565.

Chiew Leng and Cheng Meng (2023) ได้จำแนกความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
เรื่องการวัดการกระจาย ตามกรอบทฤษฎี APOS เป็น 4 ระดับ ดังตาราง 9

ตาราง 9 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการวัดการกระจาย

ทฤษฎี APOS	ลักษณะความเข้าใจตาม กรอบทฤษฎี APOS	เรื่องการวัดการกระจาย
การกระทำ	นักเรียนสามารถ ดำเนินการตามขั้นตอนที่ เรียนรู้มาโดยอัตโนมัติ นักเรียนต้องดำเนินการ ตามข้อมูลที่ได้รับ	นักเรียนที่ทำงานทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$ คาดว่าจะสามารถ ตีความและให้ความหมายกับนิพจน์ดังกล่าวใน ฐานะที่เป็นลำดับขั้นตอนของการคำนวณ เช่น การตีความ $\sum f_i(x_i - \bar{x})^2$ ว่าเป็นผลรวมของ ผลคูณของ f_i และกำลังสองของผลต่างระหว่าง x_i กับ $\bar{x}$ แล้วนำไปหารด้วยผลรวมของ f_i นักเรียนตระหนักถึงและใช้สมบัติพื้นฐานของการ ดำเนินการ เช่น สมบัติการแจกแจง
กระบวนการ	ระดับของกระบวนการ เกิดขึ้นเมื่อมีการทำซ้ำของ การกระทำจนกระทั่ง นักเรียนสามารถ เปลี่ยนแปลงลักษณะ เดียวกันของการกระทำ และสร้างโครงสร้างทาง ความคิดโดยไม่ต้องอาศัย สิ่งเร้าภายนอก	นักเรียนสามารถมองเห็นกระบวนการโดยรวม และมั่นใจว่าการจัดการกับ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$ เป็นกระบวนการที่ให้ผล ลัพธ์เป็นสมการที่เท่ากัน
วัตถุ	เป็นระดับของความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ นักเรียนสามารถรวมการ เปลี่ยนแปลงเพื่อสร้างวัตถุ	นักเรียนสามารถนำกระบวนการของส่วน เบี่ยงเบนมาตรฐานไปใช้ได้ทั้งหมด และเข้าใจว่า

ต่อตาราง (9)

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจตาม	เรื่องการวัดการกระจาย
APOS	กรอบทฤษฎี APOS	
วัตถุ	ทางคณิตศาสตร์ผ่านการประยุกต์ใช้กิจกรรมที่ระดับการกระทำและกระบวนการ	มีการเปลี่ยนแปลง เช่น การใช้วิธีการทางเลือก (เช่น $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$) สามารถทำได้
โครงสร้างทางปัญญา	เป็นชุดของกระบวนการและวัตถุที่เกิดขึ้นเมื่อนักเรียนสามารถจัดระเบียบและทำความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ทั้งที่คุ้นเคยและไม่คุ้นเคยได้	นักเรียนสามารถเชื่อมโยงคุณสมบัติของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสามารถสรุปผล รวมถึงทำความเข้าใจแนวคิดตามการเชื่อมโยงได้

ที่ ๓ : Chiew Leng and Cheng Meng (2023) Uncovering student errors in measures of dispersion: An APOS theory analysis in high school statistics education. *European Journal of Science and Mathematics Education*,

สำหรับในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้จำแนกลักษณะความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS เป็น 4 ระดับ ดังตาราง 10

ตาราง 10 จำแนกลักษณะความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบ	เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต
APOS	ทฤษฎี APOS	
การกระทำ	ผู้เรียนสามารถดำเนินการตามขั้นตอนที่ได้เรียนรู้มาโดยอัตโนมัติ ทำให้ผู้เรียนต้องดำเนินการตามข้อมูลที่ได้รับ	เป็นระดับที่นักศึกษาสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตตาม

ต่อตาราง (10)

ทฤษฎี	ลักษณะความเข้าใจตามกรอบ	ลักษณะความเข้าใจเรื่อง การ
APOS	ทฤษฎี APOS	ดำเนินการระหว่างเซต
การกระทำ		ผลต่าง และคอมพลีเมนต์เมื่อกำหนดเซตมาให้ ร่วมทั้งการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน การดำเนินการระหว่างเซตแบบอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง และการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ
กระบวนการ	ระดับของกระบวนการเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนมีการทำซ้ำ ๆ ของการกระทำจนกระทั่งผู้เรียนสามารถเปลี่ยนแปลงลักษณะเดียวกันของการกระทำและสร้างโครงสร้างทางความคิดโดยไม่ต้องอาศัยสิ่งเร้าภายนอก	เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซต ผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ
วัตถุ	ระดับของความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนสามารถรวมการเปลี่ยนแปลงเพื่อสร้างวัตถุทางคณิตศาสตร์ผ่านการประยุกต์ใช้ความรู้ในระดับการกระทำและกระบวนการ	เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตหรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ
โครงสร้างทางปัญญา	เมื่อผู้เรียนสามารถจัดระเบียบและทำความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างโครงสร้างใหม่ได้	เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตหรือแสดงการใช้สมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ ทฤษฎี APOS

งานวิจัยในประเทศไทย

นิติวุฒิ ศรีคลังไพร (2549) ได้ศึกษาความเข้าใจของนักเรียน เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล โดยใช้เครื่องคิดเลขกราฟฟิกเป็นฐานในการเรียนการสอน การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความเข้าใจของนักเรียนและศึกษากระบวนการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน รูปแบบของการวิจัย ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนแห่งหนึ่ง ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 จังหวัดชัยภูมิ จำนวน 6 คน คัดเลือกมาโดยความสมัครใจของนักเรียน โดยแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 2 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ กิจกรรมการเรียนรู้หาคิกรรรม ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการจัดการเรียนการสอนตามกิจกรรมที่บูรณาการด้วยเครื่องคิดเลขกราฟฟิก ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยการบันทึกภาคสนาม บันทึกวีดีโอ และบันทึกเสียงของนักเรียน แล้วนำมาวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้การวิเคราะห์โปรโตคอล ทำการวิเคราะห์ระดับความเข้าใจ โดยใช้กรอบทฤษฎี APOS ผลการวิจัยพบว่า 1) ระดับความเข้าใจของนักเรียนในขั้นการจัดกระทำ นักเรียนสามารถลงคู่อันดับบนกราฟ หาค่าของฟังก์ชันในรูปตาราง กราฟ และสมการได้ ระดับความเข้าใจของนักเรียนในขั้นกระบวนการนักเรียนสามารถสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันลด ฟังก์ชันเพิ่ม โดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน จุดตัดแกน y กราฟไม่ตัดแกน x แต่นักเรียนไม่สามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1-1 และ 2) ในกระบวนการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนพบว่า นักเรียนได้สังเกต เปรียบเทียบ และอธิบายถึงความเหมือน ความแตกต่างของสมการ และกราฟที่แสดงผลโดยเครื่องคิดเลขกราฟิก ซึ่งเป็นการพัฒนาความเข้าใจ จากระดับการกระทำไปสู่ความเข้าใจระดับกระบวนการโดยผ่านการปรับเปลี่ยน

มลิวรรณ พวงจำปี (2557) ได้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบทฤษฎี APOS เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน กลุ่มเป้าหมาย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 45 คน โดยการเลือกแบบเจาะจง และเลือกนักเรียนจำนวน 6 คน เป็นกรณีศึกษา เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นแบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ และแบบสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ผลการวิจัย พบว่า ปัญหาข้อที่ 1 นักเรียนมีความเข้าใจระดับการกระทำ ร้อยละ 88 และระดับกระบวนการ ร้อยละ 85 ปัญหาข้อที่ 2 นักเรียนมีความเข้าใจระดับการกระทำ ร้อยละ 85 และระดับกระบวนการ ร้อยละ 67 ปัญหาข้อที่ 3 นักเรียนมีความเข้าใจระดับการกระทำ ร้อยละ 84 ระดับกระบวนการ ร้อยละ 66 และระดับโครงสร้าง ร้อยละ 23 ปัญหาข้อที่ 4 นักเรียนมีความเข้าใจระดับการกระทำ ร้อยละ 86 ระดับกระบวนการ ร้อยละ 65 และระดับโครงสร้าง ร้อยละ 27 และปัญหาข้อที่ 5 นักเรียนมีความเข้าใจ

ระดับการกระทำร้อยละ 80 ระดับกระบวนการร้อยละ 68 และระดับโครงสร้างร้อยละ 20 ส่วนผลการสัมภาษณ์ พบว่า นักเรียนกลุ่มเก่งมีความเข้าใจระดับการกระทำทุกคน เพราะนักเรียนเข้าใจนิยาม กฎ ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตที่นำมาใช้ในการหาคำตอบได้ ความเข้าใจระดับกระบวนการมีครบทุกคน เพราะนักเรียนเข้าใจนิยาม ทฤษฎี วิธีการหาคำตอบลิมิตของฟังก์ชันบนช่วง และความเข้าใจระดับโครงสร้างมีความเข้าใจบางคน เพราะบางคนไม่เข้าใจนิยาม ทฤษฎี และลำดับขั้นตอนวิธีการหาคำตอบ นักเรียนกลุ่มอ่อนมีความเข้าใจระดับการกระทำทุกคนเพราะนักเรียนเข้าใจนิยาม กฎ ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตที่นำมาใช้ในการหาคำตอบได้ แต่ไม่มีนักเรียนคนใดเลยมีความเข้าใจระดับกระบวนการและระดับโครงสร้างเพราะนักเรียนไม่เข้าใจนิยาม กฎ ทฤษฎีวิธีการหาคำตอบ และลำดับขั้นตอนวิธีการหาคำตอบ

ธวัตรชัย เดนชา และคณะ (2558) ได้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง เลขยกกำลัง การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้ในการสอนด้วยวิธีแบบเปิด กลุ่มเป้าหมาย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 6 คน (3 คู่) ซึ่งผู้วิจัยได้จัดการเรียนการสอน 4 ขั้นตอนตามแนวทางวิธีการเปิดตามแนวคิดของ Inprasitha (2010) จำนวน 6 แผน 6 ชั่วโมง และได้ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลแบบสำรวจระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องบันทึกวิดีโอ และใช้การสัมภาษณ์นักเรียน แล้วทำการวิเคราะห์โพรโทคอล (Protocol Analysis) ตามกรอบทฤษฎี APOS ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถของนักเรียนตาม 4 ขั้นตอนของวิธีการเปิด 1) ขั้นตอนที่ 1 นักเรียนมีความเข้าใจระดับการกระทำ และระดับกระบวนการ 2) ขั้นตอนที่ 2 นักเรียนมีความเข้าใจระดับการกระทำ ระดับกระบวนการ และระดับวัตถุ 3) ขั้นตอนที่ 3 นักเรียนมีความเข้าใจระดับกระบวนการ และระดับวัตถุ 4) ขั้นตอนที่ 4 นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความเข้าใจระดับกระบวนการและความเข้าใจในระดับวัตถุให้เป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างเชิงการรู้ได้

ศราวุฒิ จำวัน (2559) ได้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องแกนสมมาตรตามกรอบทฤษฎี APOS การวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาพฤติกรรมการเรียนรู้ ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านสื่อมัลติมีเดียที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น กิจกรรมการเรียนรู้ถูกแบ่งออกเป็น 4 กลุ่ม โดยมีการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนผ่านการจดบันทึก ภาคสนาม และการบันทึกวิดีโอ รวมทั้งบันทึกภาพนิ่งเป็นรายกลุ่ม การดำเนินการวิจัยใช้เวลาสองคาบเรียน คาบละ 50 นาที สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลได้นำวิดีโอที่บันทึกพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน แต่ละกลุ่มมาถอดโพรโทคอล และใช้กระบวนการวิเคราะห์โพรโทคอล ร่วมกับบันทึกภาคสนามและบันทึกภาพนิ่งเทียบกับตารางดัชนีตัวชี้วัดพฤติกรรมว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจในระดับใด และมีการพัฒนาความ

เข้าใจจากกระบวนการเรียนรู้อย่างไร ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มมีพฤติกรรมการเรียนรู้ที่แสดงออกถึงระดับความเข้าใจและการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้อย่างเป็นระบบ โดยอาศัยกระบวนการเรียนรู้แบบกลุ่ม นักเรียนมีการอภิปรายพูดคุยในระหว่างทำกิจกรรม ส่งผลให้เกิดการตกผลึกองค์ความรู้ที่ทุกคนยอมรับได้และถูกต้อง

สัณฐักษณ์ นักร้อง (2559) ได้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับมโนมติลิมิตตามกรอบทฤษฎี APOS โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจเกี่ยวกับมโนมติลิมิตของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ รูปแบบการวิจัยในครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีเชิงคุณภาพ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับอุดมศึกษาชั้นปีที่ 1 จำนวน 6 คน ซึ่งเข้าร่วมการวิจัยด้วยความสมัครใจ เครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย ได้แก่ ใบกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับมโนมติลิมิตของฟังก์ชัน วิธีการวิจัยมี 4 ขั้นตอนดังนี้ ขั้นตอนที่ 1 ผู้วิจัยดำเนินการสอนการใช้โปรแกรม และดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ขั้นตอนที่ 2 กลุ่มตัวอย่างปฏิบัติกิจกรรมเรื่องลิมิตของฟังก์ชันกลุ่มละ 3 คน ขั้นตอนที่ 3 สัมภาษณ์เชิงลึกนักศึกษา หลังจากทำใบกิจกรรมที่ละกลุ่ม ขั้นตอนที่ 4 วิเคราะห์ข้อมูลจากผลการตอบใบกิจกรรมของกลุ่มตัวอย่าง โดยวิเคราะห์ระดับความเข้าใจในมโนมติลิมิต ตามกรอบทฤษฎีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ระดับ ระดับการกระทำ (Action) ระดับกระบวนการ (Process) และระดับวัตถุ (Object) และพิจารณาความเชื่อมโยงกันในความเข้าใจระดับกระบวนการ (Process) ระดับวัตถุ (Object) ที่สัมพันธ์กัน เพื่อสร้างเป็นโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ผลการวิจัยพบว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นักศึกษามีความเข้าใจระดับ (Action) ระดับ (Process) และระดับวัตถุ (Object) ที่เกี่ยวกับมโนมติลิมิตของฟังก์ชัน และนักศึกษาสามารถเชื่อมโยงความเข้าใจระดับ กระบวนการ (Process) และระดับวัตถุ (Object) และคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องในการแก้สถานการณ์ปัญหาสามารถนำไปใช้ในสถานการณ์ที่เฉพาะได้ ส่วนระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) เกี่ยวกับมโนมติลิมิตยังมีความไม่สมบูรณ์

เขมจิรา เทียงอยู่ (2565) ได้ทำการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่องเซตตามกรอบทฤษฎี APOS โดยใช้ภาษาไพธอน การวิจัยนี้มีความมุ่งหมายเพื่อ 1) วิเคราะห์ปัจจัยที่ส่งผลต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันของครูและนักเรียนระดับมัธยมศึกษา 2) พัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยใช้ภาษาไพธอนให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 60/60 และ 3) ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่อง

เขต ตามกรอบทฤษฎี APOS กลุ่มตัวอย่างเป็นครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์และนักเรียนระดับมัธยมศึกษา โดยใช้การสุ่มตัวอย่างแบบหลายขั้นตอน และมีนักเรียนจำนวน 4 คนถูกเลือกแบบเจาะจงเพื่อศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า 1) เมื่อพิจารณาเพศและระดับการศึกษาของครูมีปัจจัยการสนับสนุนการใช้เทคโนโลยีจากโรงเรียน ความต้องการ ใช้เทคโนโลยีประกอบการสอน ความสามารถในการใช้เทคโนโลยีพื้นฐาน ความสามารถในการใช้เทคโนโลยีเฉพาะด้าน ความรู้ด้านเนื้อหา วิธีการสอนที่หลากหลาย และ ปัจจัยวิธีการสอนแบบบรรยายไม่แตกต่างกัน 2) กิจกรรมการเรียนการสอนเสริมสร้างระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องเซต โดยใช้ภาษาไพธอน สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษามีประสิทธิภาพ เท่ากับ 77.81/75.50 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 60/60 และ 3) นักเรียนระดับมัธยมศึกษาหลังเรียนด้วย กิจกรรมการเรียนการสอน มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่อง เซต ได้แก่ระดับ A, P, O และ S สูงกว่าเกณฑ์ ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม และมีจำนวนมากกว่า ร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

งานวิจัยต่างประเทศ

Gol Tabaghi (2007) ได้ศึกษาความเข้าใจของนักเรียนเรื่องฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่ง การศึกษาครั้งนี้ได้ทำการสัมภาษณ์นักเรียนที่เรียนฟังก์ชันลอการิทึม โดยข้อมูลจากการสัมภาษณ์ จะถูกวิเคราะห์ตามกรอบทฤษฎี APOS เพื่อระบุความยากของนักเรียนเกี่ยวกับความเข้าใจ แนวคิดของฟังก์ชันลอการิทึม ผลการศึกษาเผยให้เห็นว่า ความเข้าใจของนักเรียนส่วนใหญ่ เกี่ยวกับแนวคิดลอการิทึมเชิงตัวเลขไม่ได้มาจากระดับกระบวนการ (Process) เนื่องจากความ เข้าใจแนวคิดของลอการิทึมเชิงตัวเลขเป็นการย้อนกลับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งนักเรียน ต้องมีความเข้าใจอย่างแท้จริงเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

Afgani et al. (2017) ได้ศึกษาระดับความเข้าใจคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ตามกรอบทฤษฎี APOS การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษา ระดับความเข้าใจคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ตามกรอบ ทฤษฎี APOS กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักศึกษาที่เรียนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ใน มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง จำนวน 59 คน โดยการวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ เครื่องมือที่ใช้ ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบจำนวน 4 ข้อที่สอดคล้องตามกรอบทฤษฎี APOS ซึ่งประกอบด้วย 4 ระดับ ได้แก่ ระดับ A ระดับ P ระดับ O และระดับ S ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่อยู่ใน ระดับ A กล่าวคือ นักศึกษาสามารถคำนวณและใช้ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาได้ แต่ระดับ ความเข้าใจยังไม่สามารถไปถึงระดับอื่น ๆ ได้

Karama (2021) ได้ทำการวิจัยเพื่อหามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเรื่องการหาอนุพันธ์ โดยใช้บทนิยามและใช้กรอบแนวคิดทฤษฎี APOS ในการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน การวิจัยในครั้งนี้ได้ทำการศึกษาและสำรวจความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเรื่องแคลคูลัสของนักศึกษาปีหนึ่งในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งในประเด็นการใช้บทนิยามของอนุพันธ์ จากนั้นจึงแก้ไขความเข้าใจคลาดเคลื่อนเหล่านี้โดยใช้ทฤษฎี APOS กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาปีหนึ่งจำนวน 82 คนถูกคัดเลือกตามผลการเรียนในภาคการศึกษาแรกของมหาวิทยาลัย โดยใช้การเลือกแบบเจาะจง ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบก่อนการเรียนแสดงให้เห็นถึง 5 ประเด็นเกี่ยวกับความเข้าใจคลาดเคลื่อนของนักเรียน และหลังจากมีการดำเนินการแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นตามกรอบทฤษฎี APOS และผลการทดสอบหลังการเรียนแสดงให้เห็นถึงการปรับปรุงและความก้าวหน้าในผลการเรียนของนักศึกษา ดังนั้นการแก้ไขความคลาดเคลื่อนโดยใช้ทฤษฎี APOS จึงได้รับประสิทธิภาพ

Sumaji et al. (2020) ได้ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในการแก้ปัญหตามกรอบทฤษฎี APOS การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่ออธิบายกระบวนการสื่อสารของนักเรียนมัธยมต้นในการแก้ปัญหตามกรอบทฤษฎี APOS กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนจำนวน 30 คน การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูล ได้แก่ งานปฏิบัติ (task) และแบบสัมภาษณ์ ผลการวิจัยพบว่า มีนักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์จำนวน 10 คน มีกระบวนการสื่อสารโดยใช้แผนภาพอธิบาย และมีนักเรียนจำนวน 20 คนมีกระบวนการสื่อสารโดยใช้การเขียนและการพูดเพื่ออธิบาย ผลจากการสัมภาษณ์เผยให้เห็นว่านักเรียนมีการใช้คำอธิบายที่แตกต่างกัน นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถสร้างแนวคิดแล้วนำเสนอผ่านการพูดและการเขียนได้

Daud et al. (2020) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการรับรู้ของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎี APOS การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบการรับรู้ของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และการรับรู้เหล่านี้อาจส่งผลกระทบต่อปัญหาในการทำความเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาจำนวน 200 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ แบบสอบถาม โดยการวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบการวิจัยเชิงปริมาณ เพื่อวัดการรับรู้ของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี APOS ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีการรับรู้เชิงบวกต่อวิชาคณิตศาสตร์มาก โดยแยกออกเป็น 4 ระดับตามกรอบทฤษฎี APOS ได้แก่ ระดับ A มีการรับรู้ต่อวิชาคณิตศาสตร์ คะแนนเฉลี่ย 3.9239 ระดับ P มีการรับรู้ต่อวิชาคณิตศาสตร์ คะแนนเฉลี่ย 3.9623 ระดับ O มีการรับรู้ต่อวิชาคณิตศาสตร์ คะแนน

เฉลี่ย 3.6978 และระดับ S มีการรับรู้ต่อวิชาคณิตศาสตร์ คะแนนเฉลี่ย 4.1336 โดยเทียบกับเกณฑ์คะแนนสูงสุด เฉลี่ย 5.00

Tatira (2021) ได้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่องการกระจายของอนุกรมทวินาม (Binomial series expansion) ตามกรอบทฤษฎี APOS การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาโครงสร้างทางความคิด (the mental construction) ของนักเรียน ซึ่งมีประชากรทั้งหมดจำนวน 159 คน นักเรียนจำนวน 11 คน ถูกสุ่มเป็นกลุ่มตัวอย่าง เพื่อทำการสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนสามารถตอบคำถามได้เป็นอย่างดีในระดับ A แต่ยังคงพยายามไปให้ถึงระดับ P และ O ซึ่งการพัฒนาแนวคิดที่ไปให้ถึง O นั้นสำหรับแนวคิดทางคณิตศาสตร์คือจุดที่ยากสำหรับการสอนทุกประเภท และยังเป็นจุดที่ยากที่สุดในการพัฒนาด้วย ดังนั้นการศึกษาค้างนี้ จึงเน้นย้ำถึงความสำคัญของการช่วยนักเรียนสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ระดับ O

Rahmah et al. (2022) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ตามกรอบทฤษฎี APOS การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่ออธิบายการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบทฤษฎี APOS โดยใช้รูปแบบการเรียนรู้แบบคอลบ (Kolb) การวิจัยนี้ใช้ระเบียบการวิจัยเชิงคุณภาพ มีกลุ่มเป้าหมายคือนักเรียน 4 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ แบบสอบถามเกี่ยวกับรูปแบบการเรียนรู้ของคอลบ (Kolb) แบบทดสอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ตามทฤษฎี APOS และแบบสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้าง ผลการศึกษพบว่า นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องระดับ A และระดับ P เท่านั้นตามกรอบทฤษฎี APOS เพราะฉะนั้นนักเรียนมีความผิดพลาดในการคำนวณค่าสัมบูรณ์ แม้ว่าจะมีขั้นตอนการแก้ปัญหที่แตกต่างกันออกไปก็ตาม แต่สรุปผลได้ว่านักเรียน สามารถแก้ปัญหได้ 3 ระดับได้แก่ระดับ A ระดับ P และระดับ O เท่านั้น ในขณะที่ระดับ S ยังไม่มีการแสดงออกให้เห็น

Chiew Leng and Cheng Meng (2023) ได้ศึกษาเกี่ยวกับข้อผิดพลาดของนักเรียนในการวัดการกระจาย การวิจัยนี้ใช้การวิเคราะห์คำตอบของนักเรียนจากการทำแบบทดสอบวินิจฉัยผ่านกรอบแนวคิดของทฤษฎี APOS กลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 85 คน กลุ่มตัวอย่างถูกแบ่งกลุ่มตัวอย่างออกเป็นสามกลุ่มตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของพวกเขา เพื่อให้เข้าใจถึงความยากลำบากและข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากนักเรียนที่มีระดับความเข้าใจที่แตกต่างกัน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำส่วนใหญ่มักจะอยู่ในระดับการกระทำที่แสดงให้เห็นถึงข้อผิดพลาดเชิงแนวคิดจำนวนมากจากการทำแบบทดสอบ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัยในครั้งนี้ เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภทของนักศึกษาครูในเขต ภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย
2. กรอบแนวคิดของการวิจัย
3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักศึกษาครูสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 3 จำนวน 16 คน ที่ศึกษาในหลักสูตรครุศึกษาระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ประจำภาค การศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567 ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ได้แก่ มหาวิทยาลัยจำปาสัก วิทยาลัยครูปากเซ และวิทยาลัยครูสาละวัน โดยนักศึกษาครูดังกล่าวได้ ผ่านการเรียนเนื้อหาทฤษฎีเซต ซึ่งอยู่ในรายวิชา Discrete Mathematics มาแล้ว สำหรับจำนวน นักศึกษาครูในแต่ละสถาบัน ซึ่งเป็นกลุ่มเป้าหมาย มีรายละเอียดดังนี้

มหาวิทยาลัยจำปาสัก	นักศึกษาครูจำนวน	7	คน
วิทยาลัยครูปากเซ	นักศึกษาครูจำนวน	3	คน
วิทยาลัยครูสาละวัน	นักศึกษาครูจำนวน	6	คน

กรอบแนวคิดของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้ทฤษฎี APOS ตามแนวคิดของ Dubinsky (1991) และ Chiew Leng and Cheng Meng (2023) เป็นกรอบแนวคิดของการวิจัยซึ่งแบ่งความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซตเป็น 4 ระดับดังรายละเอียดต่อไปนี้

ระดับการกระทำ (Action) เป็นระดับที่นักศึกษาสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต ได้แก่ ยูเนียน (A1) อินเตอร์เซกชัน (A2) ผลต่าง (A3) และคอมพลีเมนต์(A4) รวมทั้งการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) การดำเนินการระหว่างเซตแบบอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง (A6) และการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7)

ระดับกระบวนการ (Process) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซต ผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2)

ระดับวัตถุ (Object) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1) หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2)

ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) หรือแสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2)

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ งานปฏิบัติ (Task) เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

งานปฏิบัติที่สร้างขึ้นในการวิจัยครั้งนี้เพื่อใช้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยกำหนดคำถามเป็น 4 ประเภท ได้แก่ คำถามประเภทที่ 1 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต คำถามประเภทที่ 2 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด คำถามประเภทที่ 3 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซต และคำถามประเภทที่ 4 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคำถามการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้ ซึ่งคำถามแต่ละประเภทยังกล่าวมีรายละเอียดของข้อมูล ดังตาราง 11

ตาราง 11 คำถามในงานปฏิบัติที่ใช้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต

ประเภท คำถาม	ลักษณะคำถาม	ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี APOS														จำนวน ข้อ
		Action							Process		Object		Schema			
		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	P1	P2	O1	O2	S1	S2		
ประเภท ที่ 1	คำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต															1 ข้อ (มี 7 ข้อย่อย)
ประเภท ที่ 2	คำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด															2 ข้อ
ประเภท ที่ 3	คำถามเกี่ยวกับการแสดงเกี่ยวกับการเท่ากันของเซต															2 ข้อ
ประเภท ที่ 4	คำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้															2 ข้อ

หมายเหตุ : 1) คำถามประเภทที่ 1 ใช้ศึกษาความเข้าใจระดับการกระทำ (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7)

2) คำถามประเภทที่ 2 ใช้ศึกษาความเข้าใจระดับกระบวนการ (P1) และระดับวัตถุ (O1)

3) คำถามประเภทที่ 3 ใช้ศึกษาความเข้าใจระดับกระบวนการ (P2) ระดับวัตถุ (O2) และระดับโครงสร้างทางปัญญา (S1)

4) คำถามประเภทที่ 4 ใช้ศึกษาความเข้าใจระดับโครงสร้างทางปัญญา (S2)

งานปฏิบัติข้างต้นมีลักษณะเป็นแบบทดสอบอัตนัย โดยสร้างขึ้นภายใต้กรอบของหลักสูตรสร้างครูมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ในสาขารัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างงานปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1) ศึกษาเนื้อหาและรายวิชาจากหลักสูตรสร้างครูมัธยม ระดับปริญญาตรี เนื่องจากนักศึกษาที่เป็นกลุ่มเป้าหมาย เป็นนักศึกษาที่ผ่านการเรียนเนื้อหาเรื่องเซต (การดำเนินการระหว่างเซต) ในหลักสูตรดังกล่าวมาแล้ว นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเนื้อหาเรื่องเซต (การดำเนินการระหว่างเซต) ของหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนปลายควบคู่กันไปด้วย

2) ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991) และ Chiew Leng and Cheng Meng (2023)

3) ศึกษาวิธีการสร้างงานปฏิบัติ เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจเรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS

4) ดำเนินการสร้างงานปฏิบัติ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต จำนวน 9 ข้อ

5) นำงานปฏิบัติ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้วเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อตรวจสอบความเหมาะสมและพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

6) นำงานปฏิบัติ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทแล้วนำเสนอผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องเชิงเนื้อหา จากนั้นคัดเลือกเฉพาะข้อคำถามที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ตั้งแต่ 0.5 และนำคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไข โดยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน สำหรับงานปฏิบัติแต่ละข้อดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง ข้อคำถามมีความสอดคล้อง

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อคำถามมีความสอดคล้องหรือไม่

คะแนน -1 หมายถึง ข้อคำถามไม่มีความสอดคล้อง

7) นำงานปฏิบัติ เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซต ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้ว และคัดเลือกข้อที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง 1.00 จำนวน 7 ข้อ ได้แก่ คำถามประเภทที่ 1 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต จำนวน 1 ข้อ คำถามประเภทที่ 2 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด จำนวน 2 ข้อ คำถามประเภทที่ 3 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซต จำนวน 2 ข้อ และคำถามประเภทที่ 4 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้ จำนวน 2 ข้อ นำไปใช้กับนักศึกษากลุ่มเป้าหมายต่อไป

การเก็บรวบรวมข้อมูล

การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาคณะในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามขั้นตอนต่อไปนี้

1) ผู้วิจัยนำหนังสือขอความอนุเคราะห์เก็บข้อมูลวิจัยให้หัวหน้าหน่วยงานที่เกี่ยวข้องกับการเก็บข้อมูลวิจัยของทั้ง 3 สถาบันการศึกษา ได้แก่ มหาวิทยาลัยจำปาสัก วิทยาลัยครูปากเซ และวิทยาลัยครูสาละวัน เพื่อขออนุญาตดำเนินการเก็บข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

2) ผู้วิจัยติดต่อประสานงานกับกลุ่มเป้าหมายของแต่ละสถาบันการศึกษา เพื่อชี้แจงวัตถุประสงค์ในการทำงานปฏิบัติและบทบาทหน้าที่ของกลุ่มเป้าหมาย ซึ่งการชี้แจงดังกล่าว เพื่อให้ นักศึกษากลุ่มเป้าหมายได้ทราบถึงวัตถุประสงค์ของการทำงานปฏิบัติ

3) ผู้วิจัยนำงานปฏิบัติไปใช้กับนักศึกษากลุ่มเป้าหมายโดยผู้วิจัยจะมีผู้ช่วยวิจัยจำนวน 1 คนมาช่วยในการดำเนินการเก็บข้อมูล ซึ่งการทำงานปฏิบัติดังกล่าว จะอยู่ภายใต้การดูแลของอาจารย์ผู้รับผิดชอบในสถาบันการศึกษาแต่ละแห่ง และการทำงานปฏิบัติครั้งนี้จะเป็นการทำงานปฏิบัติตามความสมัครใจของนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย

4) หลังจากตรวจงานปฏิบัติเสร็จเรียบร้อยแล้วผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้ มาทำการวิเคราะห์เกี่ยวกับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษากลุ่มเป้าหมายต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยนี้ผู้วิจัยใช้การวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) ในการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท ของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้สถิติ ได้แก่ ร้อยละ

บทที่ 4

ผลการศึกษา

การวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท ของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว กลุ่มเป้าหมายเป็นนักศึกษาครูสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 3 จำนวน 16 คน ที่ศึกษาในหลักสูตรมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) จากมหาวิทยาลัยสามแห่งในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว การวิจัยนี้ใช้งานปฏิบัติเป็นเครื่องมือที่ใช้ศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS โดยผู้วิจัยขอนำเสนอเป็น 2 ตอน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ตอนที่ 1 จำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท

ตอนที่ 2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท

2.1 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 1

2.2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 2

2.3 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 3

2.4 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 4

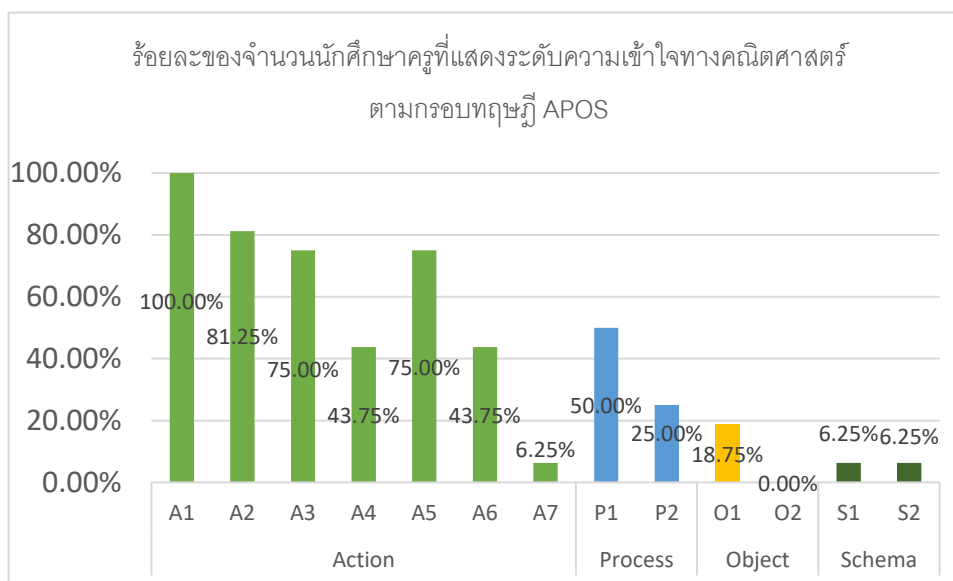
**ตอนที่ 1 จำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการ
ดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท**

จำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการ
ระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท แสดงข้อมูลดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 12 จำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการ
ระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท

ประเภท คำถาม	ลักษณะคำถาม	ร้อยละของจำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท						
		จำนวน ข้อ	ข้อ 1 (แบ่ง 7 ข้อ ย่อย)	ข้อ 2	ข้อ 2	ข้อ 2	ข้อ 2	ข้อ 2
ประเภทที่ 1 คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต	คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต	Schem	S2					1 คน (6.25%)
		Object	S1			1 คน (6.25%)		
		Object	O2			0 คน (0.00%)		
		Object	O1			3 คน (18.75%)		
		Proces	P2			4 คน (25.00%)		
		Proces	P1			8 คน (50.00%)		
		Action	A7	1 คน (6.25%)				
		Action	A6	7 คน (43.75%)				
		Action	A5	12 คน (75.00%)				
		Action	A4	7 คน (43.75%)				
		Action	A3	12 คน (75.00%)				
		Action	A2	13 คน (81.25%)				
		Action	A1	16 คน (100%)				
ประเภทที่ 2 คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต	คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต							
ประเภทที่ 3 คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต	คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต							
ประเภทที่ 4 คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต	คำถามเกี่ยวกับ เซตตามกรอบทฤษฎี การดำเนินการระหว่าง เซต							

จากข้อมูลในตาราง 12 เขียนกราฟได้ดังภาพประกอบ 5 ดังนี้



ภาพประกอบ 5 ร้อยละของจำนวนนักศึกษาครูที่แสดงระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS

จากตาราง 12 และภาพประกอบ 5 พบว่า จำนวนของนักศึกษาครูมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตในแต่ละระดับตามคำถามแต่ละประเภทดังนี้ 1) ในคำถามประเภทที่ 1 (คำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต) กรณีการดำเนินการระหว่างเซตแบบหนึ่งการดำเนินการ มีนักศึกษาครูจำนวน 16 คน (คิดเป็น 100%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน (A1) มีนักศึกษาครูจำนวน 13 คน (คิดเป็น 81.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชัน (A2) มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากผลต่าง (A3) และมีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากคอมพลีเมนต์ (A4) กรณีการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกัน ตั้งแต่สองการดำเนินการขึ้นไป พบว่า มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) มีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบการอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง (A6) และมีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7) 2) ในคำถามประเภทที่ 2 (คำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด) มีนักศึกษาครูจำนวน 8 คน (คิดเป็น 50%) ที่แสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) และมีนักศึกษาครูจำนวน 3 คน (คิด

เป็น 18.75%) ที่แสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1) 3) ในคำถามประเภทที่ 3 (คำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซต) มีนักศึกษาครูจำนวน 4 คน (คิดเป็น 25%) ที่แสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2) และมีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) และไม่มีนักศึกษาครูคนใดเลยแสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2) และ 4) ในคำถามประเภทที่ 4 (คำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้) มีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการใช้สมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2)

ตอนที่ 2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท

การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภท ของกลุ่มเป้าหมาย จำนวน 16 คน ผู้วิจัยได้ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากงานปฏิบัติเรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครูแต่ละคน ตามกรอบทฤษฎี APOS แสดงข้อมูลดังตาราง 13

ตาราง 13 (ต่อ)

ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS																
ลำดับ	ชื่อ สมมุติ	Action							Process		Object		Schema			
		คำตามประเภทที่ 1							คำตาม ประเภทที่ 2	คำตาม ประเภทที่ 3	คำตาม ประเภทที่ 2	คำตาม ประเภทที่ 3	คำตาม ประเภทที่ 3	คำตาม ประเภทที่ 4		
		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	P1	P2	O1	O2	S1	S2		
11	นะโม	✓		✓												1 6.25%
12	บอย	✓	✓	✓		✓										1 6.25%
13	ปรีนซ์	✓			✓	✓	✓									0 0.00%
14	ภาคิน	✓	✓	✓	✓	✓	✓									3 18.75%
15	พีพี	✓	✓	✓		✓										4 25.00%
16	มาวิน	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓							8 50.00%
รวม (คน)		16	13	12	7	12	7	1	8	4	3	0	1	1		6.25%

จากตาราง 13 พบว่า นักศึกษาครูทั้ง 16 คนมีระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตที่แตกต่างกัน โดยนักศึกษาครูที่มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตถึงระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) ซึ่งเป็นระดับสูงสุด ได้แก่ ต้ม (มีความเข้าใจระดับ S1) และเจได (มีความเข้าใจระดับ S2) ส่วนนักศึกษาครูที่มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตเพียงระดับการกระทำ (Action) เท่านั้นซึ่งเป็นระดับต่ำสุด ได้แก่ ชันไชน์ (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A5, A6) เท็น (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4) ธันวา (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4) นะโม (มีความเข้าใจระดับ A1, A3) บอย (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A5) ปรีนซ์ (มีความเข้าใจระดับ A1, A4, A5, A6) ภาคิน (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4, A5, A6) และพีพี (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A5, A6) ส่วนนักศึกษาครูที่มีจำนวนของระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตมากที่สุด ได้แก่ คิม (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4, A5, A6, P1, P2, O1) และเจได (มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4, A5, A6, P1, P2, S2) ส่วนนักศึกษาครูที่มีจำนวนของระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตน้อยที่สุด ได้แก่ กันต์ (มีความเข้าใจระดับ A1, P1 เท่านั้น) และนะโม (มีความเข้าใจระดับ A1, A3 เท่านั้น)

2.1 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 1

คำถามประเภทที่ 1 เป็นคำถามในงานปฏิบัติเพื่อใช้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตระดับการกระทำ (A) โดยคำถามประเภทที่ 1 จะอยู่ในคำถามข้อที่ 1 ในงานปฏิบัติ ซึ่งแบ่งออกเป็น 7 ข้อย่อย ดังนี้ ข้อย่อยที่ 1 หาเซตที่เกิดจากการยูเนียน (A1) ข้อย่อยที่ 2 หาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชัน (A2) ข้อย่อยที่ 3 หาเซตที่เกิดจากผลต่าง (A3) ข้อย่อยที่ 4 หาเซตที่เกิดจากการคอมพลีเมนต์ (A4) ข้อย่อยที่ 5 หาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) ข้อย่อยที่ 6 หาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A6) และข้อย่อยที่ 7 หาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7) สำหรับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครูในคำถามประเภทที่ 1 มีประเด็นน่าสนใจดังนี้

1) นักศึกษาครูกลุ่มที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตเพียงหนึ่งการดำเนินการเท่านั้น (ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่าง คอมพลีเมนต์) ได้แก่ กันต์ เท็น ธันวา และนะโม (ข้อมูลจากตาราง 12) จะเห็นว่านักศึกษาครูทั้ง 4 คนตอบคำถามในงานปฏิบัติไม่ถูกต้อง เมื่อให้หาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันตั้งแต่สองการดำเนินการขึ้นไป

ดังภาพประกอบ 6 (กรณีของนะโม) และภาพประกอบ 7 (กรณีของเท็น) ดังนั้นนักศึกษาครูกลุ่มนี้มีความเข้าใจระดับการกระทำไม่เกิน A4 เช่น กันต์ มีความเข้าใจระดับ A1 เท็นและอันหา มีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4 หรือนะโมมีความเข้าใจระดับ A1, A3

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

- 1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓
- 2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ ✓
- 3 $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 4 $C' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\} \setminus \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ ✓
- 5 $B \cup (A \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 6 $(C - B) \cap A = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ✓

ภาพประกอบ 6 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของนะโม

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

- 1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓
- 2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ ✓
- 3 $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 4 $C' = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ ✓
- 5 $B \cup (A \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\} \cup \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 6 $(C - B) \cap A = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ✓

ภาพประกอบ 7 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของเท็น

จากข้างต้นมีประเด็นที่น่าสนใจต่อมา คือ แม้ว่าเท็นและธันวจะสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียน (A1) อินเตอร์เซกชัน (A2) ผลต่าง (A3) คอมพลีเมนต์ (A4) ได้ถูกต้อง แต่มีประเด็นที่เป็นข้อสังเกตว่าเมื่อให้หาเซตที่เกิดจากการใช้การดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันตั้งแต่สองการดำเนินการขึ้นไป (A5, A6, A7) เท็นและธันวไม่สามารถทำได้ ส่วนนะโมสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียน (A1) และผลต่าง (A3) ได้ แต่เมื่อให้หาเซตที่เกิดจากการใช้การดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) หาเซตที่เกิดจากการใช้การดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A6) และหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7) นะโมทำไม่ได้ ดังภาพประกอบ 6 อาจเป็นเพราะว่าการหาเซตดังกล่าวได้มีการใช้การดำเนินการแบบอินเตอร์เซกชันและผลต่างรวมอยู่ด้วย ซึ่งจากการทำงานปฏิบัติของนะโมจะพบว่า นะโมไม่สามารถหาเซตที่เกิดจากการใช้การดำเนินการแบบยูเนียน และผลต่างได้ ส่วนกันต์มีลักษณะในการทำงานเดียวกับนะโม กล่าวคือ กันต์ สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียน (A1) ได้แบบเดียวเท่านั้น ส่วนการหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบอื่น ๆ กันต์ไม่สามารถทำได้ ดังภาพประกอบ 8 ดังนั้นจึงทำให้กันต์ไม่สามารถหาเซตที่เกิดจากการใช้การดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) หาเซตที่เกิดจากการใช้การดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A6) และหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7) ได้

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$

2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$

3 $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$

4 $C' = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$

5 $B \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$

6 $(C - B) \cap A = \{2, 4, 6, 8\}$

7 $(A - B') \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$

ภาพประกอบ 8 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของกันต์

2) นักศึกษาครูกลุ่มที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตหนึ่ง การดำเนินการและการดำเนินการมากกว่าหนึ่งการดำเนินการ ได้แก่ ข้าวหอม คิม เจโด แชมป์ ชันไฮน์ เดวา ต้ม บอย ปริ้นซ์ ภาคิน พีพี และมาวิน (ข้อมูลจากตาราง 12) ดังนั้นนักศึกษาครูกลุ่มนี้ จะมีความเข้าใจระดับการกระทำเกิน A4 โดยนักศึกษาครูแต่ละคนมีประเด็นที่น่าสนใจดังนี้ ในที่นี้ขอเริ่มต้นจากกรณีของนักศึกษาครูชื่อ คิม เจโด และภาคิน ทั้งสามคนมีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4 เหมือนกัน นั่นคือ ทั้งสามคนสามารถดำเนินการหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่าง และคอมพลีเมนต์ในงานปฏิบัติได้ถูกต้อง นอกจากนี้ทั้งสามคนยังมีความเข้าใจระดับ A5, A6 เหมือนกัน กล่าวคือ ทั้งสามคนสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน และหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชันได้ อย่างไรก็ตามกรณีที่เป็นการหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบร่วมกันทั้งสี่การดำเนินการ นักศึกษาครูทั้งสามคนดังกล่าวตอบคำถามในงานปฏิบัติไม่ถูกต้อง ดังภาพประกอบ 9 (ในที่นี้ขอแสดงกรณีของคิม) ทั้ง ๆ ที่ทั้งสามคนเคยหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่าง และคอมพลีเมนต์ในงานปฏิบัติได้ ตรงนี้ถือว่าเป็นประเด็นที่น่าสนใจ

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ $C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

- 1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓
- 2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ ✓
- 3 $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 4 $C' = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ ✓
- 5 $B \cup (A \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ✓
- 6 $(C - B) \cap A = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{1, 3, 5\}$ ✗

ภาพประกอบ 9 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของคิม

ส่วนกรณีของนักศึกษาครูชื่อ มาวิน จะมีลักษณะคล้ายกับของคิม เจโด และภาคิน กล่าวคือ มาวินมีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3, A4 แต่ถ้าเกินระดับ A4 มาวินจะมีความ

เข้าใจระดับ A5, A7 นั่นคือ มาวินสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียน ร่วมกับอินเตอร์เซกชัน และหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบร่วมกันของผลต่าง คอมพลีเมนต์ ยูเนียน และอินเตอร์เซกชันได้ แต่กรณีการหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชัน มาวินจะตอบคำถามในงานปฏิบัติไม่ถูกต้อง ดังภาพประกอบ 10

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

- 1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓
- 2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ ✓
- 3 $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓
- 4 $C' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓
- 5 $B \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓
- 6 $(C - B) \cap A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ✗
- 7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ ✓

ภาพประกอบ 10 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของมาวิน

สำหรับกรณีของนักศึกษาครูชื่อ ต้มและชันไนน์ ทั้งสองคนมีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3 เหมือนกัน นั่นคือ ทั้งสองคนสามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และผลต่างในงานปฏิบัติได้ถูกต้อง และทั้งสองคนยังมีความเข้าใจระดับ A5, A6 เหมือนกัน กล่าวคือ ทั้งสองคนสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน และหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชันได้ อย่างไรก็ตามกรณีที่เป็นกรณิการหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบร่วมกันทั้งสี่การดำเนินการ (A7) นักศึกษาครูทั้งสองคนดังกล่าวตอบคำถามในงานปฏิบัติไม่ถูกต้อง ดังภาพประกอบ 11 (ในที่นี้ขอแสดงกรณีของต้ม) อาจเป็นเพราะว่าทั้งสองคนไม่เข้าใจการหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบคอมพลีเมนต์ (A4)

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

$$1 \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

$$2 \quad A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$3 \quad A - B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$4 \quad C' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$5 \quad B \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$$

$$6 \quad (C - B) \cap A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$7 \quad (A - B') \cup (C \cap A)' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

ภาพประกอบ 11 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของเต็ม

สำหรับกรณีของนักศึกษาครูชื่อ แซมป์ บอย และพีพี ทั้งสามคนมีความเข้าใจระดับ A1, A2, A3 เหมือนกัน กล่าวคือ ทั้งสามคนสามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่างในงานปฏิบัติได้ถูกต้อง นอกจากนี้ทั้งสามคนยังมีความเข้าใจระดับ A5 เหมือนกัน กล่าวคือ ทั้งสามคนสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชันได้ อย่างไรก็ตามกรณีที่เป็นการหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบร่วมกันทั้งสี่การดำเนินการ (A7) อาจเป็นเพราะว่าทั้งสามคนไม่เข้าใจการหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบคอมพลีเมนต์แต่มีประเด็นที่น่าสนใจ คือ แซมป์ บอย และพีพีไม่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชันได้ (A6) ดังภาพประกอบ 12 (ในที่นี้ขอแสดงกรณีของแซมป์) ทั้ง ๆ ที่ทั้งสามคนเคยหาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชัน และผลต่างได้

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓

2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ ✓

3 $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓

4 $C' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ✗

5 $B \cup (A \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 0, 2, 4, 6, 8\}$ ✓

6 $(C - B) \cap A = \{1, 3, 5, 7\}$ ✗

7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{1, 3, 5\}$ ✗

ภาพประกอบ 12 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของแซมบี

สำหรับกรณีของนักศึกษาครูชื่อ ปรีนซ์ มีความเข้าใจระดับ A1 และ A4 กล่าวคือ ปรีนซ์ สามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียนและคอมพลิเมนต์ในงานปฏิบัติได้ถูกต้อง แต่มีประเด็นที่เป็นข้อสังเกต คือ แม้ว่าปรีนซ์จะไม่สามารถหาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชัน (A2) และผลต่าง (A3) ในงานปฏิบัติได้ แต่ปรีนซ์สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) และหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A6) ในงานปฏิบัติได้ถูกต้อง ดังภาพประกอบ 13 นั่นคือ ปรีนซ์มีความเข้าใจระดับ A5 และ A6 ด้วย

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

1 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ✓

2 $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ ✗

3 $A - B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ ✗

4 $C' = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ ✓

5 $B \cup (A \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ✓

6 $(C - B) \cap A = \{6, 2, 4, 8\}$ ✓

7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{2, 4, 6, 8\}$ ✗

ภาพประกอบ 13 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของปรีนซ์

ส่วนกรณีของนักศึกษาครูชื่อ เดวา มีความเข้าใจระดับ A1 และ A2 กล่าวคือ เดวา สามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียนและอินเตอร์เซกชันในงานปฏิบัติได้ถูกต้อง นอกจากนี้เดวายังมีความเข้าใจระดับ A5 ด้วย กล่าวคือ เดวาสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน แต่มีประเด็นที่เป็นข้อสังเกต คือ แม้ว่าเดวาไม่สามารถหาเซตที่เกิดจากการคอมพลีเมนต์(A4) และผลต่าง (A3) ในงานปฏิบัติได้ แต่เดวาสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบผลต่างร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A6) ได้ ดังภาพประกอบ 14 นั่นคือ เดวามีความเข้าใจระดับ A6 ด้วย

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ

$C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

1 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ✓

2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ ✓

3 $A - B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ✗

4 $C' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ✗

5 $B \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ ✓

6 $(C - B) \cap A = \{2, 4, 6, 8\}$ ✓

7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ✗

ภาพประกอบ 14 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของเดวา

และกรณีของนักศึกษาครูชื่อ ข้าวหอม มีความเข้าใจระดับ A1 และ A2 กล่าวคือ ข้าวหอมสามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียนและอินเตอร์เซกชันในงานปฏิบัติได้ถูกต้อง และข้าวหอมยังมีความเข้าใจระดับ A5 ด้วย กล่าวคือ ข้าวหอมสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน ดังภาพประกอบ 15

- 1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ $C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

1 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$

2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$

3 $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$

4 $C' = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$

5 $B \cup (A \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 0, 2, 4, 6, 8\}$

6 $(C - B) \cap A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

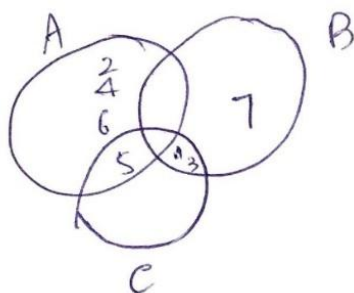
ภาพประกอบ 15 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 1 คำถามข้อที่ 1 ของข้าวหอม

2.2 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 2

คำถามประเภทที่ 2 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดเพื่อใช้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับกระบวนการ (P) หรือระดับวัตถุ (O) กล่าวคือ เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) หรือแสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1) ตามลำดับ โดยคำถามประเภทที่ 2 ประกอบด้วยคำถาม 2 ข้อ ได้แก่ คำถามข้อที่ 2 และคำถามข้อที่ 3 ในงานปฏิบัติ สำหรับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครูในคำถามประเภทที่ 2 มีประเด็นน่าสนใจดังนี้

1) นักศึกษาครูกลุ่มที่แสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) หรือมีความเข้าใจระดับ P1 ได้แก่ กันต์ มาวิน คิม ต้ม ข้าวหอม เจได แซมป์และเดวา (ข้อมูลจากตาราง 12) โดยนักศึกษาครูแต่ละคนมีประเด็นที่น่าสนใจดังนี้ ในที่นี้ขอเริ่มต้นจากกรณีของนักศึกษาครูชื่อ กันต์และมาวิน โดยทั้งสองคนได้แสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดผ่านแผนภาพ เวนน์ - ออยเลอร์อย่างเดียวกันเท่านั้น ดังภาพประกอบ 16 (ในที่นี้ขอแสดงกรณีของมาวิน) ซึ่งการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดดังกล่าว นักศึกษาครูได้ใช้วิธีเขียนสมาชิกของเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดลงในแผนภาพเวน - ออยเลอร์ เพื่อให้ได้เซต $(A \cup B) \cap C$ ตามที่โจทย์ต้องการ

2) กำหนดให้ $A - B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหา
 $(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$

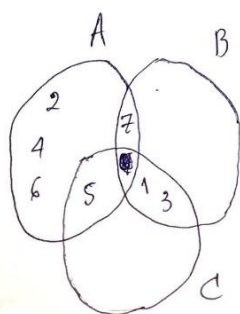


ภาพประกอบ 16 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 2 ของมาวิน

ส่วนกรณีนี้นักศึกษาครูชื่อ คิม จะมีลักษณะคล้ายกับกรณีของกันต์และมาวิน คือ มีการใช้แผนภาพ เวนน์ - ออยเลอร์ประกอบ แต่กรณีของคิมจะมีเพิ่มเติม คือ มีการเขียนอธิบายเพิ่มขึ้นมาด้วย คิมจะมีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้อีกครั้งหนึ่ง ดังภาพประกอบ 17 และคิมได้เขียนเพิ่มว่า $(A \cup B) \cap C = ?$ แสดงว่าคิมเข้าใจในประเด็นที่โจทย์ต้องการให้หา จากนั้นคิมได้เขียน $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5\}$ และเขียน $(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$ ตามลำดับ ซึ่งคำตอบที่คิมได้นั้นถูกต้อง แต่ประเด็นอยู่ที่การหาเซต C ซึ่งเมื่อพิจารณาการเขียนของคิม จะพบว่าคิมหาเซต C โดยการพิจารณาสมาชิกของ $A \cap C$ และ $B \cap C$

2) กำหนดให้ $A - B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหา $(A \cup B) \cap C$

~~$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$~~
 ~~$(A \cup B) \cap C$~~
 $A - B = \{2, 4, 6\}$
 $A \cap C = \{5\}$
 $B \cap C = \{1, 3\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 จงหา $(A \cup B) \cap C = ?$
 $\therefore (A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5\}$
 $\Rightarrow (A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$ เพราะ $C = \{1, 3, 5\}$
 ดังนั้น, $(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$, สรุป: หาของ C ได้มาจาก $A \cap C$ และ $B \cap C$



ภาพประกอบ 17 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 2 ของคิม

และส่วนกรณีนักศึกษาครูชื่อ ต้ม ข้าวหอม เจได เดวา และแซมปี จะมีลักษณะคล้ายกับกรณีของคิม แต่จะมีความแตกต่างจากของคิม ตรงที่ว่า ต้ม ข้าวหอม เจได เดวา และแซมปี ไม่ได้มีการใช้แผนภาพ เวนน์ - ออยเลอร์ประกอบ แต่จะใช้วิธีการเขียนอธิบายเพียงอย่างเดียว ดังภาพประกอบ 18 (ในที่นี้ขอแสดงกรณีของต้ม) โดยทั้งนักศึกษาครูทั้งห้าคนดังกล่าวจะมีการเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้อีกครั้งหนึ่ง และได้เขียนเพิ่มว่า $(A \cup B) \cap C = ?$ แสดงว่านักศึกษาครูทั้งห้าคนเข้าใจในประเด็นที่โจทย์ต้องการให้หา จากนั้นได้เขียน $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5\}$ และเขียน $(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$ ตามลำดับ ซึ่งคำตอบที่นักศึกษาครูดังกล่าวได้นำนั้นถูกต้อง แต่ประเด็นอยู่ที่การหาเซต C ซึ่งเมื่อพิจารณาการเขียนของนักศึกษาครูทั้งห้าคนดังกล่าว จะพบว่านักศึกษาครูหาเซต C โดยการพิจารณาสมาชิกของ $A \cap C$ และ $B \cap C$

2) กำหนดให้ $A - B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหา

$$(A \cup B) \cap C$$

2.66. Given $A - B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$
 $\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

၃၀၇၁၇၁: $(A \cup B) \cap C = ?$

အနာဂတ်: $(A \cup B) \cap C = ?$
 ခုနစ်: $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5\}$

$$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$$

ឡើងវិញ, $(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5\}$. ឡើងវិញ 299 C 1 ត្រឹមត្រូវ
 $A \cap C$ ឬ $B \cap C$.

ภาพประกอบ 18 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 2 ของตั้ม

2) นักศึกษาคณิตศาสตร์ที่แสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1) หรือมีความเข้าใจระดับ O1 ได้แก่ คิม แซมป์ และตั้ม โดยทั้งสามคนได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้อีกครั้งหนึ่ง และได้เขียนเพิ่มว่า $B = ?$ แสดงว่านักศึกษาคณิตศาสตร์ดังกล่าวเข้าใจในสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา ดังภาพประกอบ 19 (ในที่นี้ขอแสดงกรณีของคิม) จากนั้นพวกเขาหาเซต A โดยใช้สมบัติที่ว่า $A = U - (U - A)$ ทำให้ได้ $A = \{1, 4, 5, 8, 9, 10\}$ สำหรับวิธีการหาเซต B พวกเขาใช้สมบัติที่ว่า $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $(A \cap B) = \{1, 9\}$ ส่วน $B - A$ ได้มาจากการพิจารณาสมาชิกของ $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ และสมาชิกของ $A = \{1, 4, 5, 8, 9, 10\}$ ทำให้ได้ว่า $B - A = \{2, 5\}$ ดังนั้น $B = \{1, 9\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 5, 9\}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

3) กำหนดให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ถ้า $A \cap B = \{1, 9\}$,

$(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ และ $U - A = \{2, 5, 6, 7\}$ จงหา B

$$\begin{aligned} \text{จ: } U &= \{1, 2, 3, \dots, 10\} \\ A \cap B &= \{1, 9\} \\ (A - B) \cup (B - A) &= \{2, 4, 5, 8, 10\} \\ U - A &= \{2, 5, 6, 7\} \\ \# \text{ จงหา } B \\ \text{จ: } A &= \{1, 4, 3, 8, 9, 10\} \\ \text{เพราะ } U - A &= \{2, 5, 6, 7\} \text{ ซึ่งไม่มี } A \text{ และ } A \text{ ไม่อยู่ใน } U \\ A &= U - (U - A) = \{1, 3, 4, 8, 9, 10\} \\ \text{หา } B \text{ จาก } B &= (A \cap B) \cup (B - A) \\ B &= \{1, 9\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 5, 9\} \\ B &= \{1, 2, 5, 9\} \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 19 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 2 คำถามข้อที่ 3 ของคิม

2.3 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 3

คำถามประเภทที่ 3 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซตเพื่อใช้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับกระบวนการ (P) หรือระดับวัตถุ (O) หรือระดับโครงสร้างทางปัญญา (S) กล่าวคือเป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2) หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2) หรือแสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) ตามลำดับ โดยคำถามประเภทที่ 3 ประกอบด้วยคำถาม 2 ข้อ ได้แก่ คำถามข้อที่ 4 และคำถามข้อที่ 5 ในงานปฏิบัติ สำหรับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครูในคำถามประเภทที่ 3 มีประเด็นที่น่าสนใจดังนี้

1) นักศึกษาครูกลุ่มที่แสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2) หรือมีความเข้าใจระดับ P2 ได้แก่ คิม เจโด แทมปี และข้าวหอม (ข้อมูลจากตาราง 12) โดยนักศึกษาครูแต่ละคนมีประเด็นที่น่าสนใจดังนี้ ในที่นี้ขอเริ่มต้นจากกรณีของนักศึกษาครูชื่อ คิม ในคำถามข้อที่ 4 คิมได้กำหนดเซตสามเซตที่ตนเองคิด

ขึ้นมา ดังนี้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{4, 5\}$ และเขียนว่า พิสูจน์
 $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ จากนั้นคิมได้ดำเนินการหาเซต $A - (B - C)$ ซึ่งได้ว่า
 $A - (B - C) = \{1, 4, 5\}$ ในทำนองเดียวกันคิมได้ดำเนินการหาเซต $A \cap (B' \cup C)$ ซึ่งได้ว่า
 $A \cap (B' \cup C) = \{1, 4, 5\}$ จากนั้นคิมได้ทำการสรุปว่า $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ เป็นจริง ดัง
 ภาพประกอบ 20 ประเด็นนี้เห็นได้ชัดว่าคิมกำลังใช้วิธีการยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าเซต
 $A - (B - C)$ เท่ากับเซต $A \cap (B' \cup C)$ ส่วนในกรณีของคำถามข้อที่ 5 คิมได้แสดงในทำนอง
 เดียวกับคำถามข้อที่ 4 คือ ใช้วิธีการยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าเซต $(A \cup B)' \cap C$ เท่ากับเซต
 $C - (A \cup B)$ ดังภาพประกอบ 21 ส่วนกรณีของนักศึกษาครูชื่อ แซมป์ และข้าวหอม ในคำถาม
 ข้อที่ 5 ได้แสดงออกในทำนองเดียวกันกับกรณีของคิม กล่าวคือ แซมป์ และข้าวหอม กล่าวคือ
 กำหนดเซตสามเซตขึ้นมาแล้วใช้การยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่า $(A \cup B)' \cap C$ เท่ากับเซต
 $C - (A \cup B)$

4) จักรกวดสอบว่า $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ เป็นจริงหรือไม่

สมมติให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $B = \{2, 3, 4\}$
 $C = \{4, 5\}$
 พิสูจน์ $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$
 $B - C = \{x/x \in B, x \notin C\} = \{2, 3\}$ ✓
 $A - (B - C) = \{x/x \in A, x \notin (B - C)\} = \{1, 4, 5\}$ ✓
 $\Leftrightarrow A \cap (B' \cup C)$
 พหุ B'
 $B' = \{x/x \notin B\} = \{1, 5\}$
 $B' \cup C = \{1, 5\} \cup \{4, 5\} = \{1, 4, 5\}$
 ดังนั้น, $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ เป็นจริง ✓

ภาพประกอบ 20 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 4 ของคิม

5) จงตรวจสอบว่า $(A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B)$ เป็นจริงหรือไม่

วิธี : สมมติให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$U = A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A - B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B - A = \{0, 9\}$$

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 0, 9\}$$

$$(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4, 6, 8, 0, 9\}$$

$$(A \cup B)' = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$(A \cup B)' \cap C =$$

$$\text{หรือ } (A \cup B)' = \{1, 3, 5, 7\} \quad \text{และ } C = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$(A \cup B)' \cap C = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C - (A \cup B) = \{2, 4, 6, 8\} - \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$$

$$C - (A \cup B) = \emptyset$$

$$\text{ดังนั้น } (A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B) \text{ เป็นจริง}$$

ภาพประกอบ 21 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 5 ของคิม

และกรณีนักศึกษาครูชื่อ เจได ในคำถามข้อที่ 5 เจไดได้กำหนดเซตสามเซตที่ตนเองคิดขึ้นมา ดังนี้ $A = 1, 2$ $B = 3, 4$ $C = 2, 3, 5$ ซึ่งในเชิงการเขียนอาจจะไม่ถูกต้อง จากนั้นเจไดได้ดำเนินการหาเซต $A \cap (B' \cup C)$ ทำให้ได้ว่า $A \cap (B' \cup C) = \{5\}$ ในทำนองเดียวกันเจไดได้ดำเนินการหาเซต $C - (A \cup B)$ ซึ่งได้ว่า $C - (A \cup B) = \{5\}$ จากนั้นเจไดได้ทำการสรุปว่า $(A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B)$ เป็นจริง ดังภาพประกอบ 22 ประเด็นนี้เห็นได้ชัดว่าเจไดกำลังใช้วิธีการยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าเซต $A \cap (B' \cup C)$ เท่ากับเซต $C - (A \cup B)$

5) จักรวาลสอบว่า $(A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B)$ เป็นจริงหรือไม่

$$\text{ตัวอย่าง: } \Omega = A = \{1, 2\} \\ B = \{3, 4\} \\ C = \{2, 3, 5\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' \cap C$$

$$\text{ท. } A \cup B = \Omega$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(A \cup B)' \cap C = \{5\}$$

$$\Rightarrow C - (A \cup B) =$$

$$C - (A \cup B) = \{5\}$$

$$\text{ดังนั้น } (A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B) \text{ เป็นจริง.}$$

ภาพประกอบ 22 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 5 ของเจได

2) นักศึกษาครูกลุ่มที่แสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) หรือมีความเข้าใจระดับ S1 ได้แก่ ตั้ม (ข้อมูลจากตาราง 12) ในคำถามข้อที่ 5 ตั้มได้แสดงการพิสูจน์ $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ โดยแนวคิดในการพิสูจน์ของตั้มแบ่งเป็นสองขั้น ขั้นแรกตั้มเริ่มจากการพิจารณาความหมายของ $A - (B - C)$ โดยใช้บทนิยามของผลต่างหรือสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต แล้วดำเนินการพิสูจน์จนกระทั่งได้ว่า $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ ส่วนในขั้นที่สองตั้มพิจารณาความหมายของ $A \cap (B' \cup C)$ โดยใช้บทนิยามของอินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์และยูเนียน รวมทั้งสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต แล้วดำเนินการพิสูจน์จนกระทั่งได้ว่า $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ ดังภาพประกอบ 23 อย่างไรก็ตามในแง่การเขียนพิสูจน์ของตั้มอาจจะไม่ถูกต้องหรือสมบูรณ์มากนัก

4) จึงทดสอบว่า $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ เป็นจริงหรือไม่

ข้อแรก.

4. * ข้อแรก. พิสูจน์ว่า $A - (B - C)$ จะได้:

จาก $B - C = x \in B / x \notin C$ หมายความว่า $B - A$ คือสมาชิกของ B ที่ไม่อยู่ใน C

ดังนั้น $A - (B - C)$ คือ: $x \in A / x \notin (B - C)$, หมายความว่า

$A \cap x \notin B$ หรือ $x \in C$

ดังนั้น, $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$

+ พิสูจน์: $A \cap (B' \cup C)$ จะได้:

จาก $B' = U - B$ คือสมาชิกที่ไม่อยู่ใน B .

$B' \cup C = x \in B' \cup x \in C$, หมายความว่าสมาชิกที่ไม่อยู่ใน B หรืออยู่ใน C

ดังนั้น $A \cap (B' \cup C) = A \cap (B' \cup C) = x \in A / x \notin B$ หรือ $x \in C$

เพราะฉะนั้น, $A - (B - C) = x \in A / x \notin B$ หรือ $x \in C$

$A \cap (B' \cup C) = x \in A / x \notin B$ หรือ $x \in C$

ดังนั้น, $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ เป็นจริง.

ภาพประกอบ 23 การทำงานปฏิบัติของคำถามประเภทที่ 3 คำถามข้อที่ 5 ของเต็ม

3) นักศึกษาครูกลุ่มที่แสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2) หรือมีความเข้าใจระดับ O2 ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่า ไม่มีนักศึกษาครูคนใดที่มีความเข้าใจอยู่ในระดับดังกล่าวนี้ (ข้อมูลจากตาราง 12)

2.4 ผลการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามประเภทที่ 4

คำถามประเภทที่ 4 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้เพื่อใช้ศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับโครงสร้างทางปัญญา (S) กล่าวคือเป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2) โดยคำถามประเภทที่ 4 ประกอบด้วยคำถาม 2 ข้อ ได้แก่ คำถามข้อที่ 6 และคำถามข้อที่ 7 ในงานปฏิบัติ สำหรับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครูในคำถามประเภทที่ 4 มีประเด็นน่าสนใจดังนี้

นักศึกษาครูกลุ่มที่แสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2) หรือมีความเข้าใจระดับ S2 ได้แก่ เจได (ข้อมูลจาก

ตาราง 12) ในคำถามข้อที่ 6 เริ่มต้นแก้ปัญหาเจไดได้กำหนดตัวอักษรภาษาอังกฤษแทนเซตของนักเรียนกลุ่มต่างๆ ดังนี้ ให้ P แทนเซตของนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ M แทนเซตของนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และ E แทนเซตของนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาอังกฤษ จากนั้นได้เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ดังนี้ $P = 80, M = 60, E = 40, P \cap M \cap E = 10, P - (M \cap E) = 20, M - (P \cup E) = 30, E \subseteq P$ โดยมีนักเรียนทั้งหมด 110 คน นั้นแสดงว่าเจไดกำลังพยายามทำความเข้าใจปัญหาผ่านบทนิยามโดยเขียนออกมาในรูปประโยคเชิงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ จากนั้นเจไดได้แทนค่าด้วยจำนวนในประโยคสัญลักษณ์ดังกล่าวซึ่งได้เป็น $110 = 80 + 60 + 40 - |P \cap M| - |P \cap E| - |M \cap E| + 10$ แสดงให้เห็นว่าเจไดมีความสามารถในการเลือกใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปใช้แก้ปัญหา หลังจากทำการคำนวณทำให้เจไดได้ว่า $|P \cap M| + |P \cap E| + |M \cap E| = 80$ ต่อมาจากที่โจทย์กำหนดให้เจไดทราบว่า $E \subseteq P$ ทำให้ได้ว่า $|P \cap E| = |E| = 40$ จากนั้นเจไดได้พิจารณาค่าของ $|P \cap M|$ โดยเจไดเลือกสมบัติที่ว่า $|P \cap M| = |P \cap M - E| + |P \cap M \cap E|$ เพราะรู้ว่า $P \cap M \cap E = 10$ แต่ยังไม่ทราบค่าของ $|P \cap M - E|$ จึงกำหนดตัวแปร x แล้วเขียนสมการใหม่เป็น $|P \cap M| = x + 10$ จากนั้นนำ $|P \cap M| = x + 10$ แทนลงในสมการ $|P \cap M| + |P \cap E| + |M \cap E| = 80$ ที่เขียนไว้ข้างต้น ทำให้ได้ว่า $(x + 10) + 40 + |M \cap E| = 80$ หรือได้เป็น $x + |M \cap E| = 30$ จากนั้นเจไดได้เขียนบอกว่าต้องการหาความน่าจะเป็น โดยเขียนสูตรดังนี้ $P(M \cup E) = \frac{|M \cup E|}{|P \cup M \cup E|}$ อย่างไรก็ตามจากสูตรดังกล่าวปัญหาที่ตามมาคือ เจไดยังไม่ทราบค่าของ $|M \cup E|$ เจไดจึงใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า $|M \cup E| = |M| + |E| - |M \cap E|$ จากนั้นแทนค่าด้วยจำนวนทำให้ได้สมการใหม่เป็น $|M \cup E| = 60 + 40 - |M \cap E| = 100 - |M \cap E|$ หรือ $|M \cup E| = 100 - |M \cap E|$ จากสมการดังกล่าวเจไดต้องหาค่าของ $|M \cap E|$ หลังจากการคำนวณพบว่าค่าของ $|M \cap E|$ ต้องมีค่าน้อยกว่า 30 แน่ๆ ซึ่งที่ถูกต้องคือ $|M \cap E| = 10$ แต่เจไดได้ $|M \cap E| = 30$ สุดท้ายอย่างไรก็แล้วแต่เจไดได้ทำการคำนวณแล้วพบว่า $|M \cup E| = 100 - 30 = 70$ ซึ่งที่ถูกต้องควรได้ว่า $|M \cup E| = 100 - 10 = 90$ ดังนั้นการแก้ปัญหานี้ทำให้เจไดคำตอบคือ $P(M \cup E) = \frac{70}{110}$ ซึ่งไม่ถูกต้อง ดังภาพประกอบ 24 ซึ่งคำตอบที่ถูกต้องของโจทย์ปัญหานี้คือ $P(M \cup E) = \frac{90}{110}$ จากการแก้ปัญหาข้างต้นเห็นได้ว่าเจไดมีความพยายามอย่างมากในการแก้ปัญหา เขาพยายามเลือกใช้สูตรหรือสมบัติต่างๆ ที่เขารู้เกี่ยวกับเซตและความน่าจะเป็นมาแก้ปัญหา แต่อาจมีความ

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่องการศึกษาในระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยดังต่อไปนี้

ความมุ่งหมายและวิธีการดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายการวิจัย

เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ในคำถามแต่ละประเภทของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

วิธีการดำเนินการวิจัย

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 3 จำนวน 16 คน ที่ศึกษาในหลักสูตรครุมัธยม ระดับปริญญาตรี (ฉบับปรับปรุง 2019) ประจำภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2567 ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ได้แก่ มหาวิทยาลัยจำปาสัก วิทยาลัยครูปากเซ และวิทยาลัยครูสาละวัน โดยนักศึกษาครูดังกล่าวได้ผ่านการเรียนเนื้อหาทฤษฎีเซตซึ่งอยู่ในรายวิชา Discrete Mathematics มาแล้ว สำหรับจำนวนนักศึกษาครูในแต่ละสถาบัน ซึ่งเป็นกลุ่มเป้าหมายมีรายละเอียดดังนี้

มหาวิทยาลัยจำปาสัก	นักศึกษาครูจำนวน	7	คน
วิทยาลัยครูปากเซ	นักศึกษาครูจำนวน	3	คน
วิทยาลัยครูสาละวัน	นักศึกษาครูจำนวน	6	คน

กรอบแนวคิดการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้ทฤษฎี APOS ตามแนวคิดของ Dubinsky (1991) และ Chiew Leng and Cheng Meng (2023) เป็นกรอบแนวคิดของการวิจัยซึ่งแบ่งความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตเป็น 4 ระดับ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ระดับการกระทำ (Action) เป็นระดับที่นักศึกษาสามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต ได้แก่ ยูเนียน (A1) อินเตอร์เซกชัน (A2) ผลต่าง (A3) และคอมพลีเมนต์ (A4) รวมทั้งการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียน

ร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) การดำเนินการระหว่างเซตแบบอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง (A6) และการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7)

ระดับกระบวนการ (Process) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซต ผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2)

ระดับวัตถุ (Object) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1) หรือแสดงการใช้สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2)

ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) เป็นระดับที่นักศึกษาแสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) หรือแสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2)

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาคูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ผู้วิจัยใช้เครื่องมือในการวิจัย คือ งานปฏิบัติ (Task) เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต

การเก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัย

การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาคูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ผู้วิจัยนำหนังสือขอความอนุเคราะห์เก็บข้อมูลวิจัยให้หัวหน้าหน่วยงานที่เกี่ยวข้องกับการเก็บข้อมูลวิจัยของทั้ง 3 สถาบันการศึกษาได้แก่ มหาวิทยาลัยจำปาสัก วิทยาลัยครูปากเซ และวิทยาลัยครูสาละวัน เพื่อขออนุญาตดำเนินการเก็บข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย
2. ผู้วิจัยติดต่อประสานงานกับกลุ่มเป้าหมายของแต่ละสถาบันการศึกษา เพื่อชี้แจงวัตถุประสงค์ในการทำงานปฏิบัติและบทบาทหน้าที่ของกลุ่มเป้าหมาย ซึ่งการชี้แจงดังกล่าวเพื่อให้ นักศึกษากลุ่มเป้าหมายได้ทราบถึงวัตถุประสงค์ของการทำงานปฏิบัติ
3. ผู้วิจัยนำงานปฏิบัติไปใช้กับนักศึกษากลุ่มเป้าหมายโดยผู้วิจัยมีผู้ช่วยวิจัยจำนวน 1 คนมาช่วยในการดำเนินการเก็บข้อมูล ซึ่งการทำงานปฏิบัติดังกล่าวอยู่ภายใต้การดูแลของอาจารย์ผู้รับผิดชอบในสถาบันการศึกษาแต่ละแห่ง และการทำงานปฏิบัติครั้งนี้เป็นการทำงานปฏิบัติตามความสมัครใจของนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย

4. หลังจากกลุ่มเป้าหมายทำงานปฏิบัติเสร็จแล้วผู้วิจัยทำการตรวจงานปฏิบัติของนักศึกษา กรณีที่พบว่าการเขียนคำตอบหรือแสดงวิธีทำของนักศึกษาไม่ชัดเจน ผู้วิจัยทำการสัมภาษณ์นักศึกษากลุ่มนั้นเพื่อให้ได้มาซึ่งข้อมูลที่ชัดเจนเพื่อนำไปวิเคราะห์ต่อไป

5. หลังจากตรวจงานปฏิบัติเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้มาทำการวิเคราะห์เกี่ยวกับระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษากลุ่มเป้าหมายต่อไป

สรุปผลการวิจัย

การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว สรุปผลการวิจัยดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. ในคำถามประเภทที่ 1 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต

กรณีที่เป็นการดำเนินการระหว่างเซตแบบหนึ่งการดำเนินการ มีนักศึกษาครูจำนวน 16 คน (คิดเป็น 100%) สามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน (A1) มีนักศึกษาครูจำนวน 13 คน (คิดเป็น 81.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชัน (A2) มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากผลต่าง (A3) และมีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการคอมพลีเมนต์(A4) กรณีที่เป็นการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันตั้งแต่สองการดำเนินการขึ้นไป พบว่า มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) มีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบการอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง (A6) และมีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7)

2. ในคำถามประเภทที่ 2 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด

มีนักศึกษาครูจำนวน 8 คน (คิดเป็น 50%) ที่แสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1)และมีนักศึกษาครูจำนวน 3 คน (คิดเป็น 18.75%) ที่แสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1)

3. ในคำถามประเภทที่ 3 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซต

มีนักศึกษาครูจำนวน 4 คน (คิดเป็น 25%) ที่แสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2) และมีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการพิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) และไม่มีนักศึกษาครูคนใดเลยแสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2)

4. ในคำถามประเภทที่ 4 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้

มีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2)

อภิปรายผลการวิจัย

จากการศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาครูในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ในคำถามแต่ละประเภท ซึ่งผลการวิจัยจากการวิเคราะห์เชิงเนื้อหาสามารถสรุปได้ดังนี้

1. จากผลสรุปการวิจัยข้อที่ 1 ข้างต้น ในคำถามประเภทที่ 1 กรณีการดำเนินการระหว่างเซตแบบหนึ่งการดำเนินการ ที่พบว่า มีนักศึกษาครูจำนวน 16 คน (คิดเป็น 100%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการยูเนียน (A1) มีนักศึกษาครูจำนวน 13 คน (คิดเป็น 81.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการอินเตอร์เซกชัน (A2) มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากผลต่าง (A3) และมีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการคอมพลีเมนต์(A4) จากผลการวิจัยดังกล่าวนี้ สามารถสรุปได้ว่า นักศึกษาครูส่วนใหญ่อาจมองว่าแนวคิดการของการยูเนียนเป็นแนวคิดที่ง่ายที่สุด ส่วนแนวคิดการอินเตอร์เซกชันและการหาผลต่างอาจเป็นแนวคิดที่ง่ายรองลงมา ตามลำดับ ส่วนแนวคิดการคอมพลีเมนต์อาจเป็นแนวคิดที่ยาก ซึ่งสอดคล้องกับ Doruk and Çiltaş (2020) ที่กล่าวว่า นักศึกษาจะมีความเข้าใจบทนิยามและตัวอย่างเกี่ยวกับยูเนียนและอินเตอร์เซกชันได้ดีแต่นักศึกษายังมีความสับสนแนวคิดเกี่ยวกับการคอมพลีเมนต์และสอดคล้องกับผลการวิจัยของ ยงยศ พุทธิให้ (2543) ที่พบว่า ผู้เรียนที่มีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดเกี่ยวกับการคอมพลีเมนต์มีจำนวนมากกว่าผู้เรียนที่มีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดเกี่ยวกับการยูเนียนและการอินเตอร์เซกชัน สำหรับกรณีที่เป็นการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันตั้งแต่สองการดำเนินการขึ้นไป ซึ่งพบว่า มีนักศึกษาครูจำนวน 12 คน (คิดเป็น 75%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) มีนักศึกษาครูจำนวน 7 คน (คิดเป็น 43.75%) ที่สามารถ

หาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตแบบการอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง (A6) และมี นักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่สามารถหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซต ร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7) ในประเด็นดังกล่าวนี้สามารถอธิบายได้ว่า เป็นไปได้ว่าเมื่อมี การใช้การดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันตั้งแต่สองการดำเนินการขึ้นไปอาจทำให้โจทย์มีความ ซับซ้อนขึ้นหรือมีความยากขึ้น จากข้อมูลข้างต้นเห็นได้ชัดว่านักศึกษาครูที่หาเซตที่เกิดจากการ ดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการมีจำนวนน้อยกว่านักศึกษาครูที่หาเซตที่เกิด จากการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสองการดำเนินการ ซึ่งสะท้อนให้เห็นว่านักศึกษาครู ขาดความเข้าใจเกี่ยวกับบทนิยาม เมื่อมีการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ สอดคล้องกับ Colgan (1991) ที่กล่าวว่า มีนักศึกษาบางส่วนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับ บทนิยามทางคณิตศาสตร์ จึงทำให้การแก้ปัญหาที่มีความคลาดเคลื่อนหรือแก้ปัญหาไม่สมบูรณ์

2. จากผลสรุปการวิจัยข้อที่ 2 ข้างต้น ในคำถามประเภทที่ 2 ที่พบว่า มีนักศึกษาครู จำนวน 8 คน (คิดเป็น 50%) ที่แสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) และมีนักศึกษาครู จำนวน 3 คน (คิดเป็น 18.75%) ที่แสดงการหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการ ดำเนินการระหว่างเซต (O1) จากผลการวิจัยดังกล่าว จะเห็นว่า มีจำนวนนักศึกษาครูไม่เกิน 50% ที่แสดงการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้และหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการ ดำเนินการระหว่างเซต ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่า โจทย์ในคำถามประเภทที่ 2 มีความซับซ้อนเพิ่ม มากขึ้น และโจทย์กำหนดเซตให้มาในลักษณะที่เป็นเงื่อนไข ทำให้ต้องทราบบทนิยามและรู้จักใช้ บทนิยามเกี่ยวกับเซตจึงจะหาคำตอบได้ เป็นผลให้นักศึกษาครูบางส่วนทำโจทย์ในคำถาม ประเภทที่ 2 ไม่ได้ สอดคล้องกับงานวิจัยของ อรรถพล บุญเรืองศรี (2563) ที่พบว่า มีผู้เรียนระดับ มัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวนถึง 119 คนจากทั้งหมด 334 คน ขาดความเข้าใจบทนิยามเรื่องเซตและ การประยุกต์ใช้บทนิยามเรื่องเซตไม่ถูกต้อง

3. จากผลสรุปการวิจัยข้อที่ 3 ข้างต้น ในคำถามประเภทที่ 3 ที่พบว่า มีนักศึกษาครู จำนวน 4 คน (คิดเป็น 25%) ที่แสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านตัวอย่างที่ สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2) และมีนักศึกษาครูจำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการ พิสูจน์สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) และไม่มีนักศึกษาครูคนใดเลยแสดง สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของ สมบัตินั้น ๆ (O2) จากผลการวิจัยดังกล่าวสามารถอธิบายได้ว่า นักศึกษาครูส่วนใหญ่ไม่เข้าใจ วิธีทางคณิตศาสตร์ที่จะแสดงว่าเซตสองเซตเท่ากันได้อย่างไร แม้ว่ามีนักศึกษาครู 4 คนที่แสดง สมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ แต่เป็นเพียงการ

ยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับที่นั่นนักศึกษาครู 4 คนดังกล่าวไม่ได้ตระหนักถึงกรณีทั่วไปของสมบัติ นั้น สอดคล้องกับคำกล่าวของ Stavrou (2014) ที่ว่า ความผิดพลาดที่พบบ่อยที่สุดเกี่ยวกับการ พิสูจน์ของนักศึกษา คือ พิสูจน์ข้อความทั่วไปโดยใช้การยกตัวอย่างเฉพาะ และมีนักศึกษาครูเพียง คนเดียวเท่านั้นที่สามารถแสดงการพิสูจน์ได้เกือบสมบูรณ์เกี่ยวกับการเท่ากันของเซตสองเซต

4. จากผลสรุปการวิจัยข้อที่ 4 ข้างต้น ในคำถามประเภทที่ 4 ที่พบว่า มีนักศึกษาครู จำนวน 1 คน (คิดเป็น 6.25%) ที่แสดงการใช้สมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไป แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2) ผลการวิจัยนี้ สะท้อนให้เห็นว่านักศึกษาครูมีความ ล้มเหลวในการนำสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปใช้แก้ปัญหา สอดคล้องกับ ผลการวิจัยของ ยงยศ พุทธิให้ (2543) ที่พบว่า การนำความรู้เรื่องเซตไปใช้แก้ปัญหา มีจำนวน นักเรียนเกิดความผิดพลาดมากที่สุดถึง 93 คน จากนักเรียนทั้งหมด 100 คน

จากที่กล่าวมาข้างต้นภาพรวมจะเห็นว่าแนวโน้มของจำนวนนักศึกษาครูจะมีความ เข้าใจระดับการกระทำ (Action) มากที่สุด รองลงมาจะเป็นความเข้าใจระดับกระบวนการ (Process) และรองลงมาเป็นความเข้าใจระดับวัตถุ (Object) ส่วนความเข้าใจระดับโครงสร้าง ทางปัญญา (Schema) จะมีจำนวนนักศึกษาน้อยที่สุด ซึ่งเป็นไปตามหลักทฤษฎี APOS ของ (Dubinsky, 1991)

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาในเชิงลึกว่าอะไรเป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้นักศึกษาเปลี่ยนระดับ ความเข้าใจจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งตามกรอบทฤษฎี APOS
2. ควรมีการศึกษาเพิ่มเติมว่ากรณีการดำเนินการระหว่างเซตแบบคอมพลิเมนต์ที่ นักศึกษามีความเข้าใจเพียง 43.75% เป็นเพราะนักศึกษาไม่เข้าใจบทนิยามหรือไม่เข้าใจ สัญลักษณ์
3. ควรมีการศึกษาปัจจัยที่เป็นสาเหตุซึ่งทำให้นักศึกษาส่วนใหญ่ไปไม่ถึงระดับความ เข้าใจโครงสร้างทางปัญญา
4. ควรมีการศึกษาระดับความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS ในเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่องอื่น ๆ

บรรณานุกรม

- Afgani, M., Suryadi, D., & Dahlan, J. (2017). Analysis of undergraduate students' mathematical understanding ability of the limit of function based on APOS theory perspective. *Journal of Physics: Conference Series*,
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., Weller, K., Arnon, I., Cottrill, J., & Dubinsky, E. (2014). *From piaget's theory to apos theory: reflective abstraction in learning mathematics and the historical development of apos theory*.
- Asiala, Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K., Kaput, J., Schoenfeld, A. H., & Dubinsky, E. (1996). Research in collegiate mathematics education II. In: American Mathematical Society Rhode Island, USA.
- Asiala Mark, Brown Anne, DeVries David J, Dubinsky Ed, Mathews David, & Thomas Karen. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Maa Notes*, 2, 37-54.
- Chiew Leng, & Cheng Meng. (2023). Uncovering student errors in measures of dispersion: An APOS theory analysis in high school statistics education. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(4), 599-614.
- Colgan, M. D. (1991). *An analysis of problem-solving errors made throughout a college-level finite mathematics course*. Indiana University.
- Daud, A. S., Adnan, N. S. M., Abd Aziz, M. K. N., & Embong, Z. (2020). Students' perception towards mathematics using APOS theory: A case study. *Journal of Physics: Conference Series*,
- Doruk, M., & Çiltaş, A. (2020). Pre-service mathematics teachers' concept definitions and examples regarding sets. *International Journal of Psychology and Educational Studies*, 7(2), 21-36.
- Dubinsky. (2000). Using a theory of learning in college mathematics courses. *Teaching and learning undergraduate mathematics*, 12, 10-15.
- Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract

- mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset*, 2, 41-47.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275-282). Springer.
- Encyclopedia of Mathematics Education. (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Department of Education, Centre for Mathematics Education, London South Bank University, London UK. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8> (Springer Dordrecht Heidelberg New York London)
- Gol Tabaghi, S. (2007). *APOS analysis of students' understanding of logarithms* [Concordia University].
- Heingraj. (2006). Roles of Geometer's Sketchpad in Students 'Processes of Geometrie Conceptual Construction on Translation; A Case Study II. Thailand International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education, held at Chiang Mai Rajabhat University, Chiang Mai, Thailand,
- Hiebert, & Carpenter. (1992). Learning and teaching with understanding. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (DA GROUWS ed.). In: New York: Macmillan.
- Hiebert James. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. ERIC.
- Karama, M. J. (2021). Using a Definition to Find the First Derivative of Functions: Misconceptions and Remediation at the Collegiate Level. *Online Submission*, 11(12), 1613-1625.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J. (1973). *The child and reality: Problems of genetic psychology*. (Trans. Arnold Rosin). Grossman.

- Piaget, J. (1980). *Adaption and intelligence*. University of Chicago Press.
- Rahmah, K., Inganah, S., Darmayanti, R., Sugianto, R., & Ningsih, E. F. (2022). Analysis of Mathematics Problem Solving Ability of Junior High School Students Based on APOS Theory Viewed from the Type of Kolb Learning Style. *INdoMATH: Indonesia Mathematics Education*, 5(2), 109-122.
- Reed, B. M. (2007). *The effects of studying the history of the concept of function on student understanding of the concept* [Kent State University].
- Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1.
- Sumaji, S., Sa'dijah, C., Susiswo, S., & Sisworo, S. (2020). Mathematical Communication Process of Junior High School Students in Solving Problems based on APOS Theory. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, 8(1), 197-221.
- Suwanto, F. R., Aprisal, M., Putra, W. D. P., & Sari, R. H. Y. (2017). APOS theory towards algebraic thinking skill. *Proceedings of Ahmad Dahlan International Conference on Mathematics and Mathematics Education*,
- Tatira, B. (2021). Mathematics Education Students' Understanding of Binomial Series Expansion Based on the APOS Theory. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(12), em2035.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ : สำนักงาน.
- กระทรวงศึกษาธิการและกีฬา. (2557). คำสั่งแนะนำเกี่ยวกับหลักการประเมินและการสอบ (ฉบับปรับปรุง).
- กระทรวงศึกษาธิการและกีฬา. (2562). แผนพัฒนา คณะกรรมการศึกษา และกีฬา ภาพที่ ครั้งที่ 9 (2021-2025).
- เขมจิรา เทียงอยู่. (2565). การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่อง เซต ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยใช้ภาษาไพธอน สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ปริญญาโท (กศ.ด. (คณิตศาสตร์)) --มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2565.]. <http://ir-ithesis.swu.ac.th/dspace/handle/123456789/2221>

- ชานันท์ ขำขันมะลี. (2559). การศึกษาพัฒนาการความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม].
- ธัญยศ จำปาหวาย. (2559). ทฤษฎีเซต *Set Theory*. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนนันทา.
- ธวัตรชัย เดนชา, เกียรติ แสงอรุณ, ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, & สมควร สีชมภู. (2558). ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียน เรื่อง เลขยกกำลัง ใน ชั้นเรียน ที่ใช้การสอน ด้วย วิธีการแบบเปิด. *Veridian E-Journal, Silpakorn University (Humanities, Social Sciences and arts)*.
- นิตวุฒิ ศรีคลังไพร. (2549). การศึกษาความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลโดยใช้เครื่องคิดเลขกราฟฟิกเป็นฐานในการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยขอนแก่น].
มหาวิทยาลัยขอนแก่น. สำนักวิทยบริการ Email: library@kku.ac.th.
- พัชร เรืองสวัสดิ์. (2562). การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ที่ส่งเสริมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มหาวิทยาลัยทักษิณ].
- มลิวรรณ พวงจำปี. (2557). การ ศึกษา ความ เข้าใจ ทาง คณิตศาสตร์ ตาม กรอบ ทฤษฎี Action-Process-Structure (APS) เรื่อง ลิ มิ ต และ ความ ต่อ เนื่ อ ง ของ ฟังก์ชัน ของ นักเรียน ชั้นมัธยมศึกษา ปี ที่ 6 A Study on Mathematical Understandings of 12th Grade Students Based on the Action-Process-Structure Framew. *Rajabhat Maha Sarakham University Journal*, 8(2), 259-270.
- ยงยศ พุทธิให้. (2543). การศึกษาความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ เรื่องเซต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสายปัญญา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ].
กรุงเทพฯ.
- ยุทธกรณ์ ชาญญานนท์. (2562). การศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดของ *Usiskin* เรื่อง การแก้สมการ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม].
- วินัย คำสุวรรณ. (2558). มโนทัศน์และการวิจัย ความเข้าใจคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 1.. ed.).
กรุงเทพฯ : ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- ศราววุฒิ จำวัน. (2559). ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เรื่องแกนสมมาตรตามกรอบทฤษฎี APOS :กรณีศึกษาชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนห้วยนาศึกษาวิทย์. กองประชุมวิชาการและนำเสนอผลงานวิจัยระดับชาติ ราชธานีวิชาการ ครั้งที่ 1.
- สถาบันค้นคว้าวิทยาศาสตร์การศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ และการกีฬา. (2553). คู่มือครู

- คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. นครหลวงเวียงจันทน์ : [ม.ป.พ].
- สถาบันคั่นคว้าวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพฯ : สำนักงาน.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. (2549). ปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และแนวทางแก้ไข. วารสารวงการครู ปีที่ 3, ฉบับที่ 31 (ก.ค. 2549), หน้า 78-80.
- สัญลักษณ์ นักร้อง. (2559). การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับมโนทัศน์มิติตามกรอบทฤษฎี APOS โดยใช้โปรแกรม *the Geometer's Sketchpad (GSP)* เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ ปริณิธานินทร์(ก.ศ.ม(คณิตศาสตร์)--มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2559.].
- สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว, ก. (2551). แผนยุทธศาสตร์การปฏิรูประบบการศึกษาแห่งชาติลาว(2006-2015). เวียงจันทน์ : สีสหวาด.
- สุกัญญา ธรรมนุญรักษ์, นฤมล ช่าง ศรี, & ไมตรี อินทร์ ประสิทธิ์. (2558). ความ เข้าใจ อย่าง รู้ แจ่ม เรื่อง การ หาร ของ นักเรียน ใน ชั้น เรียน คณิตศาสตร์ ที่ ใช้ การ ศึกษา ชั้น เรียน และ วิธี การ แบบ เปิด. วารสาร ศึกษา ศาสตร์ มหาวิทยาลัย ขอนแก่น, 38(3), 185-192.
- สุขคะเสริม สิทธิเดช, & ธรสน ทราญุทธ. (2555). ปัจจัย ที่ ส่ง ผล ต่อ การ บริหาร จัดการ งาน วิชาการ ใน โรงเรียน มัธยมศึกษา สังกัด แผนก ศึกษาธิการ แขวง คำ ม่วน สาธารณรัฐประชาธิปไตย ประชาชน ลาว. วารสาร การ ศึกษา และ การ พัฒนา สังคม มหาวิทยาลัยบูรพา, 9(1), 96-106.
- อรรถพล บุญเรืองศรี. (2563). การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเซต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกลุ่มสหวิทยาเขตเบญจสิริ เขตพื้นที่การศึกษา มัธยมศึกษา เขต 2. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.



ภาควิชา



ค่าดัชนีความสอดคล้องของงานปฏิบัติ (Task) เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ของนักศึกษาคณิตศาสตร์ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาวโดยผู้วิจัยกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนสำหรับงานปฏิบัติแต่ละข้อดังนี้

+1 หมายถึง สอดคล้อง หรือแน่ใจว่าข้อคำถามนั้นสอดคล้องกับเนื้อหาและวัตถุประสงค์

0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นสอดคล้องกับเนื้อหาและวัตถุประสงค์

-1 หมายถึง ไม่สอดคล้องหรือไม่แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นไม่สอดคล้องกับเนื้อหาและวัตถุประสงค์

ข้อมูลเพิ่มเติม นิยามศัพท์ของระดับความเข้าใจเรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ซึ่งผู้วิจัยได้จำแนกไว้ดังนี้

ระดับการกระทำ (Action) เป็นระดับที่นักศึกษามองหาเซตที่เกิดจากการดำเนินการระหว่างเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต ได้แก่ ยูเนียน (A1) อินเตอร์เซกชัน (A2) ผลต่าง (A3) และคอมพลีเมนต์(A4) ร่วมทั้งการดำเนินการระหว่างเซตแบบยูเนียนร่วมกับอินเตอร์เซกชัน (A5) การดำเนินการระหว่างเซตแบบอินเตอร์เซกชันร่วมกับผลต่าง (A6) และการดำเนินการระหว่างเซตร่วมกันของสี่การดำเนินการ (A7)

ระดับกระบวนการ (Process) เป็นระดับที่นักศึกษามองหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ (P1) หรือสามารถแสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซต ผ่านตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัตินั้น ๆ (P2)

ระดับวัตถุ (Object) เป็นระดับที่นักศึกษามองหาเซตผ่านการเชื่อมโยงสมบัติที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (O1) หรือสามารถแสดงสมบัติของการดำเนินการระหว่างเซตผ่านการแสดงตัวอย่างที่สะท้อนให้เห็นถึงกรณีทั่วไปของสมบัตินั้น ๆ (O2)

ระดับโครงสร้างทางปัญญา (Schema) เป็นระดับที่นักศึกษามองหาพหุสมบัตินี้ที่เกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซต (S1) หรือสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการระหว่างเซตไปแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ (S2)

ข้อที่	ข้อความถาม	วัตถุประสงค์	ผลพิจารณาจาก ผู้เชี่ยวชาญ			รวม	IOC	แปลผล
			คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
คำถามประเภทที่ 1 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามบทนิยามของการดำเนินการระหว่างเซต								
1	กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$ และ $C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา 1 $A \cup B = \dots\dots\dots$ 2 $A \cap B = \dots\dots\dots$ 3 $A - B = \dots\dots\dots$ 4 $C' = \dots\dots\dots$ 5 $B \cup (A \cap C) = \dots\dots\dots$ 6 $(C - B) \cap A = \dots\dots\dots$ 7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \dots\dots\dots$	เพื่อศึกษาความ เข้าใจ ระดับ Action	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
คำถามประเภทที่ 2 เป็นคำถามเกี่ยวกับการหาเซตตามเงื่อนไขที่กำหนด								
2	กำหนดให้ $A - B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหา $(A \cup B) \cap C$	เพื่อศึกษาความ เข้าใจ ระดับ Process หรือ Object	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $A \cap B = \{1, 9\}$, $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ และ $U - A = \{2, 5, 6, 7\}$ จงหา B	เพื่อศึกษาความ เข้าใจ ระดับ Process หรือ Object	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
คำถามประเภทที่ 3 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแสดงการเท่ากันของเซต								
4	จงตรวจสอบว่า $(A \cap B')' \cup B = A' \cup B$ เป็น จริงหรือไม่	เพื่อศึกษาความ เข้าใจ ระดับ Process หรือ Object หรือ Schema	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	จงตรวจสอบว่า $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ เป็นจริงหรือไม่	เพื่อศึกษาความ เข้าใจ ระดับ Process หรือ Object หรือ	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

		Schema						
6	จงตรวจสอบว่า $(A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B)$ เป็นจริงหรือไม่	เพื่อศึกษาความเข้าใจ ระดับ Process หรือ Object หรือ Schema	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
คำถามประเภทที่ 4 เป็นคำถามเกี่ยวกับการแก้ปัญหาการดำเนินการระหว่างเซตในสถานการณ์ที่กำหนดให้								
7	จากการสำรวจการลงทะเบียนเลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และเคมี ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง พบว่า มีนักเรียนที่ไม่เลือกเรียนวิชาใดเลยจำนวน 9% มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และฟิสิกส์ แต่ไม่เลือกเคมี 12% มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และเคมี แต่ไม่เลือกฟิสิกส์ 14% มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาเคมี และ ฟิสิกส์ แต่ไม่เลือกคณิตศาสตร์ 21% มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 60% มีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ 48% มีนักเรียนที่เลือกเรียนเคมีเพียงวิชาเดียว 6% จงหา 1. จำนวนนักเรียนที่เลือกเรียนทั้งสามวิชา 2 จำนวนนักเรียนที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์เพียงวิชาเดียว 3 จำนวนนักเรียนที่เลือกเรียนฟิสิกส์เพียงวิชาเดียว	เพื่อศึกษาความเข้าใจ ระดับ Schema	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	นักเรียนชั้น ม.6 สายวิทย์มีทั้งหมด 110 คน แต่ละคนต้องเลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ ภาษาอังกฤษ อย่างน้อยหนึ่งวิชา ปรากฏว่านักเรียนเลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ และ	เพื่อศึกษาความเข้าใจ ระดับ Schema	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

	ภาษาอังกฤษ เป็นจำนวน 80 60 และ 40 ตามลำดับ ในจำนวนดังกล่าวมีผู้ที่เลือกเรียนทั้ง สามวิชา จำนวน 10 คน เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์อย่าง เดียว 20 คน เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว 30 คน และนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาภาษาอังกฤษ ทุกคนจะเลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ด้วย ถ้าสุ่มเลือก นักเรียนหนึ่งคนเพื่อเป็นตัวแทนของห้อง จงหา ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่เรียนวิชา คณิตศาสตร์หรือภาษาอังกฤษ							
9	จากการสำรวจเกี่ยวกับการเลือกฉีดวัคซีนป้องกัน Covid – 19 ของคนในหมู่บ้านเล็กๆ แห่งหนึ่ง ซึ่ง สำรวจทุกคน พบข้อมูลดังนี้ ถ้าคนใดเลือกฉีด AstraZeneca แล้วจะไม่ เลือกฉีด Sinovac มี 20 คนที่เลือกฉีด AstraZeneca หรือ Sinovac มี 17 คนที่ไม่เลือกฉีด Sinovac มี 15 คนที่ไม่เลือกฉีด AstraZeneca จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้ถูกต้อง 1. จงหาจำนวนคนที่เลือกฉีด Sinovac 2. จงหาจำนวนคนที่เลือกฉีด AstraZeneca 3. จงหาจำนวนคนทั้งหมดในหมู่บ้าน 4. จงหาจำนวนคนที่ไม่เลือกฉีดทั้ง AstraZeneca และ Sinovac	เพื่อศึกษาความ เข้าใจระดับ Schema	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้



งานปฏิบัติ (Task) วัดความเข้าใจเรื่องการดำเนินการระหว่างเซต

สาขาที่เรียน:..... ปีที่:.....

เวลาที่เริ่มทำแบบทดสอบ:.....

เวลาที่สิ้นสุดทำแบบทดสอบ:.....

1) กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$

และ $C = \{2, 4, 6, 8\}$ จงหา

1 $A \cup B =$ (A1)

2 $A \cap B =$ (A2)

3 $A - B =$ (A3)

4 $C' =$ (A4)

5 $B \cup (A \cap C) =$ (A5)

6 $(C - B) \cap A =$ (A6)

7 $(A - B') \cup (C \cap A)' =$ (A7)

2) กำหนดให้ $A - B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหา $(A \cup B) \cap C$ (P1 และ O1)



- 3) กำหนดให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ถ้า $A \cap B = \{1, 9\}$,
 $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ และ $U - A = \{2, 5, 6, 7\}$ จงหา B (P1 และ O1)



4) จงตรวจสอบว่า $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ เป็นจริงหรือไม่ (P2,O2 และ S1)



5) จงตรวจสอบว่า $(A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B)$ เป็นจริงหรือไม่ (P2,O2 และ S1)



- 6) นักเรียนชั้น ม.6 สายวิทยามีทั้งหมด 110 คน แต่ละคนต้องเลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ วิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาอังกฤษ อย่างน้อยหนึ่งวิชา ปรากฏว่านักเรียนเลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ วิชาคณิตศาสตร์ และวิชาภาษาอังกฤษ เป็นจำนวน 80 60 และ 40 ตามลำดับ ในจำนวนดังกล่าวมีผู้ที่เลือกเรียนทั้งสามวิชา จำนวน 10 คน เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์อย่างเดียว 20 คน เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว 30 คน และนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาภาษาอังกฤษทุกคนจะเลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ด้วย ถ้าสุ่มเลือกนักเรียนหนึ่งคนเพื่อเป็นตัวแทนของห้อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์หรือภาษาอังกฤษ (S2)



7) จากการสำรวจเกี่ยวกับการเลือกฉีดวัคซีนป้องกัน Covid – 19 ของคนในหมู่บ้านเล็กๆ แห่งหนึ่ง ซึ่งสำรวจทุกคน พบข้อมูลดังนี้

ถ้าคนใดเลือกฉีด AstraZeneca แล้วจะไม่เลือกฉีด Sinovac

มี 20 คนที่เลือกฉีด AstraZeneca หรือ Sinovac

มี 17 คนที่ไม่เลือกฉีด Sinovac

มี 15 คนที่ไม่เลือกฉีด AstraZeneca

จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้ถูกต้อง

1. จงหาจำนวนคนที่เลือกฉีด Sinovac
2. จงหาจำนวนคนที่เลือกฉีด AstraZeneca
3. จงหาจำนวนคนทั้งหมดในหมู่บ้าน
4. จงหาจำนวนคนที่ไม่เลือกฉีดทั้ง AstraZeneca และ Sinovac (S2)



ແບບທົດສອບ (Task) ວັດຄວາມເຂົ້າໃຈຂອງນັກສຶກສາກ່ຽວກັບການຄຳນວນຂອງກຸ່ມ

ສາຂາວິຊາຮຽນ:.....ປີທີ:

ເວລາເລີ່ມເຮັດແບບທົດສອບ:.....

ເວລາສິ້ນສຸດເຮັດແບບທົດສອບ:.....

1) ກຳນົດໃຫ້ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 0\}$

ແລະ $C = \{2, 4, 6, 8\}$ ຈົ່ງຫາ

1 $A \cup B = \dots\dots\dots(A1)$

2 $A \cap B = \dots\dots\dots(A2)$

3 $A - B = \dots\dots\dots(A3)$

4 $C' = \dots\dots\dots(A4)$

5 $B \cup (A \cap C) = \dots\dots\dots(A5)$

6 $(C - B) \cap A = \dots\dots\dots(A6)$

7 $(A - B') \cup (C \cap A)' = \dots\dots\dots(A7)$

- 2) กำหนดให้ $A - B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$, $B \cap C = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหา $(A \cup B) \cap C$ (P1 และ O1)



- 3) กำหนดให้ A และ B เป็นกลุ่มย่อยของ U โดยที่ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ถ้า $A \cap B = \{1, 9\}$,
 $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$ และ $U - A = \{2, 5, 6, 7\}$ จงหา B (P1 และ O1)



4) ຈົ່ງກວດສອບວ່າ $A - (B - C) = A \cap (B' \cup C)$ ເປັນຈິງຫຼືບໍ່ (P2, O2 ແລະ S1)



5) ຈົ່ງກວດສອບວ່າ $(A \cup B)' \cap C = C - (A \cup B)$ ເປັນຈິງຫຼືບໍ່ (P2, O2 ແລະ S1)



- 6) ນັກຮຽນຊັ້ນ ມ 6 ສາຍວິທະຍາສາດມີທັງໝົດ 110 ຄົນ ແຕ່ລະຄົນຕ້ອງເລືອກຮຽນວິຊາຟີຊິກສາດ, ວິຊາຄະນິດສາດ ແລະ ວິຊາພາສາອັງກິດຢ່າງນ້ອຍໜຶ່ງວິຊາ ປາກົດວ່ານັກຮຽນເລືອກຮຽນວິຊາຟີຊິກສາດ ວິຊາຄະນິດສາດ ແລະ ວິຊາພາສາອັງກິດ ຈຳນວນ 80 , 60 ແລະ 40 ຄົນ ຕາມລຳດັບ ໃນຈຳນວນ ດັ່ງກ່າວມີຜູ້ທີ່ເລືອກຮຽນທັງ 3 ວິຊາ ຈຳນວນ 10 ຄົນ, ຜູ້ທີ່ເລືອກຮຽນວິຊາຟີຊິກສາດຢ່າງດຽວ ຈຳນວນ 20 ຄົນ, ຜູ້ທີ່ເລືອກຮຽນວິຊາຄະນິດສາດຢ່າງດຽວ ຈຳນວນ 30 ຄົນ ແລະ ຜູ້ທີ່ເລືອກຮຽນວິຊາພາສາອັງກິດທຸກຄົນຈະເລືອກຮຽນວິຊາຟີຊິກສາດນຳ ຖ້າສຸ່ມເລືອກນັກຮຽນໜຶ່ງຄົນເພື່ອເປັນຕົວແທນຂອງ ຫ້ອງ ຈຶ່ງຫາຄວາມນ່າຈະເປັນທີ່ຈະໄດ້ນັກຮຽນທີ່ເລືອກຮຽນວິຊາຄະນິດສາດຫຼືວິຊາພາສາອັງກິດ (S2)



7) ຈາກການສຳຫຼວດກ່ຽວກັບການເລືອກສັກວັກຊີນປ້ອງກັນພະຍາດ Covid – 19 ຂອງຄົນໃນໝູ່ບ້ານ ແຫ່ງໜຶ່ງ ເຊິ່ງສຳຫຼວດທຸກຄົນແລ້ວໄດ້ຂໍ້ມູນດັ່ງນີ້

ຖ້າຄົນໃດເລືອກສັກ AstraZeneca ແລ້ວຈະບໍ່ເລືອກ Sinovac

ມີ 20 ຄົນ ທີ່ເລືອກສັກ AstraZeneca ຫຼື Sinovac

ມີ 17 ຄົນ ທີ່ບໍ່ເລືອກສັກ Sinovac

ມີ 15 ຄົນ ທີ່ບໍ່ເລືອກສັກ AstraZeneca

ຈຶ່ງຕອບຄຳຖາມແຕ່ລະຂໍ້ຕໍ່ໄປນີ້ໃຫ້ຖືກຕ້ອງ

1. ຈຶ່ງຫາຈຳນວນຄົນທີ່ເລືອກສັກ Sinovac
2. ຈຶ່ງຫາຈຳນວນຄົນທີ່ເລືອກສັກ AstraZeneca
3. ຈຶ່ງຫາຈຳນວນຄົນທັງໝົດໃນໝູ່ບ້ານ
4. ຈຶ່ງຫາຈຳນວນຄົນທີ່ບໍ່ເລືອກສັກ AstraZeneca ແລະ Sinovac (S2)



ຂໍຂອບໃຈທີ່ໃຫ້ຄວາມຮ່ວມມື



ภาคผนวก ค

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งเป็นงานปฏิบัติเพื่อศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซตของนักศึกษาครู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอนก จันทรวงูญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2. อาจารย์ ดร.นพดล วิจิตสงคราม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

3. Dr.Kilaysone Asai

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยจำปาสัก



บันทึกข้อความ

ส่วนงาน งานบริหารและธุรการ บัณฑิตวิทยาลัย โทร. 12412

ที่ อว 8718.1/1500

วันที่ 12 ธันวาคม 2567

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญ

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์เอนก จันทร์จรูญ

เนื่องด้วย นางManivanh Mingkeo นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้รับอนุมัติให้ทำปริญญานิพนธ์ เรื่อง “การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาคู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยิส และ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

ในการนี้ บัณฑิตวิทยาลัยขอเรียนเชิญ ท่าน เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจงานปฏิบัติ(Task) ทั้งนี้ นิสิตได้ติดต่อประสานงานเบื้องต้นกับท่านแล้ว และจะประสานงานในรายละเอียดดังกล่าวต่อไป สามารถสอบถามข้อมูลเพิ่มเติมได้ที่ โทร. 082 556 0471

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์เชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญ ให้ นางManivanh Mingkeo และ ขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย



บันทึกข้อความ

ส่วนงาน งานบริหารและธุรการ บัณฑิตวิทยาลัย โทร. 12412

ที่ อว 8718.1/1500

วันที่ 12 ธันวาคม 2567

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญ

เรียน อาจารย์ ดร.นพดล วิจิตสงคราม

เนื่องด้วย นางManivanh Mingkeo นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้รับอนุมัติให้ทำปริญญานิพนธ์ เรื่อง “การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาครู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยชัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยิสานและ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

ในการนี้ บัณฑิตวิทยาลัยขอเรียนเชิญ ท่าน เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจงานปฏิบัติ(Task) ทั้งนี้ นิสิตได้ติดต่อประสานงานเบื้องต้นกับท่านแล้ว และจะประสานงานในรายละเอียดดังกล่าวต่อไป สามารถสอบถามข้อมูลเพิ่มเติมได้ที่ โทร. 082 556 0471

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์เชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญ ให้ นางManivanh Mingkeo และขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ที่ อว 8718/1725



บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
114 สุขุมวิท 23 แขวงคลองเตยเหนือ
เขตวัฒนา กรุงเทพฯ 10110

12 ธันวาคม 2567

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์เชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญ

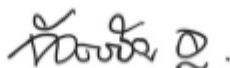
เรียน ดร.Kilaysone Asai

เนื่องด้วย นางManivanh Mingkeo นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้รับอนุมัติให้ทำปริญญานิพนธ์ เรื่อง “การศึกษาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่องการดำเนินการระหว่างเซต ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาคู ในเขตภาคใต้ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุกัญญา หะยิสำและ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

ในการนี้ บัณฑิตวิทยาลัยขอเรียนเชิญ ท่าน เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจงานปฏิบัติ(Task) ทั้งนี้ นิสิตได้ติดต่อประสานงานเบื้องต้นกับท่านแล้ว และจะประสานงานในรายละเอียดดังกล่าวต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์เป็นผู้เชี่ยวชาญ ให้ นางManivanh Mingkeo และขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ



(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย



ภาพประกอบการเก็บข้อมูล



ประวัติผู้เขียน

